# Table des matières

# Index

# Chapitre 1

# Introduction Générale

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution à l'étude des structures locales des mesures hyperboliques. Il s'agit ici de (re)démontrer que certaines mesures invariantes pour certains systèmes dynamiques ont, localement, une structure produit, qui respecte la structure topologique locale produit induite par les feuilletages stables et instables. Cette thèse est composée de deux parties distinctes, et chaque partie comporte sa propre introduction, qui fixe le cadre et énonce les résultats.

La première partie, consiste essentiellement en la mise en place d'une méthode, dans la cas de la dynamique uniformément hyperbolique, qui permet d'étudier la structure locale des états d'équilibres, sans avoir à passer par la dynamique symbolique. En effet, beaucoup de démonstrations en théorie ergodique différentiable utilisent ce passage à la dynamique symbolique, ce qui, en cachant l'aspect géométrique du problème, constitue un obstacle sérieux à l'extension des résultats sur les mesures invariantes, du cas de la dynamique uniformément hyperbolique, au cas de la dynamique non-uniformément hyperbolique. Grâce à cette méthode, nous redémontrons le théorème d'unique ergodicité des flots horocycliques pour les Axiom-A (voir [5]) et son extension aux mesures d'équilibre (voir [1]).

Les problèmes rencontrés avec cette méthode, sont avant tout d'ordre technique, mais certains sont de vrais problèmes théoriques : Si on se donne une partition markovienne de $\Omega$, $\mathcal{R}$, et si on note $\partial\mathcal{R}$ son bord, est-ce que pour toute autre partition markovienne, $\mathcal{R}'$, $\partial\mathcal{R} \subset \partial\mathcal{R}'$ ? Existe-t-il un ensemble de points $\partial\Omega$, tel que pour toute partition markovienne, $\mathcal{R}$, $\partial\Omega \subset \partial\mathcal{R}$ ? Si $R$ est un rectangle markovien donné, existe-t-il toujours une partition markovienne $\mathcal{R}$, telle que $R$ soit un des ses rectangles ? D'une manière plus générale, cette méthode pose le problème des systèmes à trous. Si $(X, f)$ est un système dynamique, et si $A \subset X$, peut-on définir un nouveau système $(X \setminus A, f)$ composé des points dont l'orbite ne rencontre jamais $A$ ? Comment peut-on faire un trou (*ie* retirer $A$), quelle doit-être sa forme, quelle est la nouvelle entropie ? Dans [7], Collet, Galves et Lopes montrent par exemple que dans le cas de la dynamique symbolique, on peut étudier de tels systèmes à trou, mais peut-on obtenir les même résultats pour les Axiom-A ?

La deuxième partie essaye d'adapter la méthode introduite, au cas de la dynamique non-uniformément hyperbolique. Nous construisons un rectangle qui vérifie la propriété de Markov, puis sous certaines hypothèses, nous montrons l'existence d'une mesure de *Sinai–Ruelle–Bowen*, $\sigma$-finie. Herman et Katznelson, par exemple, ( voir [11] et [14]) se sont intéressés au problème, et ils ont prouvé, que malgré l'hypothèse de conservativité, un système n'admet pas nécessairement une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous introduisons ici une hypothèse supplémentaire, dite de non intersection brutale, qui exprime une condition géométrique. Si cette hypothèse est vérifiée, si la mesure de Lebesgue charge un ensemble de points, dits points réguliers, et si le système est conservatif, alors il existe une mesure $SRB$ $\sigma$-finie. Ceci constitue donc une première réponse quant à l'existence de mesures $SRB$ pour les systèmes non-uniformément hyperboliques, mais indiscutablement, il faudra voir si l'hypothèse géométrique peut être affaiblie.

La principale difficulté de cette partie, réside dans le fait que, cherchant à trouver une mesure invariante particulière, on ne peut travailler avec une mesure borélienne de probabilité, invariante et hyperbolique, fixée *a priori*. Nous sommes donc obligés de faire les estimations pour tous les points réguliers. Toutefois, quand on travaille avec les mesures $SRB$, la mesure de Lebesgue joue naturellement un rôle important, et c'est ce qui nous permet de nous en sortir. Mais la encore, l'hypothèse de conservativité ne nous assure que du retour presque-sur des points, sans nous donner d'information sur la fréquence.

D'autre part, la question soulevée dans le cas Axiom-A du système à trou se pose ici aussi : ayant construit un rectangle markovien de mesure de Lebesgue positive, la pression (pour le jacobien instable) du système troué $(\Lambda \setminus R, f)$ est-elle strictement négative ? Si tel était le cas, cela entrainerait que la mesure construite est de probabilité, et non plus seulement $\sigma$-finie.

# Première partie

# Dynamique Uniformément Hyperbolique

# Chapitre 2

# Introduction

## 2.1 Cadre général

Dans [5], Bowen et Marcus définissent la notion de transversale à un feuilletage $n$-dimensionel, $\mathcal{G}$, d'un espace métrique $X$, ainsi qu'une notion de mesure transverse $\mathcal{G}$-invariante. Ils montrent alors l'unique ergodicité pour les feuilletages horocycliques, c'est à dire, dans le cadre des Axiom-A, l'existence et l'unicité d'un système de mesures transversales au feuilletage stable et invariant par holonomie stable. Ils montrent en particulier que cet unique système de mesure est lié à *la* mesure d'entropie maximale. Dans [9], pour le cas des flots Axiom-A, $(\Omega, \Phi)$, Haydn prouve l'existence d'une mesure transverse $\{\mu_x\}$, à support dans la feuille instable locale $W^u_{loc}(x)$, qui n'est pas invariant le long du feuilletage fortement stable $W^{ss}$, mais qui admet un Jacobien du type $e^{\omega_{x,x'}}$, avec $\omega_{x,x'} = \int_0^\infty (F \circ \Phi_s \circ \rho_{x,x'} - F \circ \Phi_s)\, ds$, où $F$ est n'importe quelle fonction höldérienne de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. Dans sa preuve, Haydn suppose que les deux mesures $\Phi_{s*}\mu_x$ et $\mu_{\Phi_s(x)}$ sont équivalentes, et utilise, comme [5], la dynamique symbolique donnée par une partition de Markov. Dans [1], Babillot et Ledrappier donnent une nouvelle preuve du résultat précédent, mais sans supposer que les deux mesures $\Phi_{s*}\mu_x$ et $\mu_{\Phi_s(x)}$ sont absolument continues. Cependant ils utilisent encore la dynamique symbolique, ce qui masque l'aspect géométrique du problème, et devient donc est un obstacle certain à l'extension de tels résultats au cas non-uniformément hyperbolique. Le but de cette première partie est de donner une nouvelle preuve, plus géométrique, de ce théorème. En particulier nous n'utiliserons pas la dynamique symbolique, dans le sens où, nous n'étudierons pas un système abstrait conjugué à notre système dynamique. Toutefois, nous utiliserons (le moins possible) la propriété géométrique du système, de l'existence d'un recouvrement fini de $\Omega$ par des rectangles markoviens.

La preuve est basée sur la notion de "sous-système" : nous introduisons un nouveau système dynamique, obtenu à partir du premier par l'application de Poincaré. Pour ce sous-système, nous montrons l'existence et l'unicité des États d'Équilibre associés à de bons potentiels, que nous relions aux États d'Équilibre du système global. La démarche étant de trouver, pour le sous-système, des mesures invariantes particulières, nous utilisons un opérateur de Perron-Frobénius agissant sur les fonctions continues, et dont l'opérateur dual agit justement sur les mesures de probabilité. Ceci complique sensiblement les preuves, car cela nécessite que le sous-système défini soit compact, ce que l'application de Poincaré ne permet pas d'avoir. Parmis les États d'Équilibre que nous obtenons, nous reconnaissons un bon candidat pour former le système de mesures transversales. De plus notre preuve démontre la structure locale produit des mesures de Gibbs, et comme corollaire, la formule de la dimension. Les théorèmes sont annoncés pour les difféomorphismes Axiom-A, mais peuvent être facilement étendus au cas des flots Axiom-A, qui sont des flots suspendus.

## 2.2 Définitions des objets

On considère $M$ une variété riemannienne, compacte, $C^\infty$, de dimension finie et sans bord, et $f : M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme. On suppose que $f$ est un Axiom-A mélangeant, c'est à dire qu'il vérifie les hypothèses suivantes :

(1) l'ensemble des points non errants $\Omega$ est l'adhérence des points périodiques de $f$.

(2) $\Omega$ est hyperbolique, c'est à dire que pour tout $x$ de $\Omega$, il existe une décomposition de l'espace tangent $T_xM$ telle que :

  (a) $T_xM = E_x^u \oplus E_x^s$ ;

  (b) $df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$ et $df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ ;

  (c) il existe une constante $c$ et un réel $\lambda \in ]1, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :

$$\|df_x^n(v)\| \leq c\lambda^{-n}\|v\| \text{ pour tout } v \in E_x^s,$$
$$\|df_x^{-n}(v)\| \leq c\lambda^{-n}\|v\| \text{ pour tout } v \in E_x^u \,;$$

  (d) les applications $x \mapsto E_x^u$ et $x \mapsto E_x^s$ sont continues ;

(3) $f$ est mélangeante, c'est à dire que pour tout couple d'ouverts $U$ et $V$ de $\Omega$, il existe un entier $n$ tel que $f^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.

On considère que la métrique choisie est la métrique adaptée à $f$, ce qui signifie que la constante $c$ est égale à 1. On pourra voir [4] pour la démonstration de l'existence d'une telle métrique équivalente à la métrique naturelle sur $M$.

On définit les variétés stables et instables globales et locales de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in M \text{ tel que } d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\} \,;$$
$$W^u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in M \text{ tel que } d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty\} \,;$$
$$W_\varepsilon^s(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in M \text{ tel que } d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall\, n \in \mathbb{N}\} \,;$$
$$W_\varepsilon^u(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in M \text{ tel que } d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Les variétés stables et instables locales constituent un système de coordonnées canoniques locales. En effet pour $\varepsilon$ suffisament petit il existe un $\rho > 0$ tel que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste en un singleton dès que $d(x, y) \le \rho$. on note ce point $[x, y]$. L'application $[\,.\,,\,.\,]\ :\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : d(x, y) \le \rho\}$ est une application continue à valeurs dans $\Omega$.

On se donne aussi une application $\mathcal{A}$ de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, $\alpha$-höldérienne, et $\varepsilon$ une constante d'expansivité. Les variétés locales $W^s_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(x)$ seront notées respectivement $W^s_{loc}(x)$ et $W^u_{loc}(x)$. On supposera que $\varepsilon$ est suffisamment petit pour que l'application $[\,.\,,\,.\,]$ soit bien définie.

Les applications $x \mapsto E^s(x)$ et $x \mapsto E^u(x)$ sont plus que continues. Elles vérifient une propriété höldérienne, et on appellera $\gamma$ un exposant de hölder. Nous savons que cela entraine, que localement, le feuilletage est lui aussi hölder, c'est à dire que pour trois points $x$, $y$, et $z$ tels que $y \in W^u_\varepsilon(x)$, si $\varepsilon$ est suffisament petit, alors il existe une constante universelle ,$C$, telle que

$$d([x, z], [y, z]) \le C\, d^\gamma(x, y).$$

On suppose qu'on a un rectangle de Markov propre de $\Omega$, c'est à dire un ensemble fermé $R$ de diamètre petit et qui vérifie

1. $R$ est un rectangle, c'est à dire que si $x$ et $y$ sont deux points de $R$, $[x, y]$ existe et est dans $R$ ;
2. $R$ est propre, c'est à dire que $R = \overline{int\ R}$ ;
3. pour tout $x$ de $int\ R$, si $f^n(x) \in int\ R_j$, alors $f^n\left(W^u_{loc}(x) \cap R\right) \supset W^u_{loc}(f^n(x)) \cap R$ et $f^n\left(W^s_{loc}(x) \cap R\right) \subset W^s_{loc}(f^n(x)) \cap R$.

On suppose que le diamètre de $R$ est plus petit que $\varepsilon$, constante d'expansivité telle que $4\varepsilon \le \rho$. En tant que fermé, le rectangle $R$ possède un bord topologique, $\partial R$. Ce bord est d'intérieur vide, et se décompose en deux parties $\partial R = \partial^u R \cup \partial^s R$, chacune ayant des propriétés spécifiques :

- Si $x \in \partial^u R$, alors $W^u_{loc}(x) \cap R \subset \partial^u R$ ;
- Si $x \in \partial^u R$, et $f^{-n}(x) \in R$, alors $f^{-n}(x) \in \partial^u R$.
- Si $x \in \partial^s R$, alors $W^s_{loc}(x) \cap R \subset \partial^s R$ ;
- Si $x \in \partial^s R$, et $f^n(x) \in R$, alors $f^n(x) \in \partial^s R$.

Enfin, si $x$ est un point de $R$, on notera respectivement $W^u(x, R)$ et $W^s(x, R)$ les ensembles $W^u_{loc}(x) \cap R$ et $W^s_{loc}(x) \cap R$.

Il existe parmis les mesures de probabilité $f$-invariantes une mesure particulière, appelée mesure d'équilibre du système pour le potentiel $\mathcal{A}$. Cette mesure sera notée $\mu^{\mathcal{A}}$, et c'est l'unique mesure $f$-invariante qui réalise l'égalité :

$$h_{\mu^{\mathcal{A}}}(f) + \int \mathcal{A}\, d\mu^{\mathcal{A}} = \sup\left\{h_\nu(f) + \int \mathcal{A}\, d\nu\right\},$$

le suprémum étant pris sur toutes les mesures de probabilité $f$-invariantes. On notera $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ ce suprémum, et il sera appelé pression topologique du système pour le potentiel $\mathcal{A}$.

Nous rappelons ici la définition de mesure conforme ainsi qu'une propriété importante qui caractérise ces mesures.

**Définition 2.2.1** *Soit $(X, \Phi, )$ un système dynamique. Soit $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de $X$. Soit $m$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(X)$. On dira que $m$ est conforme s'il existe une fonction $J : X \mapsto \mathbb{R}^+$ borélienne telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ où $\Phi$ est injective et $\Phi(B)$ est un borélien, alors*

$$m\left(\Phi(B)\right) = \int_B J\, dm.$$

On remarque que la définition entraine que pour toute fonction borélienne $f : X \mapsto \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\Phi(B)} f\, dm = \int_B f \circ \Phi\, J\, dm.$$

La fonction $J = J(m)$ s'interprète comme le jacobien de $m$ pour la transformation $\Phi$. Il est unique $m$-p.p..

Avec les notations précédemment introduites nous avons la caractérisation suivante des mesures conformes.

**Proposition 2.2.2** *soit $m$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(X)$. Soit $J : X \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne positive $m$-p.p.. Les deux propriétés suivantes sont équivalents :*

*(i) $m$ est une mesure conforme de jacobien $J$ ;*

*(ii) $P_J^* m = m$, où $P_J^*$ est l'opérateur dual de*

$$P_J(f)(x) = \sum_{y \in \Phi^{-1}(x)} \frac{f(y)}{J(y)}$$

*pour toute fonction borélienne $f$.*

Précisons la définition de transversale donnée par Bowen et Marcus.

**Définition 2.2.3** *Une transversale au feuilletage stable $W^s(\Omega)$ au point $x$, est un compact $K$ contenant $x$, tel qu'il existe une bijection $\Phi : K \times D^s \to \Omega$ avec $\Phi(y \times D^s) \subset W^s(y)$, $\Phi(y, 0) = y$ pour tout $y$, et $\Phi(K \times D^s)$ est un voisinage de $x$ dans $\Omega$.*

Si $K$ est une transversale au feuilletage stable, une mesure tranversale $\mu_K$ sera une mesure positive borélienne sur $K$, et une mesure transverse sera la donnée d'une famille $\{\mu_K\}_{K tranversale}$ de mesures transversales portées par les transversales $K$. Si $K$ et $K'$ sont deux transversales, deux boréliens $A \subset K$ et $A' \subset K'$ seront dits $W^s$-conjugués s'il existe un bijection bi-mesurable $\pi_{A,A'} : A \to A'$ telle que pour tout $x$ dans $A$, $\pi_{A,A'}(x) \in W^s(x)$.

**Définition 2.2.4** *Si $\omega : \{(x, y), x \in W^s(y)\} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on dira qu'une mesure transverse $\mu = \{\mu_K\}_{K tranversale}$ est $\omega$-absolument continue ($\omega$-a.c.) si et seulement si*

(1) pour tout couple de tranversales $K$ et $K'$, pour tout couple de boréliens $A \subset K$ et $A' \subset K'$ $W^s$-conjugués, et pour tout $\pi_{A,A'}$, $\mu_{K'} = \int_A \omega(\pi_{A,A'}(x), x)\, d\mu_K$ ;
(2) $\mu_K(K) > 0$ pour une transversale $K$.

## 2.3 Résultats et plan des démonstrations

### 2.3.1 Résultats

Soient $x$ et $x'$ deux points de $\Omega$ tels que $x' \in W^s(x)$. On pose alors

$$w(x,x') \stackrel{déf}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^k(x') - \mathcal{A} \circ f^k(x).$$

**Théorème 2.3.1 (A)** *A une constante multiplicative près, il existe une unique mesure transverse $e^w$-a.c.. Cette mesure est équivalente au système de mesures désintégrées, $\mu^{\mathcal{A},u}$, de l'État d'Équilibre associé au potentiel $\mathcal{A}$, par rapport à n'importe quelle partition mesurable subordonnée au feuilletage instable. De plus la mesure vérifie*

$$\frac{d\mu_{f(K)}(f(x))}{df_*\mu_K(x)} = e^{\mathcal{A}(x)-\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}.$$

Les définitions de partitions mesurables et subordonnées au feuilletage instable pourront être trouvées dans [15] et [22].

**Définition 2.3.2** *Si $\nu$ est une mesure sur l'espace métrique $\mathcal{X}$ on appelle dimension ponctuelle supérieure (respectivement inférieure) de $\nu$ en un point $x_0$ la valeur :*

$$\overline{\delta}(x_0,\nu) \stackrel{déf}{=} \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \nu(B(x_0,\varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

*(resp. $\underline{\delta}(x_0,\nu) \stackrel{déf}{=} \liminf \ldots$). Si les deux valeurs coïncident on appelle cette valeur dimension ponctuelle de $\nu$ en $x_0$ et on la note $\delta(x_0,\nu)$.*

**Théorème 2.3.3 (B)** *L'État d'Équilibre $\mu^{\mathcal{A}}$ a une structure locale produit,*

$$d\mu^{\mathcal{A}}([y,z]) = \varphi_x(y,z)d\mu_x^{\mathcal{A},u}(y) \otimes d\mu_x^{\mathcal{A},s}(z)$$

*où $\mu_x^{\mathcal{A},u}$ et $\mu_x^{\mathcal{A},s}$ dénotent repectivement les mesures conditionnelles de $\mu^{\mathcal{A}}$ associées à deux partitions mesurables subordonnées au feuilletage instable et au feuilletage stable, $y$ étant un point quelconque de $W^u_{loc}(x)$ et $z$ un point quelconque de $W^s_{loc}(x)$.*

*De plus, $\mu^{\mathcal{A}}$, $\mu_x^{\mathcal{A},u}$ et $\mu_x^{\mathcal{A},s}$ ont $\mu^{\mathcal{A}}$-presque partout des dimensions ponctuelles, $\delta$, $\delta^u$ et $\delta^s$ constantes, et*

$$\delta = \delta^u + \delta^s.$$

*Remarque* : La dernière égalité a été démontrée dans le cas non-uniformément hyperbolique dans [2].

### 2.3.2 Plan des démonstrations

Dans une première partie nous rappelons quelques réslutats généraux sur les diverses extensions de systèmes dynamiques.

Dans une deuxième partie nous démontrerons l'existence et l'unicité d'États d'Équilibres pour un certain système dynamique. Dans cette partie nous adaptons essentiellement les idées qu'on trouve dans [24], [10] ou [3].

Dans une troisième partie nous montrerons que le système dynamique $(f, \Omega)$ représente une extension du système étudié dans la deuxième partie. Nous reconnaitrons en particulier la mesure $\mu^{\mathcal{A}}$ si $\mathcal{A}$ est fixée. Les deux démonstrations suivront alors.

# Chapitre 3

# Quelques propriétés générales

## 3.1 Extensions naturelles

Si on se donne un système dynamique probabilisé $(Y, \Psi, \nu)$, il existe un unique (à isomorphisme près) système dynamique $(X, \Phi, \mu)$, avec $\Phi$ bijective, tel que le premier soit un facteur du second. Le système $(X, \Phi, \mu)$ est appelé extension naturelle de $(Y, \Psi, \nu)$. Nous considérons deux systèmes dynamiques $(X, \Phi, \mu)$ et $(Y, \Psi, \nu)$, et nous allons donner une condition pour que le premier soit l'extension naturelle du second.

**Proposition 3.1.1** *Soient deux systèmes dynamiques $(X, \Phi, \mu)$ et $(Y, \Psi, \nu)$ vérifiant les hypothèses suivantes :*
*(i) $X$ et $Y$ sont deux espaces métriques compacts.*
*(ii) $\Phi$ est $\mu$-presque partout inversible.*
*(iii) Il existe une application continue $\Pi$ de $X$ sur $Y$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Y & \xrightarrow{\Psi} & Y \end{array}$$

*soit commutatif.*
*(iv) Pour tout borélien $B$ de $Y$, on a l'égalité : $\mu(\Pi^{-1}(B)) = \nu(B)$.*
*(v) Pour tout $y \in Y$ si on note $X_y \stackrel{déf}{=} \Pi^{-1}(y)$, alors $\Phi(X_y) \subset X_{\Psi(y)}$.*
*(vi) Pour $\mu$-presque tout couple $(x, y)$ de $X$, si $\Pi \circ \Phi^{-n}(x) = \Pi \circ \Phi^{-n}(y)$ pour tout entier $n$, alors $x = y$.*
*Alors $(X, \Phi, \mu)$ est isomorphe (au sens de $\mu$) à l'extension naturelle de $(Y, \Psi, \nu)$.*

*Démonstration* : Notons $(\widehat{Y}, \widehat{\Psi}, \widehat{\nu})$ l'extension naturelle de $(Y, \Psi, \nu)$ et définissons l'application $\Theta$ sur $X$ par :

$$\begin{array}{rccl} \Theta : & X & \longrightarrow & Y^{\mathbb{N}} \\ & x & \mapsto & \Theta(x) = (\Pi(x), \Pi \circ \Phi^{-1}(x), \ldots, \Pi \circ \Phi^{-n}(x), \ldots) \,. \end{array}$$

Nous allons montrer que $\Theta$ est à valeurs dans $\widehat{Y}$, puis que c'est un isomorphisme entre $(X,\mu)$ et $(\widehat{Y},\widehat{\nu})$.
Soit $\underline{y} \stackrel{déf}{=} (y_0, y_1, \ldots)$ un point de $Y^{\mathbb{N}}$ image par $\Theta$ d'un point $x$ de $X$. Soit $i$ un entier strictement positif. Alors $\Psi(y_i) = \Pi \circ \Phi(z)$ où $z$ est n'importe quel point de $X_{y_i}$. De plus $y_i = \Pi \circ \Phi^{-i}(x)$, ce qui montre qu'on peut choisir $z = \Phi^{-i}(x)$. Ainsi $\Psi(y_i) = \Pi \circ \Phi^{-i+1}(x) = y_{i-1}$, ce qui prouve bien que $\underline{y} \in \widehat{Y}$.

- Montrons que $\Theta$ est $\mu$-presque partout injective. On considère donc deux points $x$ et $y$ de $X$ tels que $\Theta(x) = \Theta(y)$. Par définition de $\Theta$ cela signifie que pour tout entier $n$ on a l'égalité $\Pi \circ \Phi^{-n}(x) = \Pi \circ \Phi^{-n}(y)$, ce qui implique la relation $x = y$.

- Montrons la surjectivité. On note

$$K = \left\{ \widehat{y} \in \widehat{Y}\; \widehat{y} = (y_0, y_1, \ldots) \text{ tel que } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n(X_{y_n}) = \emptyset \right\}.$$

$K$ représente exactement l'ensemble des points de $\widehat{Y}$ qui ne sont pas dans l'image par $\Theta$ de $X$. Nous allons voir que $\widehat{\nu}(K) = 0$. En tant qu'extension naturelle d'un système dynamique défini sur un espace Polonais, $\widehat{\nu}$ est nécessairement régulière. On choisit alors une suite de compacts $K_n$ inclus dans $K$ tels que $\widehat{\nu}(K)$ soit la limite de la suite $(\widehat{\nu}(K_n))n \in \mathbb{N}$. Si $\widehat{y} = (y_0, y_1, \ldots) \in \widehat{Y}$ on définit l'application $\pi^i$ projection sur la $i^{ème}$ coordonnée par $\pi^i(\widehat{y})) \stackrel{déf}{=} y_i$. On note alors

$$K_n^m = \{\widehat{y} \in \widehat{Y} \text{ tel que } \;\forall\, i \leq m\; \pi^i(\widehat{y}) \in K_n\}.$$

D'autre part la définition de l'extension naturelle entraine

$$\begin{aligned}
\widehat{\nu}(K_n^m) &= \nu\left(\pi^m(K_n) \cap \ldots \cap \Psi^{-m}(\pi^0(K_n))\right) \\
&= \mu\left(\Pi^{-1}(\pi^m(K_n)) \cap \ldots \cap \Pi^{-1}(\Psi^{-m}(\pi^0(K_n)))\right) \\
&= \mu\left(\Phi^m\left(\Pi^{-1}(\pi^m(K_n))\right) \cap \ldots \cap \Phi^m\left(\Pi^{-1}(\Psi^{-m}(\pi^0(K_n)))\right)\right)
\end{aligned}$$

par $\Phi$-invariance. De plus pour toute partie $A$ de $Y$ on a $\Psi^{-n}(A) = \Pi \circ \Phi^{-n}\left(\Pi^{-1}(A)\right)$, ce qui prouve que pour tout $k$ entier plus petit que $m$,

$$\Phi^m\left(\Pi^{-1}(\Psi^{-i}(\pi^{m-i}(K_n)))\right) = \Phi^{m-i}\left(\Pi^{-1}(\pi^{m-i}(K_n))\right)$$

et entraine donc que

$$\widehat{\nu}(K_n^m) = \mu\left(\bigcap_{k=0}^{m} \Phi^k\left(\Pi^{-1}(\pi^k(K_n))\right)\right).$$

On note enfin $L_n^m \stackrel{déf}{=} \bigcap_{k=0}^m \Phi^k\left(\Pi^{-1}(\pi^k(K_n))\right)$ ; Nous allons montrer que la suite $(L_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens de $X$ qui décroit vers $\emptyset$. Supposons donc au contraire qu'il existe un $x$ dans l'intersection des $L_n^m$. Ceci entraine que pour tout $k$, $x$ est dans $\Phi^k\left(\Pi^{-1}(\pi^k(K_n))\right)$, et on construit ainsi une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$y_k \in \pi^k(K_n)$ et $\Pi \circ \Phi^k(x) = y_k$. En composant cette dernière égalité par $\Psi$ on vérifie que $\widehat{y} \stackrel{déf}{=} (y_0, y_1, \dots) \in \widehat{Y}$, et par définition des $K_n^m$ on a aussi $\widehat{y} \in K_n$. Alors $x$ appartient à $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Phi^n(X_{y_k})$ qui est par hypothèse vide. On a alors $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} L_n^m = \emptyset$ et donc $\lim_{m \to +\infty} \mu(L_n^m) = 0$. En d'autres termes $\lim_{m \to +\infty} \widehat{\nu}(K_n^m) = 0$, soit $\widehat{\nu}(K_n) = 0$ pour tout entier $n$ et donc $\widehat{\nu}(K) = 0$, ce qui prouve que $\Theta$ est surjective et achève la preuve de la proposition. $\neg$

Nous allons voir que sous certaines conditions, la mesure $\widehat{\nu}$ et la mesure $\nu$ sont conformes.

**Proposition 3.1.2** *Soit $(Y, \Psi, \nu)$ un système dynamique et $(X, \Phi, \mu)$ son extension naturelle et $\Pi$ la projection canonique. On suppose qu'il existe une partition (au sens de la mesure) dénombrable $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $Y$ telle que pour tout $n$,*

$$\Psi(Y_n) = Y.$$

*On suppose que la partition est génératrice, c'est à dire que pour $\nu$-presque tout $y$*

$$\bigvee_{n=0}^{+\infty} \Psi^{-n}\left(Y_n(\Psi^n(y))\right) = \{y\}.$$

*On suppose aussi que chaque fibre de $X$, $X_y \stackrel{déf}{=} \{x \in X, \Pi(x) = y\}$, comporte un nombre dénombrable d'images de fibres par $\Phi$. Alors la partition de $X$ en fibre est mesurable. Si on note $\mu_x$ le système de mesures conditionnelles de $\mu$ associé à la partition en fibre, alors $\nu$ est une mesure conforme de jacobien*

$$\frac{1}{\mu_{\Psi(y)}\left(\Phi(\Pi^{-1}(y))\right)}.$$

*Démonstration* : Comme la partition en fibre est limite d'une suite de partitions dénombrables elle est mesurable. L'unicité du système de mesures conditionnelles montre que la mesure $\mu$ est conforme de jacobien $J(x) = \mu_x\left(\Phi(X_{\Pi(x)})\right)$. En effet si $B$ est un borélien de $X$, alors

$$\mu(\Phi(B)) = \int_Y \mu_y(\Phi(B))\, d\nu(y)$$

où $\mu_y$ désigne la mesure conditionnelle sur la fibre $X_y$. L'unicité du système de mesures conditionnelles montre que l'on a aussi

$$\mu(\Phi(B)) = \int_Y \mu_y(B)\, \mu_{\Psi(y)}(\Phi(\Pi^{-1}(y)))\, d\nu \circ \Psi(y)$$

et l'invariance de $\mu$ montre que

$$\mu(\Phi(B)) = \mu(B) = \int_Y \mu_y(B)\, d\nu(y).$$

Ceci est vrai pour tout borélien $B$, et donc $\nu$ est conforme de Jacobien

$$\frac{1}{\mu_{\Psi(y)}\left(\Phi(\Pi^{-1}(y))\right)}.$$

**Corollaire 3.1.3** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si la mesure $\nu$ est conforme de Jacobien $J$, alors pour $\mu$-presque tout $x$ de $X$,*

$$\mu_x(\Phi(X_{\Pi\circ\Phi^{-1}(x)})) = \frac{1}{J(x)}.$$

## 3.2 Extension inductive

Si on se donne un système dynamique abstrait $(X, \Phi, \mu)$, $\Phi$ étant inversible ; Nous allons voir qu'on peut créer un système induit $(Y, \Psi, \nu)$ en prenant pour $Y$ n'importe quel borélien de $X$ de $\mu$-mesure strictement positive, pour $\Psi$ l'application premier retour dans $Y$ et pour $\nu$ la renormalisation de $\mu$ à $Y$. Dans une seconde partie nous verrons une sorte de réciproque, c'est à dire que nous donnerons une condition sur le système $(Y, \Psi, \nu)$, où $Y$ est un borélien de $X$ et $\Psi$ l'application premier retour, pour qu'il puisse être considéré comme un système induit par $(X, \Phi, \mu)$. De telles idées font partie du "folklore", et on pourra par exemple voir [8].

## 3.3 Système induit

On se donne donc un sytème dynamique abstrait $(X, \Phi, \mu)$, $\Phi$ inversible et $Y$ un borélien de $X$ tel que $\mu(Y) > 0$. On suppose en outre que la mesure $\mu$ est ergodique.

### 3.3.1 Définition du système induit

**Définition 3.3.1** *On définit sur $X$ une application temps de premier retour dans $Y$ par :*

$$r(x) = \begin{cases} \inf\{k \in \mathbb{N}^* \ \Phi^k(x) \in Y\} & \textit{s'il existe et si } x \in Y \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

*On définit ensuite une application "premier retour" dans $Y$ que l'on note $\Psi$ par $\Psi(y) \overset{déf}{=} \Phi^{r(y)}(y)$.*

*Remarque* : il est facile de vérifier que $\Psi$ est mesurable et $\mu$-presque partout inversible.
L'application $r$ assigne à chaque point de $Y$ le temps qu'il lui faut pour revenir dans $Y$ par itération de $\Phi$. Le théorème de Poincaré assure que pour $\mu$-presque tout $y$ dans $Y$ ce temps $r(y)$ est $> 0$. Néanmoins nous avons une estimation supplémentaire.

**Lemme 3.3.2** $\int r \, d\mu = 1$.

*Démonstration* : On commence par restreindre l'ensemble $Y$. Le théorème de Birkhov assure que pour $\mu$-presque tout $y \in Y$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_Y \circ \Phi^k(y) = \mu(Y).$$

On appelle $Y'$ cet ensemble de points. Par ailleur le théorème de Poincaré assure que $\mu$-presque tout point $y$ de $Y$ revient une infinité de fois dans $Y$ par itération de $\Phi$. On note $Y''$ cet ensemble de points. Toujours par ergodicité il existe un ensemble $Y'''$ de $\mu$-mesure pleine dans $Y$ tel que pour tout $y \in Y'''$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r \circ \Phi^k(y) = \int r \, d\mu.$$

On note $Y_1 \overset{déf}{=} Y' \cap Y'' \cap Y'''$. $Y_1$ est un sous-ensemble de $Y$ mesurable et de $\mu$-mesure égale à $\mu(Y)$. On se fixe un $y \in Y_1$, et on construit la suite $\left(r^k(y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$r^0(y) = 0 \quad \text{et} \quad r^{k+1}(y) = r^k(y) + r\left(\Phi^{r^k(y)}(y)\right).$$

Cette suite définie les temps de retours successifs de $y$ dans $Y$ et est bien évidemment strictement croissante. Nous avons alors la première égalité

$$\frac{1}{r^{k+1}(y)} \sum_{p=0}^{r^{k+1}(y)-1} \mathbb{I} \circ \Phi^p(y) \quad = \quad \frac{k+1}{r^{k+1}(y)}. \tag{3.1}$$

En faisant tendre $k$ vers l'infini dans (3.1) on trouve :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{k+1}{r^{k+1}(y)} \quad = \quad \mu(Y).$$

Par ailleurs la relation de récurrence que définie la suite $\left(r^k(y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{r^{k+1}(y)}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^{r^{k+1}(y)-1} r \circ \Phi^p(y)$$

ce qui permet d'avoir la relation :

$$\frac{r^{k+1}(y)}{k+1} \quad = \quad \frac{r^{k+1}(y)}{k+1} \frac{1}{r^{k+1}(y)} \sum_{p=0}^{r^{k+1}(y)-1} r \circ \Phi^p(y). \tag{3.2}$$

Si $k$ tend vers l'infini dans (3.2) on trouve :

$$\frac{1}{\mu(Y)} = \frac{1}{\mu(Y)} \int r \, d\mu$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\neg$

**Définition 3.3.3** *On définit une mesure borélienne de probabilité, $\nu$, sur $Y$ par :*

$$\nu(A) \overset{déf}{=} \frac{\mu(Y \cap A)}{\mu(Y)}$$

*pour tout borélien $A$ de $Y$.*

La transformation $\Psi$ étant une itérée il est raisonnable de penser que la mesure $\mu$ sera encore $\Psi$-invariante. Nous avons en effet le lemme suivant.

**Lemme 3.3.4** *La mesure $\mu$ est $\Psi$-invariante.*

*Démonstration* : On choisit un borélien $A$ de $X$. Puisque $\Psi$ vaut l'identité hors de $Y$ et $\Psi(Y) \subset Y$ on peut supposer que $A$ est dans $Y$. Quitte à retirer à $A$ un ensemble négligeable on suppose que tous ses points reviennent une infinité de fois dans $Y$ par $\Phi$. $A$ est alors la réunion disjointe des $A_k$, parties de $A$ ayant pour temps de retour exactement $k$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mu(\Psi(A)) &= \mu\left(\Psi(\bigcup_{k>0} A_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(\Phi^k(A_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(A_k\right) \\
&= \mu(A). \neg
\end{aligned}$$

### 3.3.2 Propriétés du système induit

Il est naturel d'étudier les propriétés qui se transmettent du système $(X, \Phi, \mu)$ au système $(Y, \Psi, \nu)$. En particulier l'invariance de la mesure par rapport à la transformation, l'ergodicité, ou l'entropie. Nous allons montrer que le système induit hérite certaines propriétés du système global.

**Proposition 3.3.5** *La mesure $\nu$ est $\Psi$-invariante et ergodique.*

*Démonstration* : Montrons d'abord la $\Psi$-invariance. On se fixe un borélien $A$ de $Y$. Comme dans la démonstration du lemme 3.3.4, $A$ se décompose en une réunion disjointes de parties $A_k$ telles que pour tout entier $k$, $\Psi(A_k) = \Phi^k(A_K)$, ce qui prouve alors que $\nu(\Psi(A)) = \nu(A)$. Montrons maintenant que $\nu$ est ergodique. On se fixe alors un borélien $A$ qui est $\Psi$-invariant. Si $\mu(A) = 0$ alors $\nu(A) = 0$. Sinon il existe un $y \in A$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_A \circ \Phi^k(y) = \mu(A).$$

Pour chaque entier $p$, si $\Phi^p(y)$ est dans $Y$ ce point est aussi un $\Psi^j(y)$ et est dans $A$ par invariance de $A$. On se fixe un entier $n$, et on lui associe l'entier $k$ tel que $r^k(y) < n \leq r^{k+1}(y)$. On a alors

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \mathbb{I}_A \circ \Phi^p(y) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{k} \mathbb{I}_A \circ \Psi^p(y) = \frac{k+1}{n}.$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini on trouve $\mu(A) = \mu(Y)$ ce qui entraine bien que $\nu(A) = 1$. ¬
L'entropie d'un système est une notion dynamique. On ne peut donc pas espérer qu'il y aura égalité entre l'entropie du système global et celle du système induit puisqu'on n'itère pas la même application. Néanmoins l'induction ne nous fait pas perdre toute l'information puisque nous avons la proposition suivante.

**Proposition 3.3.6** *L'entropie du sytème* $(X, \Phi, \mu)$, $h_\mu(\Phi)$, *et l'entropie du système induit* $(Y, \Psi, \nu)$, $h_\nu(\Psi)$, *sont reliées par la relation :*

$$h_\mu(\Phi) = \mu(Y) h_\nu(\Psi).$$

*Démonstration* : Elle se fait en deux étapes, en montrant successivement les majorations dans les deux sens.

*Étape 1.* Montrons que $h_\mu(\Phi) \geq \mu(Y) h_\nu(\Psi)$. On se fixe un $\varepsilon$, et on prend une partition $\alpha$ de $Y$ telle que $h_\nu(\Psi, \alpha) \geq h_\nu(\Psi) - \varepsilon$. On construit alors la partition $\beta$ de $X$ de la manière suivante :

$$\beta(x) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in Y \\ X - Y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\alpha^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} \Psi^{-j}\alpha$ et $\beta^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} \Phi^{-j}\beta$. L'ergodicité de la mesure $\nu$ et le théorème de Brin-Katok permettent de prouver que pour tout $y$ dans un ensemble $Y' \subset Y$ de $\nu$-mesure pleine on a :

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} \log \nu(\alpha^n(y)) = h_\nu(\Psi, \alpha).$$

On se fixe alors un $y$ dans $Y'$.
A tout $n$ on associe l'entier $k$ tel que $r^k(y) < n \leq r^{k+1}(y)$. Il est clair que $\beta^n(y) \subset \alpha^{k+1}(y)$ ce qui entraine que

$$\frac{-1}{n} \log \mu(\beta^n(y)) \geq \frac{-1}{n} \log \nu(\alpha^{k+1}(y)) + \frac{1}{n} \log \mu(Y).$$

Si on passe à la limite inférieure cette expression devient

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} \log \mu(\beta^n(y)) \geq \mu(Y) \left(h_\nu(\Psi) - \varepsilon\right).$$

Comme $\mu(Y') > 0$, $\bigcup_{j=0}^{+\infty} \Phi^j(Y')$ est $\Phi$-invariant et de mesure pleine. Si $y$ est dans cet ensemble il existe un entier $k$ tel que $\Phi^k(y) \in Y'$ et $\beta^{n+k}(y) \subset \Phi^{-k}\left(\beta(\Phi^k(y))\right)$. Par conséquent pour tout $y \in \bigcup_{j=0}^{+\infty} \Phi^j(Y')$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} \log \mu(\beta^n(y)) \geq \mu(Y) \left(h_\nu(\Psi) - \varepsilon\right).$$

L'ensemble $\bigcup_{j=0}^{+\infty} \Phi^j(Y')$ étant de mesure pleine, l'inégalité précédente signifie que : $h_\mu(\Phi, \beta) \geq \mu(Y)\,(h_\nu(\Psi) - \varepsilon)$, donc $h_\mu(\Phi) \geq \mu(Y)\,(h_\nu(\Psi))$.

*Étape 2.* Montrons que $h_\mu(\Phi) \leq \mu(Y) h_\nu(\Psi)$. On se fixe un $\varepsilon$, et un choisit une partition $\alpha$ de $X$ telle que $h_\mu(\Phi, \alpha) \geq h_\mu(\Phi) - \varepsilon$. On note $Y'$ l'ensemble des points de $Y$ qui reviennnent une infinité de fois dans $Y$ par $\Phi$. Si $\alpha$ ne raffine pas la partition $(Y', Y - Y', X - Y)$ on l'intersecte avec cette dernière, ce qui donne une partition d'entropie supérieure ; on peut donc supposer que $\alpha$ raffine $(Y', Y - Y', X - Y)$. On construit alors une fonction ensembliste, $\beta$, sur $Y$ de la manière suivante :

$$\beta(x) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \alpha^{r(y)}(y) & \text{si } y \in Y' \\ Y - Y' & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\beta$ est une partition de $Y$. On prend deux points $x$ et $y$ dans $Y$ tels que $\beta(x) \cap \beta(y) \neq \emptyset$ et nous allons considérer tous les cas possibles :

- $1^{er}$ cas : $r(x) = r(y) = 0$. Alors $\beta(x) = \beta(y) = Y - Y'$.
- $2^{ème}$ cas : $r(x) > 0$ et $r(y) = 0$. Alors $\beta(y) = Y - Y'$ et $\beta(x) = \alpha^{r(x)}(x)$. Comme $\alpha$ raffine $(Y', Y - Y', X - Y)$ on ne peut pas avoir ce cas.
- $3^{ème}$ cas : $r(x) > r(y) > 0$. Si $z \in \beta(x) \cap \beta(y)$ on doit avoir $\Phi^{r(y)}(z) \in Y$ puisque $\alpha$ raffine $(Y', Y - Y', X - Y)$, et parallèlement on doit avoir $\Phi^{r(y)}(z) \in X - Y$ pour la même raison. Ce cas est également impossible
- $4^{ème}$ cas : $r(x) = r(y) > 0$. Comme $\alpha$ est une partition $\alpha^{r(x)}$ en est une aussi et donc $\beta(x) = \beta(y)$.

Tous les cas ayant été traités (ou leur symétrique), on a bien prouvé que $\beta$ est une partition de $Y$. Nous allons maintenant estimer son entropie. On choisit un $y$ dans $Y'$ et un entier $k$, alors $\beta^k(y) = \alpha^{r^{k+1}(y)}(y)$. Si $y$ est pris dans le sous-ensemble de $Y'$ de $\nu$-mesure pleine tel que $\liminf \frac{-1}{n} \log \mu(\alpha^n(y)) = h_\mu(\Phi, \alpha)$, on trouve $h_\nu(\Psi, \beta) \geq \frac{1}{\mu(Y)}\,(h_\mu(\Phi, \alpha))$ ce qui achève la preuve de la proposition. $\neg$

## 3.4 Une réciproque

Nous souhaitons maintenant voir comment on peut "remonter" d'un système induit au système global : Si $(X, \Phi)$ est un système dynamique donné, avec $\Phi$ inversible, et si $(Y, \Psi)$ est un sytème induit par le premier, c'est à dire $Y$ est un borélien de $X$ et l'application $\Psi$ est l'application premier retour de $\Phi$, alors connaissant une mesure $\Psi$-invariante et ergodique $\nu$ sur $(Y, \Psi)$, peut-on trouver une mesure $\Phi$-invariante sur $X$, $\mu$, telle que le système dynamique $(Y, \Psi, \nu)$ soit le système induit par $(X, \Phi, \mu)$ ? Nous allons voir que sous une hypothèse simple sur l'application temps de retour on peut répondre à la question.

**Proposition 3.4.1** *Soit $(Y, \Psi, \nu)$ un sytème dynamique avec $\nu$ une mesure de probabilité $\Psi$-invariante et ergodique. On suppose que le système vérifie les propriétés suivantes*

*(i)* $Y \subset X$

*(ii)* $\Psi$ *est* $\nu$*-presque partout l'application premier retour dans* $Y$ *par itération d'une application inversible* $\Phi$ *sur* $X$

*(iii)* $\int r\,d\nu < +\infty$.

*Alors le système* $(Y, \Psi, \nu)$ *est le système induit par* $(X, \Phi, \mu)$*, où* $\mu$ *est une mesure de probabilité* $\Phi$*-invariante et ergodique.*

*Démonstration* : Dans la suite on notera $l \overset{déf}{=} \frac{1}{\int r\,d\nu}$. Nous allons construire une fonction réelle sur les boréliens de $X$. Pour tout borélien $A$ de $X$ et pour tout entier $k$ on note

$$A_k \overset{déf}{=} \{y \in A \text{ tel que } \ \Phi^{-k}(y) \in Y \ \text{ et } \ \forall j < k,\ \Phi^{-j}(y) \notin Y\}.$$

avec la convention $A_0 \overset{déf}{=} A \cap Y$. On définit alors l'application $\mu$ par :

$$\mu(A) \overset{déf}{=} l.\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k)\right)\right).$$

Nous allons voir que $\mu$ est une mesure de probabilité $\Phi$-invariante et ergodique.

Pour prouver que $\mu$ est une mesure, il suffit de montrer qu'elle vérifie les axiomes définissant les mesures.

– La définition de $X_k$ montre que $\Phi^{-k}(X_k)$ correspond exactement à l'ensemble des points de $Y$ ayant un temps de retour supérieur à $k$. Si on note

$$Y(k) = \{y \in \ Y \ \text{ tel que } \ r(y) \geq k\}$$

pour tout $k > 0$ et $Y(0) \overset{déf}{=} Y$, on a alors l'égalité

$$\mu(X) = l.\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \nu\left(Y(k)\right)\right)$$

Comme l'application temps de retour est à valeurs entières un calcul classique montre que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \nu\left(Y(k)\right) = \int_0^{+\infty} \nu\left(\{y \in \ Y \ ,\ r(y) \geq \lambda\}\right) d\lambda = \int r\,d\nu \overset{déf}{=} \frac{1}{l}.$$

Ceci montre que $\mu(X) = 1$.

– Si $A$ et $B$ sont deux boréliens disjoints de $X$ alors on doit avoir $(A \bigcup B)_k = A_k \bigsqcup B_k$, et donc $\Phi^{-k}\left((A \bigcup B)_k\right) = \Phi^{-k}\left(A_k\right) \bigsqcup \Phi^{-k}\left(B_k\right)$, ainsi $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

– On choisit une suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens qu'on suppose décroissante d'intersection vide. Si on se fixe un $\varepsilon$, il existe un rang $k_0$ tel que

$$\sum_{k\geq k_0} \nu\left(\Phi^{-k}(A^1_k)\right) < \frac{\varepsilon}{3l}.$$

De plus par décroissance de la suite, il existe un rang $N$ tel que

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k^n)\right) < \frac{\varepsilon}{3l}$$

pour tout $n \geq N$. Si on prend $n \geq N$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mu(A^n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k^n)\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k^n)\right) + \sum_{k \geq k_0} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k^1)\right) \\
\text{soit } \mu(A^n) &< \frac{2\varepsilon}{3l}.
\end{aligned}$$

$\mu$ vérifie bien les trois axiomes qui définissent une mesure de probabilité ce qui achève la première partie de la démonstration. Il nous reste maintenant à voir que $\mu$ est $\Phi$-invariante et ergodique.

On prend alors un borélien $A$ de $X$, et on note $B \stackrel{déf}{=} \Phi^{-1}(A)$. Pour tout entier $k$ les points de $B_k$ sont exactement les points de $B$ pour lesquels il faut itérer $k$ fois $\Phi^{-1}$ pour qu'ils soient dans $Y$. Ces points sont donc ceux de $\Phi^{-1}(A_{k+1})$ et l'image par $\Phi^{-1}$ des points de $A \cap Y$ qui ont un temps de retour égale à $k+1$ par itération de $\Phi^{-1}$ (on remarquera d'ailleur que la $\Psi$-invariance de $\nu$ entraine que $\nu$-presque tout point de $Y$ revient dans $Y$ par itération de $\Phi^{-1}$). On notera $A_{0,k}$ ce dernier ensemble de points. Comme $\Phi$ est bijective $B_k = \Phi^{-1}(A_{k+1}) \bigsqcup A_{0,k}$, et on a alors $\nu\left(\Phi^{-k}(B_k)\right) = \nu\left(\Phi^{-k-1}(A_{k+1})\right) + \nu\left(\Phi^{-k}(A_{0,k})\right)$. Si on somme sur $k$ on trouve

$$\mu(B) = l.\sum_{k=1}^{+\infty} \nu\left(\Phi^{-k}(A_k)\right) + l.\nu(A_0) = \mu(A).$$

Montrons que $\mu$ est ergodique. On choisit un borélien $A$ tel que $A = \Phi^{-1}(A)$. en reprenant les notations précédentes nous allons considérer deux cas :

Si $\nu(A \cap Y) = 0$, alors pour tout entier $k > 0$, $A_k = \Phi^{-1}(A_{k+1})$ et donc $\mu(A_k) = \mu(A_{k+1})$, par $\Phi$-invariance de $\mu$. Ceci force à avoir $\mu(A_k)$ nul pour tout $k$ puisque $A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Si $\nu(A \cap Y) > 0$, alors de l'égalité $A_k = \Phi^{-1}(A_{k+1}) \bigsqcup A_{0,k}$ on tire :

$$A_k = \bigsqcup_{j \geq k} \Phi^{k-j}(A_{0,j})$$

l'égalité ayant lieu $\mu$-presque partout, ce qui donne que $\mu(A) = l.\int r\, d\nu = 1$ et achève la preuve de la proposition 3.4.1. $\neg$

*Remarque* : Il est facile de vérifier que pour toute fonction mesurable $g$ sur $X$ on aura

$$\int \sum_{k=0}^{r(y)-1} g \circ \Phi^k(y)\, d\nu(y) = \frac{1}{l} \int g\, d\mu.$$

# Chapitre 4

# Mesures d'équilibre pour le sous-système $(F, g_F)$

## 4.1 Présentation du système

### 4.1.1 Le sous-système $(F, g_F)$

Le théorème de Poincaré assure que l'ensemble des points de $R$ qui reviennent une infinité de fois dans $R$ par l'application $f$ est non vide. On définit alors deux sous-ensembles dans $R$, $R_1$ et $R_\infty$,le premier désignant l'ensemble des points de $R$ qui reviennent au moins une fois dans $R$ par itération de $f$, le second représentant l'ensemble des points qui reviennent une infinité de fois. Nous allons définir une application, $g$, reliée à $f$ et un nouveau système $(R, g)$. On définit d'une manière plus générale, l'ensemble $R_n$ des points qui reviennent au moins $n$ fois dans $R$ par itération de $f$.

**Définition 4.1.1** *On définit sur $R$ une application dite application temps de premier retour par :*

$$r(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin R_1 \\ k_0 & si\ k_0 = \inf\{k \in \mathbb{N}\ tq\ f^k(x) \in R\} < +\infty. \end{cases}$$

*On définit alors l'application $g$ sur $R$ par :*

$$\begin{array}{rccl} g: & R & \longrightarrow & R \\ & x & \longmapsto & g(x) \overset{déf}{=} f^{r(x)}(x). \end{array}$$

Si $x$ est dans $R_n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la famille $(r^k(x))_{k \leq n}$ par la récurrence

$$\begin{cases} r^1(x) = r(x), \\ r^{k+1}(x) = r^k(x) + r(f^{r^k(x)}(x)). \end{cases}$$

C'est la famille des $n$ temps de retours de $x$.

Enfin on s'intéresse aux feuilles instables pour définir le système que nous étudierons :

**Définition 4.1.2** *On appelle feuille instable (resp. stable) de $R$ tout ensemble $W^u(x, R)$ (resp. $W^s(x, R)$) où $x \in R$.*

Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 4.1.3** *Toute feuille instable de $R$ est compacte.*

*Démonstration* : Si $\varepsilon$ est tel que $diam(\mathcal{R}) < \varepsilon$, on a :

$$F = W^u(x, R) = R \cap W^u_{loc}(x, 2\varepsilon).$$

où $W^u_{loc}(x, 2\varepsilon) \overset{déf}{=} \{y \in \Omega \ tq \ d(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) \leq 2\varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Ceci s'écrit aussi :

$$W^u_{loc}(x, 2\varepsilon) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(\overline{B(f^{-k}(x), 2\varepsilon)}).$$

$W^u_{loc}(x, 2\varepsilon)$ est un compact de $\Omega$, comme intersection de parties compactes, $R$ est compact comme fermé de $\Omega$ qui est compact ; $F$ est bien une partie compacte de $\Omega$.
$\neg$

Dans toute la suite on se fixe $F$ une feuille instable de $R \setminus \partial^u R$. L'holonomie stable de $R$ sur $F$ sera notée $\pi_F$. On rappelle que $\pi_F$ est définie par $\pi_F(x) = [x, x_F]$, où $x_F$ est n'importe quel point de $F$. On définit une transformation $g_F$ pour avoir un système $(F, g_F)$.

**Définition 4.1.4** *On définit sur $F$ l'application $g_F$ par :*

$$\begin{array}{rccl} g_F : & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & g_F(x) \overset{déf}{=} \pi_F \circ g(x). \end{array}$$

On appellera aussi $F_n$ et $F_\infty$ les ensembles $R_n \cap F$ et $R_\infty \cap F$, ainsi que $\partial F = \partial R \cap F$.

**Définition 4.1.5** *On appelle point générique de $F$, tout point $x \in F_\infty$ tel que pour tout $n$, $g^n_F(x) \notin \partial F$. On notera $\mathcal{F}$ cet ensemble.*

*Remarque* Si $x$ est générique, et si $y \in W^s(x, R)$, alors $y \in R_\infty$ et pour tout $n$, $g^n(x) \notin \partial R$.

### 4.1.2 Partition d'une feuille en cylindres

La propriété de Markov du rectangle $R$ implique une propriété du même type pour les branches inverses de $g_F$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$ de la manière suivante. Deux points $x$ et $y$ dans $\mathcal{F}$ sont en relation, $x \sim y$, si et seulement si $g(x) \in W^u(g(y), R)$. Comme $F \not\subset \partial^u R$, $g(x)$ est dans $int(R)$, et $\{x, y\} \subset f^{-r(x)} W^u(g(x), R) \subset F$ si $x \sim y$. La propriété de Markov assure alors que $r(x) = r(y)$ et $f^{-r(x)} W^u(g(x), R) = f^{-r(y)} W^u(g(y), R)$.

**Définition 4.1.6** *On appellera cylindre d'ordre $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de $F$, tout ensemble du type $f^{-r^n(x)}W^u(f^{r^n(x)}(x), R)$, avec $x \in \mathcal{F}$.*

*Remarque* : Par compacité, $f^{-n}(R) \cap F$ ne définit qu'un nombre fini de cylindres, et donc l'ensemble des cylindres d'ordre fixé $p$ est au plus dénombrable.

Certains points ne sont dans aucuns cylindres, ou dans un nombre fini de cylindres. Il s'agit des points qui ne reviennent qu'un nombre fini de fois dans $R$ par itération de $f$, et on notera $H$ leur ensemble. Par ailleurs, un point peut revenir dans $R$, mais être juste dans son bord topologique $\partial R$. Ceci entraine que des points peuvent être dans plusieurs cylindres d'un même ordre. Nous noterons $G$ leur ensemble. On remarquera que si $x$ est dans $G$, alors nécessairement il existe $n$ tel que $f^n(x) \in \partial R$.

Les cylindres sont *grosso-modo* les images par les branches inverses de $g_F$. Toutefois, à cause des ensembles $H$ et $G$, $g_F^n$ n'envoie pas réellement un cylindre d'ordre $n$ exactement sur $F$. Une part du travail consiste alors à montrer que pour des bonnes mesures, ces deux ensembles seront négligeables. On commence donc par préciser le vocabulaire.

**Définition 4.1.7** *Si $C_n$ est un cylindre d'ordre $n$, on appelle $p$-ième temps de retour du cylindre, le $p$-ième temps de retour commun à tout point de $C_n \setminus G$ ($p \leq n$).*

Chaque cylindre d'ordre 1 a comme image par une itérée convenable de $f$ une feuille instable toute entière du rectangle $R$. Nous définissons alors les préimages d'ordre 1 de la manière suivante :

**Définition 4.1.8** *Soit $x$ un point de $F$. Nous dirons que le point $y$ est une préimage de $x$ par $g_F$ si :*

*(i) $y \in F_1$,*

*(ii) Il existe un cylindre, $C$, d'ordre 1 de $F$, qui contient $y$, de temps de premier retour $k(C)$, tel que $\pi_F \circ f^{k(C)}(y) = x$.*

*Nous noterons $Ant(x)$ l'ensemble des préimages du point $x$, et $Ant(k, x)$ le sous-ensemble de $Ant(x)$ formé des préimages pour lesquelles le cylindre associé a un temps de retour égal à $k$.*

*Si $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les préimages d'ordre $k$ du point $x$,et on note leur ensemble $Ant_k(x)$, par la relation de récurrence*

$$Ant_k(x) \overset{déf}{=} Ant(Ant_{k-1}(x)).$$

*Remarque* : On remarquera que pour tout entier $k$ de $\mathbb{N}^*$, les antécédents d'ordre $k$ de $x$ sont des points des cylindres d'ordre $k$ de $F$.

La propriété de mélange topologique de $f$ montre directement le résultat suivant.

**Lemme 4.1.9** *Pour tout $x$ dans $F$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Ant_n(x)$ est dense dans $F$.*

### 4.1.3 Définition d'une métrique adaptée à $(F, g_F)$

**Métrique sur $F$**

La décomposition de $F$ en cylindre a un sens vis à vis de la dynamique. Deux points d'un même cylindre sont (sauf sur les bords) toujours ensemble, soit hors de $R$ soit dans $R$. Ceci signifie, que du point de vue de la dynamique, deux points dans deux cylindres différents et de même ordre sont "loin". Ainsi la métrique canonique sur $F$, héritée de la métrique adaptée sur la variété $M$, n'écarte pas assez les points, puisque deux points éloignés d'un point de vue dynamique peuvent être géométriquement proches. Cette situation nous conduit à définir une quasi-métrique sur $F$ fonction non pas de la taille du cylindre qui contiendra les deux points dont on veut évaluer la distance mais du temps qu'il faut pour que ces deux points soient à une distance (au sens premier du terme) suffisament grande. Afin de garder un meilleur contrôle sur les estimées (aussi bien en itérant positivement que négativement) nous nous intéresserons en fait au demi-temps de "dépassement" d'une constante d'expansivité.

**Définition 4.1.10** *Si $x$ et $y$ sont deux points d'une même feuille instable de $R$ on appelle $n(x, y)$ le plus grand entier positif tel que :*

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon \qquad \forall k \leq n(x, y).$$

*Un tel entier existe nécessairement, car $y \in W^u_{loc}(x)$ et $\varepsilon$ est une constante d'expansivité. On note alors $N(x, y) = [\frac{1}{2}n(x, y)] + 1$, où $[\,.\,]$ désigne la fonction partie entière.*

*Remarque* : Si $\lambda' \overset{déf}{=} \|D_f\|$ alors :

$$\frac{1}{2}\big(\frac{1}{\log \lambda'} \log(\frac{\varepsilon}{d(x, y)}) - 1\big) \leq N(x, y) \leq \frac{1}{2}\big(\frac{1}{\log \lambda} \log(\frac{\varepsilon}{d(x, y)}) - 1\big).$$

Nous allons montrer que notre "demi-temps de dépassement" de la constante $\varepsilon$ varie peut en fonction de l'holonomie stable ; ceci nous permettra ensuite de comparer ces deux temps pour les couples $(g(x), g(y))$ et $(g_F(x), g_F(y))$.

**Lemme 4.1.11** *Il existe un entier $p$ tel que pour tout $x$ et $y$ de $F$, pour tout $x'$ et $y'$ tels que $x' \in W^s(x, R)$, $y' \in W^s(y, R)$ et $x' \in W^u(y', R)$ alors :*

$$N(x, y) - p \leq N(x', y') \leq N(x, y) + p.$$

*Démonstration* : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^p(x'), f^p(y')) < \varepsilon$ et $d(f^{p+1}(x'), f^{p+1}(y')) > \varepsilon$. La propriété de contraction le long des feuilles stables locales montre que nécessairement $d(f^p(x), f^p(x')) < \varepsilon$ et $d(f^p(y), f^p(y')) < \varepsilon$, ce qui entraine $d(f^p(x), f^p(y')) < 2\varepsilon$. La propriété $\gamma$-höldérienne de l'application $[.,.]$ $(4\varepsilon < \rho)$, montre que

$$(d(f^p(y'), f^p(x')))^{\frac{1}{\gamma}} \leq d(f^p(y), f^p(x)) \leq (d(f^p(y'), f^p(x')))^{\gamma}.$$

Par hypothèse $d(f^p(y'), f^p(x')) > \varepsilon/\lambda'$, avec $\lambda' = |||df|||$, puisque $p = n(x', y')$, et il suffit d'avoir $\lambda^q(\varepsilon/\lambda')^{\frac{1}{\gamma}} > \varepsilon$ pour avoir $d(f^{p+q}(x), f^{p+q}(y)) > \varepsilon$. Ainsi

$$n(x,y) \leq n(x',y') + \frac{(\gamma-1)\log\varepsilon + \log\lambda'}{\gamma\log\lambda},$$

ce qui donne une première majoration. La seconde s'obtient en inversant les rôles des couples $(x', y')$ et $(x, y)$. $\neg$

Nous définissons alors une pseudo-métrique sur $F$ de la manière suivante.

**Définition 4.1.12** *Si $x$ et $y$ sont deux points de $F$ on définit*

$$\eta(x,y) \stackrel{déf}{=} \frac{1}{\lambda^{\alpha\gamma N(x,y)}}.$$

*Remarque* : On remarquera qu'il existe une constante universelle, $C$, telle que pour tout couple de points $(x, y)$ dans $F$ on ait

$$d^{\alpha\gamma}(x,y) \leq C\eta(x,y).$$

### L'espace des fonctions $C^0_\eta(F)$

Nous allons dans cette partie introduire l'espace des fonctions continues sur $F$ qui ont pour module de continuité la fonction $\eta$. Nous montrerons ensuite que muni d'une bonne norme cet espace est un Banach.

**Définition 4.1.13** *On note $C^0_\eta(F)$ l'ensemble des fonctions continues sur $F$ à valeur dans $\mathbb{C}$ telles que :*

$$C_\phi \stackrel{déf}{=} \sup_{\substack{x,y\\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{\eta(x,y)} < +\infty.$$

*On munit cet ensemble d'une application $\|\,.\,\|_\eta \;:\; C^0_\eta(F) \to \mathbb{R}^+$ telle que $\phi \mapsto C_\phi + \|\phi\|_\infty$.*

**Proposition 4.1.14** $\left(C^0_\eta(F), \|\,.\,\|_\eta\right)$ *est un espace de Banach.*

*Démonstration* : Il est facile de vérifier que l'application $\|\,.\,\|_\eta$ est une norme sur $C^0_\eta(F)$. Montrons que $C^0_\eta(F)$ est complet pour cette norme. On considère $(\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|_\eta$. Elle est alors de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, et comme $\left(C^0(F), \|\,.\,\|_\infty\right)$ est complet, la suite converge vers $\phi$ pour $\|\,.\,\|_\infty$. Par ailleurs $(\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour $\|\,.\,\|_\eta$ et est donc bornée pour cette norme :

$$\exists C \in \mathbb{R}^*_+ \ \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}\ C_{\phi_n} + \|\phi_n\|_\infty \leq C.$$

Si on fixe un $\xi$ petit on trouve un $N_\xi$ tel que pour tout $n \geq N_\xi$ on ait $C_{\phi_n} \leq C - \|\phi\|_\infty + \xi$. Ceci entraine que pour tout couple de points de $F$ $x$ et $y$ on aura :

$$|\phi(x)-\phi(y)| \leq 2\xi + |\phi_n(x)-\phi_n(y)| \leq 2\xi + (C - \|\phi\|_\infty + \xi)\eta(x,y)$$

pour tout $n \geq N_\xi$. Si $\xi$ tend vers 0 on trouve que $\|\phi\|_\eta \leq C$ et donc $\phi \in C^0_\eta(F)$. $\neg$

## 4.2 Un opérateur de Perron-Frobenius

### 4.2.1 Insensibilisation du potentiel par rapport aux fibres

Notre but est de montrer que le système $(F, g_F)$ peut être vu comme un sous-système de $(\Omega, f)$. En particulier nous allons définir un formalisme thermodynamique sur le système $(F, g_F)$ lié à celui de $(\Omega, f)$. Il faut alors tenir compte des perturbations introduites par le fait que nous itérons l'application $g_F$ et non pas $f$.

En particulier, un problème essentiel est que l'application $g_F$ est définie de manière artificielle sur les points de $H$, et n'est pas nécessairement continue sur les cylindres, à cause notament des points de $G$.

Nous allons préciser notre potentiel. On définit une fonction $\mathcal{B}'$ sur $F \setminus (H \cup G)$ par

$$\mathcal{B}'(x) \stackrel{déf}{=} \sum_{k=0}^{r(x)-1} \mathcal{A} \circ f^k(x).$$

De la même manière nous définissons la fonction $\omega$ sur $R \setminus \pi_F^{-1}(H \cup G)$ par

$$\omega(x) \stackrel{déf}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^{k+r(x)}(x) - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^{r(x)}(x).$$

On vérifiera que la série est bien convergente puisque $\mathcal{A}$ est höldérienne.

Le nouveau potentiel est alors

$$\mathcal{B}(x) \stackrel{déf}{=} \mathcal{B}'(x) + \omega(x).$$

Nous verrons plus loin que cette définition du potentiel, $\mathcal{B}$, qui dépend du choix de la feuille $F$, entraine que deux potentiels $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ définis par deux feuilles $F_1$ et $F_2$ sont cohomologues pour la transformation $g$. Le terme $\mathcal{B}'$ exprime alors, le fait que nous itérons $g$ et non pas $f$, le terme $\omega$ exprime la dérive conséquente à l'itération de $g_F$ et non pas de $g$. Le bord de $R$, $\partial R$ est un fermé d'intérieur vide, et le théorème de Baire assure que $G$ est d'intérieur vide dans $F$. Nous pouvons alors définir les fonctions $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sur $F \setminus H$ et $\omega$ sur $R \setminus \pi_F^{-1}(H)$ par continuité, à condition de prendre en compte dans quel cylindre on considère le point de $G$. Nous noterons donc $\mathcal{B}'(x, C_i)$, $\mathcal{B}(x, \pi_F^{-1}(C_i))$ et $\omega(x, C_i)$, qui désigneront les valeurs limites de ces fonctions lorsqu'on fait tendre un point $y$ du cylindre d'ordre 1 $C_i$ vers le point de $G$, $x$. Il faudra alors non plus noter $r(x)$ mais plutot $r(C_i)$, temps de retour du cylindre. Toujours pour des raisons de continuité, si $H^0$ désigne les points de $H$ qui ne reviennent pas dans $R$, on peut en fait définir les trois fonctions sur $F \setminus H^0$ ou $R \setminus \pi_F^{-1}(H^0)$.

Ce problème de définition des fonctions $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ et $\omega$ n'est en fait qu'artificiel, car chaque branche inverse de $g_F$ définit un unique cylindre d'ordre 1, dans lequel les deux fonctions, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, sont parfaitement définies, et tel que $\omega$ soit parfaitement défini sur l'image récirpoque par $\pi_F$ de ce cylindre. De plus la propriété de dilatation le long des feuilles instables entraine un bon contrôle des variations de ces fonctions sur les cylindres d'ordre 1.

**Lemme 4.2.1** *Si $x$ et $y$ sont deux points de $F$, si $x'$ et $y'$ sont deux antécédents respectifs de $x$ et $y$ d'un même cylindre d'ordre 1, $C_i$, et si $x''$ et $y''$ sont deux points de $R$ tels que $x'' \in W^u(y'', R)$, $\pi_F(x'') = x'$, et $\pi_F(y'') = y'$, alors il existe $C$ constante universelle telle que :*

$$|\omega(x'', \pi_F^{-1}(C_i)) - \omega(y'', \pi_F^{-1}(C_i))| \leq C\eta(x, y).$$

*Démonstration* : On note $r$ le temps de premier retour du cylindre $C_i$ et $N = N(x, y)$. La différence des deux $\omega$ est la différence entre deux series. On coupe cette expression en quatre parties, et on va montrer que chaque partie est majorée (en valeur absolue) par un terme en $C\eta(x, y)$.

$$\begin{aligned}\omega(x'', \pi_F^{-1}(C_i)) - \omega(y'', \pi_F^{-1}(C_i)) &= \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'') \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(x') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(y') \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(x') \\ &\quad - \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(y')\end{aligned} \tag{4.1}$$

*Majoration du premier terme.*
Le premier terme de droite est en module majoré par $\sum_{k=0}^{N} |\mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'')|$. Le lemme 4.1.11 permet d'écrire :

$$N(f^r(x''), f^r(y'')) \stackrel{\text{déf}}{=} N' \geq N - p$$

où $p \in \mathbb{N}$, et est indépendant du choix des points. On majore alors le terme par

$$\sum_{k=0}^{N'+p} |\mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'')|.$$

On coupe encore cette somme en deux parties. Celle pour $k \leq N'$ et le reste. Du fait que $\mathcal{A}$ est $\alpha$-höldérienne et de la dilatation sur une feuille instable on trouve :

$$\sum_{k=0}^{N'} |\mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'')| \leq C_{\mathcal{A}} \sum_{k=0}^{N'} \frac{(d(f^{N'+r}(x''), f^{N'+r}(y'')))^\alpha}{\lambda^{\alpha(N'-k)}}.$$

Par ailleurs on a $d(f^{N'+r}(x''), f^{N'+r}(y'')) \leq \frac{C}{\lambda^{N'}}$ puisque $2N' \approx n(f^r(x''), f^r(y''))$. Enfin le terme en $\frac{C}{\lambda^{N'}}$ est lui-même majoré par un terme en $\frac{C}{\lambda^{N}}$, toujours par le lemme 4.1.11. Ces trois estimations mises ensemble montrent qu'il existe une constante universelle, $C$, telle que

$$\sum_{k=0}^{N'} |\mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'')| \leq C\eta(x, y).$$

D'autre part on sait qu'on peut majorer $d(f(z_1), f(z_2))$ par $Cd(z_1, z_2)$ en prenant pour $C = |||df|||$. On majore ainsi la seconde partie de notre première expression par :

$$\sum_{k=N'+1}^{N'+p} |\mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'')| \leq C(d(f^{N'+r}(x''), f^{N'+r}(y'')))^{\alpha}$$

et on procède comme ci-dessus.
On trouve alors :

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^{k+r}(y'') \right| \leq C\eta(x, y)$$

où $C$ est une constante universelle.
*Majoration du deuxième terme.*
Il suffit de procéder comme pour le premier terme sauf qu'il n'est plus nécessaire de comparer $N'$ et $N$ puisqu'on se trouve aux points $x$ et $y$. On majore alors la somme des modules grâce à la propriété Hölder de $\mathcal{A}$, puis par dilatation on obtient une suite géométrique multipliée par $(d(f^N(x), f^N(y)))^{\alpha}$. On a encore $2N \approx n(x, y)$, ce qui permet de conclure :

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(x') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(y') \right| \leq C\eta(x, y)$$

où $C$ est une constante universelle.
*Majoration du troisième terme.*
Pour majorer ce terme on majore une fois encore le module de la somme par la somme des modules, puis on utilise toujours la propriété Hölder de $\mathcal{A}$ et la contraction le long des feuilles stables. Ceci permet facilement d'avoir :

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(x'') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(x') \right| \leq C(d(f^{N+r}(x''), f^N(x)))^{\alpha}.$$

Ce dernier majorant est plus petit que $\frac{Cste}{\lambda^{\alpha N}}$, par contraction le long des feuilles stables et donc on trouve bien :

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^{k+r}(x') - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F \circ f^r(x'') \right| \leq C\eta(x, y)$$

où $C$ est une constante universelle.
*Majoration du quatrième terme.*
C'est comme pour le troisième $x''$ et $y''$ jouant le même rôle.
Finalement le lemme est démontré. $\neg$

*Remarque* : On remarquera que pour tout $x$ et pour tout cylindre d'ordre 1 contenant $x$, $C_1$, on a $|\omega(x, \pi_F^{-1}(C_1))| \leq Cdiam(R)$ en utilisant la contraction le long des feuilles stables.

Si $x$ est un point de $F_n \setminus G$, $S_n(\mathcal{B})(x)$ désignera le terme $\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}(g_F^k(x), C_i^k)$, avec $C_i^k$ le rectangle d'ordre 1 où se trouve $g_F^k(x)$. Par extension, si $x \in F_n \cap G$, et si $x \in C_n$, cylindre d'ordre $n$, $S_n(\mathcal{B})(x)$ désignera la même expression dans laquelle on a remplacé le terme $g_F^k(x)$ par $\pi_F \circ f^{r^k(C_n)}(x)$, où $r^k(C_n)$ est le $k$-ième temps de retours de $C_n$.

**Lemme 4.2.2** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x$ et $y$ deux points de $F$. Alors il existe une constante universelle, $C$, telle que pour tout couple $(x', y') \in Ant_n(x) \times Ant_n(y)$ tel que $x'$ et $y'$ soient dans le même cylindre d'ordre $n$,*

$$|S_n(\mathcal{B})(x') - S_n(\mathcal{B})(y')| \leq C\eta(x, y).$$

*Démonstration* : On se fixe donc $n \in \mathbb{N}$ et $x$ et $y$ deux points de $F$. On choisit ensuite $x' \in Ant_n(x)$ et $y' \in Ant_n(y)$ tels que ni la $g_F$-orbite de $x'$ ni celle de $y'$ ne soit à aucun moment dans $G$. On notera alors $\mathcal{B}(g_F^k(x'))$ sans préciser le cylindre puisque celui-ci est unique pour tout $k$.
Dans un premier temps nous allons montrer par récurrence que :

$$S_n(\mathcal{B})(x') = \sum_{k=0}^{r^n(x')-1} \mathcal{A} \circ f^k(x') + \omega(g^{n-1}(x'))$$

Pour $n = 1$ c'est la définition de $\mathcal{B}$. Supposons que la propriété soit vraie pour $n - 1$ et montrons la pour $n$.

$$S_n(\mathcal{B})(x') \stackrel{\text{déf}}{=} S_{n-1}(\mathcal{B})(x') + \mathcal{B}(g_F^{n-1}(x')).$$

L'hypothèse de récurrence s'écrit

$$S_{n-1}(\mathcal{B})(x') = \sum_{k=0}^{r^{n-1}(x')-1} \mathcal{A} \circ f^k(x') + \omega(g^{n-2}(x')),$$

et par définition

$$\mathcal{B}(g_F^{n-1}(x')) = \sum_{k=0}^{r(g_F^{n-1}(x'))-1} \mathcal{A} \circ f^k(g_F^{n-1}(x')) + \omega(g_F^{n-1}(x')).$$

Les temps de retour sont constants le long des feuilles stables, et les deux séries qui définissent $\omega(g^{n-2}(x'))$ et $\omega(g_F^{n-1}(x'))$ convergent. Le calcul donne

$$\begin{aligned}
\omega(g^{n-2}(x')) + \omega(g_F^{n-1}(x')) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{A}\circ f^k \circ g^{n-1}(x') - \mathcal{A}\circ f^k \circ g_F^{n-1}(x') \\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{A}\circ f^{k+r} \circ g_F^{n-1}(x') - \mathcal{A}\circ f^k \circ g_F^{n}(x') \\
&= \sum_{k=0}^{r(g_F^{n-1}(x'))-1} \mathcal{A}\circ f^k \circ g^{n-1}(x') - \mathcal{A}\circ f^k \circ g_F^{n-1}(x') \\
&\quad + \sum_{k\geq r(g_F^{n-1}(x'))} \mathcal{A}\circ f^k \circ g^{n-1}(x') - \mathcal{A}\circ f^k \circ g_F^{n}(x')
\end{aligned}$$

On remarque que le dernier terme est $\omega(g^{n-1}(x'))$. Si on réinjecte la dernière égalité dans $S_n(\mathcal{B})(x')$ on trouve finalement

$$S_n(\mathcal{B})(x') = \sum_{k=0}^{r^n(x')-1} \mathcal{A}\circ f^k(x') + \omega(g^{n-1}(x')).$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme.

$$\begin{aligned}
|S_n(\mathcal{B})(x') - S_n(\mathcal{B})(y')| &\leq \sum_{k=0}^{r^n(x')-1} |\mathcal{A}\circ f^k(x') - \mathcal{A}\circ f^k(y')| \\
&\quad + |\omega(g^{n-1}(x')) - \omega(g^{n-1}(y'))|.
\end{aligned}$$

Le lemme 4.2.1 montre que

$$|\omega(g^{n-1}(x')) - \omega(g^{n-1}(y'))| \leq C\eta(x,y)$$

où $C$ est une constante universelle. Le terme $\sum_{k=0}^{r^n(x')-1} |\mathcal{A}\circ f^k(x') - \mathcal{A}\circ f^k(y')|$ se majore en utilisant toujours la propriété höldérienne de $\mathcal{A}$ et le fait que $x'$ et $y'$ restent dans la même feuille instable locale pendant un temps $r^n(x')$. On trouve alors $C$ telle que

$$\sum_{k=0}^{r^n(x')-1} |\mathcal{A}\circ f^k(x') - \mathcal{A}\circ f^k(y')| \leq C(d(x,y))^{\alpha\gamma}.$$

En utilisant la propriété höldérienne de l'holonomie. Ceci montre qu'on peut trouver une constante $C$ telle que

$$\sum_{k=0}^{r^n(x')-1} |\mathcal{A}\circ f^k(x') - \mathcal{A}\circ f^k(y')| \leq C\,\eta(x,y).$$

Le lemme est prouvé dans le cas simple. Si $x$ ou $y$ est tel qu'un des $x'$ ou $y'$ soit à un moment dans plusieurs cylindres du même ordre alors on procède par continuité. $\neg$

### 4.2.2 L'opérateur de Perron-Frobenius

**Définition de l'opérateur**

Si on se fixe un paramètre réel $S$, nous définissons une application $\mathcal{B}_S$ sur $F \setminus (H \cup G)$ par

$$\mathcal{B}_S(x) \stackrel{déf}{=} \mathcal{B}(x) - S\, r(x).$$

Comme précédemment nous étendons cette fonction sur $F_1$, en lui donnant plusieurs valeurs en un point $x$ de $G$, valeurs qui seront dépendantes des différents cylindres d'ordre 1 qui contiennent $x$. Nous noterons alors

$$\mathcal{B}_S(x, C_i) \stackrel{déf}{=} \mathcal{B}(x, C_i) - S\, r.$$

où $r$ désigne le temps de retour du cylindre $C_i$.

**Définition 4.2.3** *Pour $S \in \mathbb{R}$ on définit l'opérateur $\mathcal{L}_S$ sur $C^0(F)$ par :*

$$\begin{array}{lllllll} \mathcal{L}_S & \phi \in C^0(F) & \longmapsto & \mathcal{L}_S(\phi) & F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & x & \longmapsto & \mathcal{L}_S(\phi)(x) \stackrel{déf}{=} \displaystyle\sum_{y \in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(y, C_y)} \phi(y). \end{array}$$

Les deux lemmes 4.2.1 et 4.2.2 de continuité de $\omega$ et $\mathcal{B}$ montrent que si la série

$$\mathcal{L}(\mathbb{1}_F)(x) \stackrel{déf}{=} \sum_{y \in Ant(x)} e^{\mathcal{B}(y, C_y) - r(C_y)\, S}$$

converge pour le point $x$, alors elle converge pour tout $x'$ de $F$ et pour tout $S' \geq S$. On dira alors simplement que la série $\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)$ converge. $(\mathcal{L}_S)_S$ définit une famille d'opérateurs, famille qui dépend d'un paramètre $S$. On précise maintenant le domaine où ce paramètre prend ses valeurs.

**Définition 4.2.4** *On appellera seuil de convergence de l'opérateur $\mathcal{L}_S$, et on le notera $S_s$, le plus petit élément $S_s$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que :*

$$\forall\, S > S_s \;\forall\, x \in F \quad \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) < +\infty.$$

**Etude du seuil de convergence**

On se fixe un $x$ dans $F$ et $S \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}(\mathbb{1}_F)(x)$ converge. Nous allons montrer que nécessairement $S_s \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.
$\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x)$ s'écrit $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y \in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y, C_y)}\right) e^{-n\, S}$, et il faut donc estimer le rayon de convergence de cette série entière. Si $y$ et $y'$ sont dans $Ant(n, x)$, ils doivent être $(\varepsilon, n)$-séparés (il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $d(f^k(y), f^k(y')) > \varepsilon$), car $\varepsilon$ est une constante d'expansivité, $y' \in W^u_{loc}(y)$, et $f^n(y') \in W^s_{loc}(f^n(y))$. Ainsi

$\sum_{y\in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y,C_y)}$ est plus petit que $e^C \sum_{y\in E_n} e^{S_n(\mathcal{A})(y)}$, où $E_n$ est un réseau $(\varepsilon, n)$-séparé maximal. Ceci montre que

$$\limsup_{n\in\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{y\in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y,C_y)}\right) \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}},$$

et le critère de convergence de Cauchy implique que $S_s \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.
*Remarque* : Nous verrons par la suite que pour $S = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ il y a convergence de la série.

**Invariance de** $(C^0(F), \| \|_\infty)$

*Remarque* : A partir de maintenant nous supposerons que $S > S_s$. On notera $M_S \stackrel{déf}{=} \sup_{x\in F} |\mathcal{L}_S(\mathbb{1})(x)|$.

**Proposition 4.2.5** *$\mathcal{L}_S$ est un opérateur continu de $(C^0(F), \| \|_\infty)$ dans lui-même.*

*Démonstration* : On prend $\varphi$ dans $C^0(F)$. On fixe $\delta > 0$ et on trouve $\rho'$ tel que $d(x,y) < \rho' \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \delta$. Par contraction le long des feuilles instables (lorsqu'on itère négativement) si $d(x,y) < \rho'$ et si $x'$ et $y'$ sont deux éléments de $Ant(x)$ et $Ant(y)$ d'un même cylindre d'ordre 1, alors $d(x', y') < \rho'$. On a alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_S(\varphi)(x) - \mathcal{L}_S(\varphi)(y)| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{x'\in Ant(k,x)\\ y'\in Ant(k,y)}} |e^{\mathcal{B}_S(x')}\varphi(x') - e^{\mathcal{B}_S(y')}\varphi(y')| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{x'\in Ant(k,x)\\ y'\in Ant(k,y)}} e^{\mathcal{B}_S(x')}|\varphi(x') - \varphi(y')| \\ &\quad + \|\varphi\|_\infty \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{x'\in Ant(k,x)\\ y'\in Ant(k,y)}} |e^{\mathcal{B}_S(x')} - e^{\mathcal{B}_S(y')}| \end{aligned}$$

Etudions donc ce dernier majorant. La continuité de $\varphi$ assure que le premier terme de droite est plus petit que $M_S\,\delta$ puisque $0 \leq \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) \leq M_S$. Le second est majoré par $M_S\,\|\varphi\|_\infty\,|e^{C\,\eta(x,y)} - 1|$ où $C$ est une constante universelle. Enfin $\lim_{y\to x} \eta(x,y) = 0$ , ce qui montre bien que $\mathcal{L}_S(\varphi) \in C^0(F)$.
Par ailleurs une simple majoration montre que $\|\mathcal{L}_S(\varphi)\|_\infty \leq M_S \|\varphi\|_\infty$. ¬

### 4.2.3 Opérateur adjoint, mesure de Gibbs

L'opérateur $\mathcal{L}_S$ est un opérateur sur les fonctions continues à support compact dans $F$. Il admet donc un opérateur adjoint, noté $\mathcal{L}_S^*$, qui agit sur les mesures de probabilité sur $F$, dont l'ensemble est noté $\mathcal{M}_F$. Cet opérateur adjoint est défini par :

$$\mathcal{L}_S^*(\mu).\varphi \stackrel{déf}{=} \int \mathcal{L}_S(\varphi)d\mu.$$

Nous allons montrer l'existence d'une mesure vecteur propre de cet opérateur adjoint. Cette mesure sera appelée mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$. Son unicité sera prouvée plus tard. Nous verrons dans cette partie que la mesure de Gibbs ne charge pas les points de $H$, et ultérieurement nous verrons qu'elle ne charge pas non plus $G$.

**Proposition 4.2.6** *Il existe une mesure de probabilité notée $\mu_S$ et un scalaire $\lambda_S \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :*

$$\mathcal{L}_S^*(\mu_S) = \lambda_S\, \mu_S.$$

*Démonstration* : $\mathcal{M}_F$ est un convexe compact pour la topologie faible. Il est de plus non vide car la mesure riemannienne renormalisée sur $F$ y appartient. On définit un nouvel opérateur sur $\mathcal{M}_F$ noté $\widetilde{\mathcal{L}}_S^*$ par :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_S^*\, \mu \mapsto \frac{1}{\int \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)d\mu}\mathcal{L}_S^*(\mu).$$

Le théorème de Schauder-Tychonoff montre que cet opérateur admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe une mesure notée $\mu_s$ telle que $\mathcal{L}_S^*(\mu_S) = \left(\int \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)\, d\mu_s\right).\mu_S$. Si on pose $\lambda_S = \int \mathcal{L}_S(\mathbb{1})d\mu_S$ on a

$$\mathcal{L}_S^*(\mu_S) = \lambda_S\, .\mu_S. \neg$$

**Définition 4.2.7** *Toute mesure de $\mathcal{M}_F$ point fixe de $\widetilde{\mathcal{L}}_S^*$ sera appelée mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$.*

**Proposition 4.2.8** *Soit $\mu_S$ une mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$. Alors $\mu_S(H) = 0$.*

*Démonstration* : Fixons $n \in \mathbb{N}$, et notons $H^n$ l'ensemble des points qui ne reviennent que $n$ fois dans $R$ par itération de $f$. Il est évident que $H = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^n$. Nous allons montrer que $\mu_S(H^n) = 0$.
Choisissons un compact $K_n$ dans $H^n$. Choisissons $\delta > 0$. La série $\sum_{y\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)}$ converge pour tout $x$ dans $F$ et

$$\sup_{x\in F} \sum_{y\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} \leq e^C \sum_{y\in Ant_n(x_0)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)}$$

où $x_0$ est n'importe quel point de $F$ et $C$ est une constante universelle. Si $x \in F$ la série $\sum_{y\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)}$ s'écrit aussi $\sum_{k=n}^{+\infty} \sum_{\substack{y\in Ant_n(x)\\ r^n(y)=k}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)}$ où $r^n(y)$ désigne le $n^{ième}$ temps de retour du cylindre d'ordre $n$ pris en compte. Cette série converge pour tout $x$ et il existe un $N$ indépendant de $x$ tel que :

$$\forall\ x, \qquad \sum_{k=N}^{+\infty} \sum_{\substack{y \in Ant_n(x) \\ r^n(y)=k}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} < \delta.$$

Il n'y a qu'un nombre fini de cylindres d'ordre $n$ ayant un temps de retour inférieur à $N$, chaque cylindre étant compact, leur réunion est compacte et sera notée $F_\delta^n$. Nous allons montrer, en utilisant l'opérateur $\mathcal{L}_S^*$ et le fait que $\mu_S$ est vecteur propre de cet opérateur, que $F_\delta$ est de mesure grande, et obtenir ainsi une majoration de la mesure de $K_n$. Par construction $F_\delta^n \cap K_n = \emptyset$. Il existe alors un $\rho' > 0$ tel que $d(F_\delta^n, K_n) > \rho'$. On note alors $U_\delta = \{y \in F,\ d(y, K_n) < \frac{\rho'}{2}\}$. $U_\delta$ est un ouvert dans lequel on construit une fonction "plateau" continue, valant 1 sur $K_n$, 0 hors de $U_\delta$, positive et majorée par 1 comme dans le lemme d'Urysohn (voir [23]). On la note $\varphi_{\delta,n}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mu_S(K_n) &\leq \int \varphi_{\delta,n} d\mu_S \\ &\leq \frac{1}{\lambda_S^n} \int \mathcal{L}_S^n(\varphi_{\delta,n}) d\mu_S \end{aligned}$$

Par ailleurs $\mathcal{L}_S^n(\varphi_{\delta,n})(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \sum_{\substack{y \in Ant_n(x) \\ r^n(y)=k}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} \varphi_{\delta,n}(y)$ ce qui signifie que pour tout $x$ dans $F$ $\mathcal{L}_S^n(\varphi_{\delta,n})(x) \leq \sum_{k=N}^{+\infty} \sum_{\substack{y \in Ant_n(x) \\ r^n(y)=k}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} \leq \delta$. Ceci ré-injecté dans la série d'inégalites précédentes montre que $\mu_S(K_n) \leq \delta/\lambda_S^n$ pour tout $\delta > 0$. La régularité de $\mu_S$ impose à $\mu(H^n)$ d'être nul. $H$ est réunion dénombrable d'ensembles négligeables et est donc de mesure nulle. $\neg$

## 4.3 Définition des mesures quasi-Gibbs invariantes

### 4.3.1 Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu

Nous allons démontrer que l'opérateur $\mathcal{L}_S$ admet un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_S$. Pour ce faire nous allons utiliser le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, sans en donner une démonstration complète. Nous verrons juste quelques lemmes qui servent à le démontrer et qui nous seront utiles plus tard. Des démonstrations complètes pourront être vues dans [13] ou [6].

**Théorème 4.3.1** *Soient $(\mathcal{V}, \|\ \|_\mathcal{V})$ et $(\mathcal{U}, \|\ \|_\mathcal{U})$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$ tels que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. On suppose en outre que :*

*(i) Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{V}$ convergente dans $(\mathcal{U}, \|\ \|_\mathcal{U})$ vers une fonction $\varphi$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\|\varphi_n\|_\mathcal{V} \leq C$ alors $\varphi \in \mathcal{V}$ et $\|\varphi\|_\mathcal{V} \leq C$*

*et $\Phi$ est un opérateur de $\mathcal{U}$ dans lui-même tel que :*

*(ii)* $\Phi$ *laisse* $\mathcal{V}$ *stable et est borné pour* $\| \, \|_{\mathcal{V}}$ *;*
*(iii)* $\sup_n\{\|\Phi^n(\varphi)\|_{\mathcal{U}} \, , \varphi \in \mathcal{V} \, \|\varphi\|_{\mathcal{U}} \leq 1\} \leq M < \infty$ *;*
*(iv) Il existe un entier* $n_0$ *et deux constantes* $0 < a < 1$ *et* $0 \leq b < +\infty$ *tels que pour tout* $\varphi \in \mathcal{V}$ *on ait* $\|\Phi^{n_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq a\|\varphi\|_{\mathcal{V}} + b\|\varphi\|_{\mathcal{U}}$ *;*
*(v) Si* $\mathcal{X}$ *est une partie bornée de* $(\mathcal{V}, \| \, \|_{\mathcal{V}})$ *alors* $\Phi^{n_0}(\mathcal{X})$ *est une partie relativement compacte dans* $(\mathcal{U}, \| \, \|_{\mathcal{U}})$.

*Alors* $\Phi$ *n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 :* $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ *et* $\Phi$ *s'écrit* $\Phi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i \; + \Psi$*, où les* $\Phi_i$ *sont des opérateurs linéaires bornés de* $\mathcal{V}$ *dans* $\Phi(\mathcal{V})$*, chaque* $\Phi(\mathcal{V})$ *étant de dimension finie et contenus dans* $\mathcal{V}$*, et où* $\Psi$ *est un opérateur linéaire borné de rayon spectral* $\rho(\Psi) < 1$ *dans* $(\mathcal{V}, \| \, \|_{\mathcal{V}})$.
*De plus on a les relations suivantes :* $\Phi_i.\Phi_j = \Phi_j.\Phi_i = 0$ *pour tout* $i \neq j$*,* $\Phi_i.\Phi_i = \Phi_i$ *pour tout* $i$*, et* $\Phi_i.\Psi = \Psi.\Phi_i = 0$ *pour tout* $i$*.*

*Remarque* : On aura en particulier pour tout $n$ $\Phi^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \Phi_i \; + \Psi^n$.
Montrons maintenant quelques lemmes conséquents aux hypothèses du théorème.

**Lemme 4.3.2** *Il existe* $L \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $\varphi \in \mathcal{V}$ *on ait* $\|\Phi^{mn_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq a^m\|(\varphi)\|_{\mathcal{V}} + L\|(\varphi)\|_{\mathcal{U}}$.

*Démonstration* : Soit $m \in \mathbb{N}$. on a simplement $\|\Phi^{mn_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq a\|\Phi^{(m-1)n_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} + b\|\Phi^{(m-1)n_0}(\varphi)\|_{\mathcal{U}}$. L'hypothèse $(iii)$ permet d'écrire que :

$$\|\Phi^{mn_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq a\|\Phi^{(m-1)n_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} + b\, M\|(\varphi)\|_{\mathcal{U}}$$

ce qui donne aussi :

$$\|\Phi^{mn_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} - \frac{b\, M}{1-a}\|(\varphi)\|_{\mathcal{U}} \leq a \left( \|\Phi^{(m-1)n_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} - \frac{b\, M}{1-a}\|(\varphi)\|_{\mathcal{U}} \right).$$

Une récurrence immédiate assure que si on pose $L = \frac{b\, M}{1-a}$ on a :

$$\|\Phi^{mn_0}(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq a^m\|(\varphi)\|_{\mathcal{V}} + L\|(\varphi)\|_{\mathcal{U}}. \neg$$

**Lemme 4.3.3** *Les normes* $(\|\Phi^m\|_{\mathcal{V}})_m$ *sont uniformément bornées.*

*Démonstration* : Le lemme 4.3.2 montre que $\|\Phi^{mn_0}\|_{\mathcal{V}} \leq a^m \; + L$. L'hypothèse $(ii)$ assure que $\Phi$ est borné pour $\| \, \|_{\mathcal{V}}$, et donc $(\|\Phi^k)\|_{\mathcal{V}})_{k \leq m}$ est uniformément bornée. Comme $0 < a < 1$ et en effectuant une division euclidienne de $n$ par $n_0$ on montre que la famille $(\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée. $\neg$

**Lemme 4.3.4** *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{V}$ *il existe* $\overline{\varphi} \in \mathcal{V}$ *tel que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^{k+n_0}(\varphi) - \overline{\varphi}\|_{\mathcal{U}} = 0.$$

*Démonstration* : Le lemme 4.3.3 entraine que toutes les $\|\Phi^n\|_{\mathcal{V}}$ sont uniformément bornées par une constante $C$. Ainsi $\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k(\varphi)\|_{\mathcal{V}} \leq C$ et donc $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k(\varphi)\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie bornée de $\mathcal{V}$ qui est transformée par $\Phi^{n_0}$ en une partie relativement compacte de $\mathcal{U}$. On peut donc tirer de cette partie relativement compacte une sous-suite convergente vers $\overline{\varphi}$ dans $\mathcal{U}$. Si $(n_p)_p$ est une telle sous-suite on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{1}{n_p}\sum_{k=0}^{n_p-1}\Phi^{k+n_0}(\varphi)\right) &= \frac{1}{n_p}\sum_{k=0}^{n_p-1}\Phi^{k+n_0}(\varphi)\\ &\quad + \frac{1}{n_p}\left(\Phi^{n_p+n_0}(\varphi) - \Phi^{n_0}(\varphi)\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Phi(\overline{\varphi}) = \overline{\varphi}$. Si $m \in \mathbb{N}$ on voit alors que $\frac{1}{m\,n_p}\sum_{k=0}^{m\,n_p-1}\Phi^{k+n_0}(\varphi)$ vaut $\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\Phi^k\big(\frac{1}{n_p}\sum_{j=0}^{n_p-1}\Phi^{j+n_0}(\varphi)\big)$. Un argument de division euclidienne dans les entiers permet alors de conclure en disant qu'en fait il y a convergence de la suite $\big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi^k(\varphi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\overline{\varphi}$ dans $\mathcal{U}$.
De plus la propriété $(i)$ et le lemme 4.3.3 nous permettent d'affirmer que $\overline{\varphi}$ est dans $\mathcal{V}$. $\neg$

### 4.3.2 Vérification des hypothèses pour $\widetilde{\mathcal{L}}_S$

Nous allons montrer que l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}_S$ défini par $\frac{1}{\lambda_S}\mathcal{L}_S$ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu. Le "petit" espace sera $(C^0_\eta(F), \|\ \|_\eta)$ et le "gros" sera $(C^0(F), \|\ \|_\infty)$.
*Vérification de (i)* : On prend $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C^0_\eta(F)$. On suppose qu'elle converge vers $\varphi$ dans $(C^0(F), \|\ \|_\infty)$ et qu'il existe $C$ telle que pour tout $n$, $\|\varphi_n\|_\eta \leq C$. On se fixe $\delta > 0$ et $N$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq \delta$$

Si $x$ et $y$ sont deux points de $F$ et $n$ un entier plus grand que $N$, alors

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq 2\,\delta + |\varphi_n(x) - \varphi(y)_n|\\ &\leq 2\,\delta + (C - \|\varphi_n\|_\infty)\eta(x,y)\\ &\leq 2\,\delta + (C - \|\varphi\|_\infty + \delta)\eta(x,y)\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\varphi \in C^0_\eta(F)$ ainsi que $\|\varphi\|_\eta \leq C$.

*Vérification de (ii) et (iv)* : On prend $\varphi \in C^0_\eta(F)$ et on notera $C_\varphi = \sup_{x\neq y}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\eta(x,y)}$. On choisit aussi deux points distincts de $F$, $x$ et $y$ et $n$ un entier. Par soucis de simplification on ne notera pas $\mathcal{B}_S(x, C_i)$ en fonction des cylindres d'ordre 1, mais simplement $\mathcal{B}_S(x)$, la valeur étant évidemment fonction aussi du cylindre. On trouve donc :

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{L}_S}^n(\varphi)(x) - \widetilde{\mathcal{L}_S}^n(\varphi)(y)| &\leq \frac{1}{\lambda_S^n} \sum_{\substack{x' \in Ant_n(x) \\ y' \in Ant_n(y)}} |e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}\varphi(x') - e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y')}\varphi(y')| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_S^n} \sum_{\substack{x' \in Ant_n(x) \\ y' \in Ant_n(y)}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}|\varphi(x') - \varphi(y')| \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_S^n}\|\varphi\|_\infty \sum_{\substack{x' \in Ant_n(x) \\ y' \in Ant_n(y)}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y')}|e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x') - S_n(\mathcal{B}_S)(y')} - 1| \\
&\leq \frac{C_\varphi}{\lambda_S^n} \sum_{\substack{x' \in Ant_n(x) \\ y' \in Ant_n(y)}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}\eta(x', y') \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_S^n}\|\varphi\|_\infty \sum_{\substack{x' \in Ant_n(x) \\ y' \in Ant_n(y)}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y')}|e^{C_\mathcal{B}\eta(x,y)} - 1|
\end{aligned}
$$

Le lemme 4.1.11 montre que $N(x', y') \approx N(x, y) + \frac{r^n}{2}$ avec $r^n(x')$ le $n^{ième}$ temps de retour du cylindre d'ordre $n$ contenant $x'$ et $y'$. On a alors $\eta(x', y') \leq \frac{C}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2}r^n(x')}}\eta(x, y)$ où $C$ est une constante universelle. De plus il existe une constante universelle $C$ telle que $|e^{C_\mathcal{B}\eta(x,y)} - 1| \leq C\eta(x, y)$
Nous venons donc de voir que

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{L}_S}^n(\varphi)(x) - \widetilde{\mathcal{L}_S}^n(\varphi)(y)| &\leq C_\varphi\, \eta(x, y)\Big(\frac{C}{\lambda_S^n} \sum_{x' \in Ant_n(x)} \frac{e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2}r^n(x')}}\Big) \\
&\quad + \eta(x, y)\|\varphi\|_\infty \left(\frac{C}{\lambda_S^n} \sum_{y' \in Ant_n(y)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y')}\right). \quad (4.2)
\end{aligned}
$$

Pour $n = 1$ et en majorant les deux séries par $M_S$ l'inégalité (4.2) montre que $\widetilde{\mathcal{L}_S}(\varphi) \in C^0_\eta(F)$. Ceci prouve donc une partie de $(ii)$. De plus l'inégalité (4.2) montre qu'il existe deux constantes $K$ et $K'$, ne dépendant que de $\varepsilon$ et $\mathcal{A}$, telles que pour toute fonction $\varphi$ de $C^0_\eta(F)$ on ait

$$\|\widehat{\mathcal{L}}_S(\varphi)\|_\eta \leq M\,\|\varphi\|_\infty + (K\,C_\varphi + K'\|\varphi\|_\infty)\,,$$

ce qui montre bien que $\widehat{\mathcal{L}}_S$ est borné pour la norme $\|\ \|_\eta$.
Pour montrer $(iv)$ il faut faire encore quelques calculs. Par hypothèse sur $\mu_S$ on a l'égalité : $\lambda_S^n = \int \mathcal{L}_S^n(\mathbb{1}_F)d\mu_S = \int \sum_{x' \in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}d\mu_S$. Le lemme 4.2.2 et la majoration de $\eta$ nous assurent que :

$$\lambda_S^n \geq \sum_{x' \in Ant_n(x)} e^{S_n\widetilde{(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})}e^{-C}$$

où $C_{x'}$ est le cylindre d'ordre $n$ qui contient $x'$, $\widetilde{S_n(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})$ la valeur maximum de $S_n(\mathcal{B}_S)$ sur ce cylindre et où $C$ est une constante universelle qui majore $C_{\mathcal{B}}\,\eta(x,y) \geq |S_n(\mathcal{B}_S)(x') - \widetilde{S_n(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})|$. Ainsi les deux séries $\sum_{x'\in Ant_n(x)} e^{\widetilde{S_n(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})}$ et $\sum_{x'\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}$ convergent et,

$$\frac{C}{\lambda_S^n} \sum_{x'\in Ant_n(x)} \frac{e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2} r^n(x')}} \leq \frac{\displaystyle\sum_{x'\in Ant_n(x)} C\, e^C \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2} r^n(x')}} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}}{\displaystyle\sum_{x'\in Ant_n(x)} e^{\widetilde{S_n(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})}} \tag{4.3}$$

Il est clair que pour tout $x' \in Ant_n(x)$, $e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')} \leq e^{\widetilde{S_n(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})}$.
Puisque $r^n(x') \geq n$ pour tout $x' \in Ant_n(x)$, on aura $C\, e^C \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2} r^n(x')}} < 1$ pour tout $x' \in Ant_n(x)$ si $n$ est suffisament grand. Fixons un $n_0$ tel que $C\, e^C \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2} n_0}} < 1$, notons

$$a(x) \stackrel{déf}{=} \frac{\displaystyle\sum_{x'\in Ant_{n_0}(x)} C\, e^C \frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha\gamma}{2} r^{n_0}(x')}} e^{S_{n_0}(\mathcal{B}_S)(x')}}{\displaystyle\sum_{x'\in Ant_{n_0}(x)} e^{\widetilde{S_{n_0}(\mathcal{B}_S)}(C_{x'})}}$$

et $b = C\, M^{n_0} + 1$. Si on pose $a \stackrel{déf}{=} \sup_{x\in F} a(x)$, alors $a < 1$, et on aura :

$$|\widetilde{\mathcal{L}_S}^{n_0}(\varphi)(x) - \widetilde{\mathcal{L}_S}^{n_0}(\varphi)(y)| \leq aC_\varphi\, \eta(x,y) + (b-1)\|\varphi\|_\infty \eta(x,y).$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout couple $(x,y)$ et donc pour tout $\varphi \in C^0_\eta(F)$ on a :

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_S^{n_0}(\varphi)\|_\eta \leq a\|\varphi\|_\eta + b\|\varphi\|_\infty.$$

*Vérification de (iii)* : Nous allons d'abord démontrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)\|_\infty < \infty$. On prend un $x$ dans $F$ ; pour tout $y$ de $F$, les lemmes 4.2.1, 4.2.2 et la continuité et majoration de $\eta$ assurent qu'il existe $C$ constante universelle telle que :

$$\sum_{x'\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}\, e^{-C} \leq \sum_{y'\in Ant_n(y)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y')} \leq \sum_{x'\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x')}\, e^C.$$

En particulier $\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)(x) \leq e^C \int \widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)(y) d\mu_S(y)$, ce qui prouve que $\|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)\|_\infty \leq e^C < \infty$, et donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)\|_\infty < \infty$.
Si $\varphi \in C^0_\eta(F)$ et $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, alors pour tout entier $n$ on a :

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\varphi)\|_\infty \leq \|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)\|_\infty$$

et donc $(iii)$ est prouvé.

*Vérification de (v)* : C'est une utilisation simple du théorème d'Ascoli.

### 4.3.3 Conséquences du théorème

Dans toute cette section, on se fixe une mesure de Gibbs , $\mu_S$, associée au potentiel $\mathcal{B}_S$.

#### Décomposition de l'opérateur

Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu montre que $\widetilde{\mathcal{L}}_S$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1. Nous pouvons préciser ce résultat.

**Proposition 4.3.5** *Il existe une fonction $h \in C^0_\eta(F)$ strictement positive de $\mu_S$-intégrale égale à 1 et telle que $\mathcal{L}_S(h) = \lambda_S\, h$.*

*Démonstration* : Le lemme 4.3.4 montre qu'il existe une fonction $h \in C^0_\eta(F)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\mathcal{L}}_S^{k+n_0}(\mathbb{1}_F) - h\|_\infty = 0$. Il est clair que $\widetilde{\mathcal{L}}_S(h) = h$. Reste à voir que $h$ est strictement positive et d'intégrale égale à 1. Si $k \in \mathbb{N}$ on a l'égalité $\frac{1}{\lambda_S^k}\int \mathcal{L}_S^k(\mathbb{1}_F)d\mu_S = 1$ ; d'autre part l'hypothèse $(iii)$ du théorème montre que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{1}_F)\|_\infty < e^C < \infty$, et nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour justifier l'existence de $\int h\, d\mu_S$ et avoir l'égalité $\int h\, d\mu_S = 1$. Si maintenant on suppose que $h(x_0) = 0$ alors $\mathcal{L}_S(h)(x_0) = 0$ ce qui entraine que $h(x') = 0$ pour tout $x' \in Ant(x_0)$. Par récurrence on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x' \in Ant_n(x_0)$, $h(x') = 0$. Le mélange de $f$ montre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Ant_n(x_0)$ est dense dans $F$ et comme $h$ y est nulle et est continue, $h \equiv 0$. Ceci est en contradiction avec la condition $\int h\, d\mu_S = 1$. $\neg$

#### Propriété supplémentaire de la mesure de Gibbs

Nous allons prouver que $\mu_S$ ne charge pas les points qui sont dans plusieurs cylindres du même ordre. Cela permettra en particulier de considérer que pour la mesure les cylindres forment une partition de $F_1$ ou de $F$ puisque nous savons que $\mu_S$ ne charge pas $H$.

**Proposition 4.3.6** *$\mu_S$ ne charge ni $\partial F$ ni $Ant_n(\partial F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

*Démonstration* : Nous allons dans un premier temps montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la mesure de l'ensemble $D_n^\circ \overset{déf}{=} Ant_n(\partial F) \cap int(F)$ est nulle. L'ensemble $Ant_n(\partial F)$ est constitué des bords des cylindres d'ordres $n$, et donc $D_n^\circ$ est l'intersection des bords des cylindres d'ordre $n$ avec l'intérieur de la feuille $F$.

Supposons que $\mu_S$ charge cet ensemble. Comme $D_n^\circ \subset int(F)$, les antécédents de $D_n^\circ$ sont les bords des cylindres d'ordre $n+1$ qui sont dans l'intérieur de $F$ et qui ne sont pas des bords de cylindres d'ordre $n$. Par récurrence on montre que les antécédents d'ordre $k$, où $k \in \mathbb{N}^*$, forment un ensemble inclus dans les bords des cylindres d'ordre $k+n$ qui sont dans l'intérieur de $F$ et qui ne sont pas des bords de cylindres d'ordre $k+n-1$. Il apparaît donc que la famille des $(Ant_k(D_n^\circ))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'ensembles disjoints de points de $F$.

Nous allons montrer maintenant que pour tout $k$, la mesure de $Ant_k(D_n^\circ)$ est contrôlée par la mesure de $D_n^\circ$. On se fixe $\delta > 0$, et on considère l'ensemble $D_n^\delta$ des points de $D_n^\circ$ qui sont à une distance strictement supérieure à $\delta$ de $\partial F$. On considère alors une fonction plateau, $\varphi_\delta$, continue, positive, majorée par 1, valant 1 sur $D_n^\delta$ et nulle sur $\partial F$. Comme $\varphi_\delta$ est nulle sur le bord, on peut construire une fonction globalement continue sur $F$, $\psi_\delta$, telle que $\varphi_\delta \circ g_F^k = \psi_\delta$. On utilise alors la propriété d'invariance de $\mu_S$ par $\widetilde{\mathcal{L}}_S$, ce qui s'écrit :

$$\int \psi_\delta \, d\mu_S = \int \widetilde{\mathcal{L}}_S^k(\psi_\delta)\, d\mu_S = \int \varphi_\delta . \widetilde{\mathcal{L}}_S^k(\mathbb{1}_F)\, d\mu_S.$$

Si on fait décroître la fonction $\varphi_\delta$ vers la fonction $\mathbb{1}_{D_n^\delta}$ on trouve en utilisant le théorème de convergence monotone de Lebesgue :

$$\mu_S(Ant_k(D_n^\delta)) = \int \mathbb{1}_{D_n^\delta} . \widetilde{\mathcal{L}}_S^k(\mathbb{1}_F)\, d\mu_S$$

ce qui permet d'avoir

$$\mu_S(Ant_k(D_n^\circ)) = \int \mathbb{1}_{D_n^\circ} . \widetilde{\mathcal{L}}_S^k(\mathbb{1}_F)\, d\mu_S$$

en faisant décroître $\delta$ vers 0 (on utilise encore la convergence monotone).
Nous allons montrer que $\mu_S(D_n^\circ) = 0$. Notons $D_n^\infty \overset{déf}{=} \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Ant_k(D_n^\circ)$. comme ce sont des ensembles deux à deux disjoints nous pouvons écrire :

$$\mu_S(D_n^\infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_S^k} \int \mathbb{1}_{D_n^\circ}(x) \mathcal{L}_S^k(\mathbb{1}_F)(x) d\mu_S.$$

Par positivité de l'opérateur on peut inverser la somme et l'opérateur intégrale, ce qui donne finalement :

$$\mu_S(D_n^\infty) = \int \mathbb{1}_{D_n^\circ}(x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_S^k} \mathcal{L}_S^k(\mathbb{1}_F)(x) d\mu_S.$$

Nous avons vu que $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_S^k}\mathcal{L}_S^k(\mathbb{1}_F)$ converge uniformément vers $h$ sur $F$ et $h$ est une fonction strictement positive. Par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que si $m$ est suffisament grand alors $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_S^k}\mathcal{L}_S^k(\mathbb{1}_F) > m\,\delta$. On en déduit que :

$$\mu_S(\bigsqcup_{k=1}^{m-1} Ant_k(D_n^\circ)) \geq m\,\delta\,\mu_S(D_n^\circ)$$

avec comme contrainte $\mu_S(D_n^\infty) \leq 1$. Nécessairement on doit avoir $\mu_S(D_n^\circ) = 0$.
Prouvons maintenant que la mesure du bord de $F$ est nulle. On choisit un point de $int(F)$ qui est dans $F_\infty$. On construit un petit ouvert autour du point qui reste dans

l'intérieur de $F$. Par mélange de l'application $f$, il existe un cylindre dont l'ordre sera noté $n$ inclus dans l'ouvert. On notera ce cylindre $C_n$. Prenons une fonction plateau, continue, positive, majorée par 1, et valant 1 sur le bord de $C_n$, $\partial C_n$. Notons la $\varphi$. L'invariance de $\mu_S$ donne :

$$\begin{aligned}\int \varphi\, d\mu_S &= \int \widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\varphi)\, d\mu_S \\ &= \int \sum_{y\in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y,C_y)}\varphi(y)\, d\mu_S(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Si on fait décroître $\varphi$ vers la fonction $\mathbb{1}_{\partial C_n}$, le théorème de convergence monotone donne encore :

$$\mu_S(\partial C_n) = \int \psi(x)\mathbb{1}_{\partial F}(x)\, d\mu_S(x)$$

où $\psi$ est une fonction positive et minorée sur $\partial F$ par $e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y,C_y)}$, et où $y$ est la préimage dans $C_n$ de point $x$ de $\partial F$. Le terme de gauche du (4.4) est nul puisque $\partial C_n \subset D_n^\circ$, ce qui montre que

$$\mu_S(\partial F) = 0$$

et achève la démonstration. $\neg$

**Corollaire 4.3.7** *La mesure $\mu_S$ ne charge pas les points de $G$.*

*Démonstration* : $G$ est un sous-ensemble de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Ant_n(\partial F)$, avec comme convention $Ant_0(\partial F) = \partial F$. De plus pour tout $n$ on a

$$Ant_n(\partial F) \subset D_n^\circ \bigcup \partial F$$

ce qui montre que $\mu_S(G) = 0$. $\neg$

### Mesure quasi-Gibbs invariante

Nous considérerons désormais, que modulo n'importe quelle mesure de Gibbs $\mu_S$, les cylindres forment une partition de $F$, et nous ne serons plus obligés de préciser le cylindre pris en compte lorsque nous voudrons estimer $\mathcal{B}$ en un point. Nous allons d'abord étendre le domaine de définition de l'opérateur $\mathcal{L}_S$, puis montrer un lemme qui justifie son introduction et son étude. Ensuite nous donnerons la définition des mesures quasi-Gibbs invariantes.

**Proposition 4.3.8** *L'opérateur $\mathcal{L}_S$ peut être étendu en un opérateur continu sur $L^1(\mu_S)$.*

*Démonstration* : $\mathcal{L}_S$ est opérateur <u>continu</u> de $(C^0(F), \|\ \|_\infty)$ dans lui-même. De plus la mesure $\mu_S$ charge tous les ouverts de $F$, puisqu'elle charge tous les cylindres. $\|\ \|_{L^1(\mu_S)}$ est donc une norme sur $C^0(F)$. Nous allons montrer que $\mathcal{L}_S$ définit également un opérateur continu de $(C^0(F), \| \|_{L^1(\mu_S)})$ dans lui-même. Si $\phi$ et $\psi$ sont deux fonctions continues, on a

$$\begin{aligned}
\int |\mathcal{L}_S(\phi) - \mathcal{L}_S(\psi)|\, d\mu_S &\stackrel{déf}{=} \int |\sum_{y\in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(y)}(\phi(y) - \psi(y))|\, d\mu_S \\
&\leq \int \sum_{y\in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(y)}|\phi(y) - \psi(y)|\, d\mu_S \\
&\leq \int \mathcal{L}_S\left(|\phi - \psi|\right)\, d\mu_S \\
&\leq \lambda_S \|\phi - \psi\|_{L^1}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.5) entraine

$$\|\mathcal{L}_S(\phi) - \mathcal{L}_S(\psi)\|_{L^1} \leq \lambda_S \|\phi - \psi\|_{L^1}$$

ce qui indique que $\mathcal{L}_S$ définit un opérateur continu de $(C^0(F), \| \|_{L^1(\mu_S)})$. Par continuité de l'opérateur et densité des fonctions continues dans $L^1(\mu_S)$, nous pouvons étendre l'opérateur $\mathcal{L}_S$ à $L^1(\mu_S)$ tout entier. ¬

*Remarque* : Pour toute fonction intégrable $\phi$, on a

$$\int \widetilde{\mathcal{L}}_S(\phi)\, d\mu_S = \int \phi\, d\mu_S.$$

C'est effectivement vrai pour toute fonction continue. La densite de $C^0(F)$ dans $L^1(\mu_S)$ et la continuité de $\mathcal{L}_S$ montrent que c'est encore vrai pour toute fonction intégrable.

**Lemme 4.3.9** *Soit $\varphi \in L^1(\mu_S)$. Alors $\widetilde{\mathcal{L}}_S(\varphi) = \varphi\ \mu_S - p.p.$ si et seulement si la mesure $m_S$ définie par $dm_S = \varphi\, d\mu_S$ est $g_F$-invariante.*

*Démonstration* : On remarque en premier lieu que pour toute fonction $\psi$ il y a égalité entre $\int \widetilde{\mathcal{L}}_S(\psi \circ g_F)\, d\mu_S$ et $\int \psi\, d\mu_S$, puisque les points qui posent problème sont, soit ceux de $G$, soit ceux de $H^1$, ces deux ensembles étant de mesure nulle. Si $\widetilde{\mathcal{L}}_S(\varphi) = \varphi\ \mu_S - p.p.$, nous voulons montrer que $m_S$ est invariante, c'est à dire que pour tout $\psi \in C^0(F)$ $\int \psi \circ g_F\, dm_S = \int \psi\, dm_S$. Nous avons en fait :

$$\begin{aligned}
\int \psi \circ g_F\, dm_S &\stackrel{déf}{=} \int \psi \circ g_F\, \varphi\, d\mu_S \\
&= \int \widetilde{\mathcal{L}}_S(\psi \circ g_F\, \varphi)\, d\mu_S \\
&= \int \psi\, \widetilde{\mathcal{L}}_S(\varphi)\, d\mu_S \\
&= \int \psi\, dm_S
\end{aligned}$$

Réciproquement si $m_S$ est $g_F$-invariante et si $\psi$ est une fonction continue on a la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} \int \psi\,\varphi\,d\mu_S &\overset{déf}{=} \int \psi\,dm_S \\ &= \int \psi \circ g_F\,dm_S \\ &= \int \psi \circ g_F\,\varphi\,d\mu_S \\ &= \int \widetilde{\mathcal{L}}_S(\psi \circ g_F\,\varphi)\,d\mu_S \\ \text{soit} \quad \int \psi\,\varphi\,d\mu_S &= \int \psi\,\widetilde{\mathcal{L}}_S(\varphi)\,d\mu_S \end{aligned}$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée pour toute fonction $\psi$ continue, on a bien $\widetilde{\mathcal{L}}_S(\varphi) = \varphi\ \mu_S - p.p.$. $\neg$

Une application directe du lemme 4.3.9 est la définition des mesures quasi-Gibbs invariantes.

**Définition 4.3.10** *Soit $h \in C^0_\eta(F)$, invariante par $\widetilde{\mathcal{L}}_S$. La mesure $g_F$-invariante , $m_S$, définie par $dm_S \overset{déf}{=} h\,d\mu_S$ sera appelée mesure quasi-Gibbs invariante associée au potentiel $\mathcal{B}_S$ .*

## 4.4 Propriétés ergodiques des mesures quasi-Gibbs invariantes

Dans cette partie nous nous proposons de démontrer que les mesures quasi-Gibbs sont ergodiques ; nous montrerons alors que cela entraine l'unicité d'une telle mesure quasi-Gibbs invariante. Dans un premier temps nous allons établir des théorèmes de martingales pour les mesure de Gibbs $\mu_S$, puis nous en tirerons des propriétés importantes pour les mesures de Gibbs, et enfin nous prouverons l'unicité de la mesure de Gibbs et de la mesure quasi-Gibbs invariante.

### 4.4.1 Un théorème des martingales

Dans toute cette section, $\mu_S$ désigne une mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$.

Les théorèmes de dérivation des intégrales de fonctions mesurables tels que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,\varepsilon))} \int_{B(x,\varepsilon)} f\,d\mu$$

ne sont valables que si les ouverts ont une forme relativement sympathique. Nous allons établir des théorèmes analogues, valables pour la tribu engendrée par les cylindres de tous ordres. Le principal problème est un problème de recouvrement par les boréliens générateurs de la tribu. Nous savons que les cylindres d'un même ordre forment une partition de $F$ au sens de la mesure, et dans le lemme qui suit nous allons utiliser cette propriété pour avoir un lemme de recouvrement minimum type lemme de Besicovitch.

**Lemme 4.4.1** *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble quelconque de cylindres de tous ordres. On peut trouver un sous-ensemble $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ de cylindres tels que :*

$$\bigcup_{c\in\mathcal{C}} c = \bigcup_{c'\in\mathcal{C}'} c' = \bigsqcup_{c'\in\mathcal{C}'} c'$$

*la réunion disjointe s'entendant au sens de la mesure $\mu_S$.*

*Démonstration* : Soit $x \in F\backslash(H \bigcup G)$ tel qu'il existe $c \in \mathcal{C}$ contenant $x$. On considère l'ensemble des entiers $N(x) \overset{déf}{=} \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \exists\, c \in \mathcal{C} \text{ d'ordre } k, x \in c\}$. $N(x)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet à ce titre un plus petit élément qu'on notera $k(x)$. Nous introduisons maintenant deux nouveaux ensembles de cylindres.
On note $\mathcal{C}_1 = \{c \in \mathcal{C} \text{ tel que } \forall\, c' \in \mathcal{C}\,, c\cap c' \neq \emptyset \Rightarrow c' \subset c\}$. Cela signifie que $\mathcal{C}_1$ est le sous-ensemble des plus grands cylindres de $\mathcal{C}$ (au sens de l'inclusion). On considère aussi l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \{c \in \mathcal{C}, c \text{ d'ordre } k, \text{ tel que } \forall\, x \in c \setminus G,\, k = k(x)\}$. $\mathcal{C}_2$ représente les cylindres avec de plus petit ordre dans $\mathcal{C}$. Les propriété markoviennes de $R$ montrent que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_1$ vérifie les propriétés de $\mathcal{C}'$.
Si $x \in \bigcup_{c\in\mathcal{C}} c$ et $x \notin (H \bigcup G)$, par définition de $k(x)$, il existe un cylindre $c'$ dans $\mathcal{C}$ tel que $c'$ soit d'ordre $k(x)$. Comme les cylindres forment une famille croissante de partitions de $F$ (en fonction de leur ordre) au sens de la mesure $\mu_S$, et $x$ n'étant pas dans $G$, pour tout $y$ dans $c$, $k(y) = k(x)$ et donc $c \in \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$. Ainsi $\bigcup_{c\in\mathcal{C}} c = \bigcup_{c'\in\mathcal{C}_1} c'$ $\mu_s$-p.p.. La définition de $\mathcal{C}_1$ montre que tous ces cylindres sont disjoints au sens de la mesure, puisqu'ils ne peuvent s'intersecter qu'en des points de $G$, qui est de mesure nulle. Le lemme est donc prouvé. ¬
Nous venons de voir que si nous avons une réunion quelconque de cylindres, on peut en extraire une sous-famille minimale vis à vis du cardinal, mais qui recouvre exactement les même ensemble de points de $F$ à un ensemble de $\mu_S$-mesure nulle. Ceci étant la première étape pour dériver des primitives, nous allons maintenant présenter lesdites "primitives".

**Définition 4.4.2** *Soit $\phi \in L^1(\mu_S)$. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ un fonction par :*

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\mu_S(C_k(x))} \int_{C_k(x)} \phi \, d\mu_S$$

*cette fonction étant définie pour tout $x$ dans $F_\infty \setminus G$ (qui est de $\mu_S$-mesure pleine). De plus si $\phi$ est supposée positive on définit :*

$$\phi^* = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} \phi_k.$$

Nous allons maintenant voir un lemme maximal.

**Lemme 4.4.3** *Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. soit $\phi \in L^1(\mu_S)$ positive. Alors*

$$\mu_S(\phi^* > s) \leq \frac{1}{s} \int \phi \, d\mu_S.$$

*Démonstration* : Soit $A = \{x \in F$ tel que $\phi^*(x) > s\}$. Quitte à l'intersecter avec $F_\infty \backslash G$ on suppose que $A \subset F_\infty \backslash G$. Si $x$ est dans $A$, il existe un cylindre $C_{k_x}$ d'ordre l'entier $k_x$, tel que $\phi_{k_x}(x) > s$, ce qui s'écrit aussi $\int_{C_{k_x}} \phi \, d\mu_S > s \, \mu_S(C_{k_x})$. Notons alors $\mathcal{C} = \{C_{k_x}, \ x \in A\}$. On trouve un $\mathcal{C}'$ comme le lemme 4.4.1 nous l'indique. Ceci permet d'avoir :

$$\mu_S(A) \leq \sum_{c' \in \mathcal{C}'} \mu_s(c') \leq \frac{1}{s} \sum_{c' \in \mathcal{C}'} \int_{c'} \phi \, d\mu_S \leq \frac{1}{s} \int \phi \, d\mu_S,$$

puisque les cylindres de $\mathcal{C}'$ sont disjoints. $\neg$
Voici la proposition principale de cette partie :

**Proposition 4.4.4** *Si $\phi \in L^1(\mu_S)$ alors $\phi_k \longrightarrow \phi$ $\mu_S$-presque partout quand $k \to +\infty$.*

*Démonstration* : Le résultat est vrai si $\phi$ est continue. Nous allons montrer que l'ensemble $L$ des fonctions de $L^1(\mu_S)$ ayant cette propriété est un fermé de $L^1(\mu_S)$. Le résultat sera alors acquis, puisque $L$ est un fermé qui contient une partie dense de $L^1(\mu_S)$.
Soit $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(\mu_S)$ telle que pour tout $n$, la suite de fonctions $(\phi^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge $\mu_S$-presque partout vers $\phi^n$ quand $k$ tend vers l'infini. on suppose en outre que $(\phi^n)$ converge dans $L^1(\mu_S)$ vers $\phi$. On va montrer que $(\phi_k)$ converge presque partout vers $\phi$. Il va falloir majorer $|\phi_k(x) - \phi(x)|$ ce qui se fait par le découpage suivant

$$|\phi_k(x) - \phi(x)| \quad \leq \quad |\phi_k(x) - \phi^n_k(x)| + |\phi^n_k(x) - \phi^n(x)| + |\phi^n(x) - \phi(x)|. \quad (4.6)$$

Il faut donc trouver trois types différents de majorations. Chaque majoration ayant lieu presque partout il faut donc définir trois ensembles de points "sympathiques". Pour chaque entier $n$ on appelle $E^2_n = \{x \in F$ tel que $\phi^n_k(x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \phi^n(x)\}$. Alors $\mu_S(E^2_n) = 1$ pour tout $n$. Ainsi $E^2 \overset{déf}{=} \bigcap_{n=0}^{+\infty} E^2_n$ est de mesure pleine.
$(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1(\mu_S)$ vers $\phi$. Quitte à en prendre une sous-suite on peut supposer qu'en fait c'est la suite entière qui converge presque partout vers $\phi$. On note $E^3$ cet ensemble de points où la suite converge. On a encore $\mu_S(E^3) = 1$.
Fixons nous un entier $n$, et posons $h_n \overset{déf}{=} |\phi^n - \phi|$ ; $h_n$ est une fonction positive, et on peut définir $h^*_n$. De plus si pour $x$ dans $F$ et $t$ réel positif on a $|\phi^n_k(x) - \phi_k(x)| \geq t > 0$ pour un certain $k$, alors $h^*_n(x) \geq |\phi^n_k(x) - \phi_k(x)| \geq t > 0$. On obtient donc :

$$\mu_S(\{x \in F \, , \exists k \in \mathbb{N} |\phi^n_k(x) - \phi_k(x)| \geq t > 0\}) \leq \mu_S(\{x \in F \, , h^*_n(x) \geq t > 0\}).$$

Le lemme 4.4.3 prouve que cette mesure est majorée par $\frac{1}{t}\int|\phi^n-\phi|\,d\mu_S$.
On se fixe un $m\in\mathbb{N}$. On peut trouver un entier $n(m)$ tel que pour tout $n\geq n(m)$ $\int h_n\,d\mu_S<1/2^m$. Quitte a changer la suite $(n(m))_m$ on la suppose strictement croissante. On note $E^1_m=\{x\in f\,,\sup_{k\in\mathbb{N}}|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi_k(x)|>\frac{1}{3m}\}$. Si $x$ est un point de $F$ qui n'est pas dans $E^1_m$ alors pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi_k(x)|\leq 1/3m$. Il nous faut donc montrer que $E^1_m$ est petit. Il est clair que

$$E^1_m\subset\{x\in f\,,\exists k\in\mathbb{N}\,|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi_k(x)|>\frac{1}{3m}>0\}.$$

Nous avons alors une majoration de $\mu_S(E^1_m)$ par $3m/2^m$. Comme $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{3m}{2^m}<+\infty$ le théorème de Borel-Vitali montre que presque tout point de $F$ n'appartient qu'à un nombre fini de $E^1_m$. On note $E^1$ l'ensemble de $\mu_S$-mesure pleine des points n'appartenant qu'à un nombre fini d'ensemble $E^1_m$.

Posons $E\overset{déf}{=}E^1\cap E^2\cap E^3$. $E$ est de mesure pleine. Fixons $x$ dans $E$ et un réel $\delta>0$.
- $x\in E^3$ et donc il exite un $N$ tel que pour tout $n\geq N$, $\quad|\phi^n(x)-\phi(x)|<\delta/3$.
- $x\in E^1$, et donc il existe un plus grand entier $m_x$ tel que $x\in E^1_{m_x}$. On choisit un $m>m_x$ tel que $1/m<\delta$ et $n(m)>N$. On a alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi_k(x)|\leq 1/3m<\delta/3$.
- $x\in E^2$ et donc $x\in E^2_{n(m)}$, ce qui entraine l'existence d'un entier $k(x)$ tel que pour tout $k\geq k(x)$, $\quad|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi^{n(m)}(x)|<\delta/3$.

Pour tout $k\geq k(x)$ on a :

$$|\phi_k(x)-\phi(x)|\leq|\phi_k(x)-\phi_k^{n(m)}(x)|+|\phi_k^{n(m)}(x)-\phi^{n(m)}(x)|+|\phi^{n(m)}(x)-\phi(x)|<\delta$$

Il y a convergence ponctuelle de $(\phi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\phi(x)$, et ce pour tout $x\in E$, ensemble de mesure pleine. Cela prouve donc que l'ensemble des fonctions de $L^1(\mu_S)$ telles que $\phi_k\to\phi$ $\mu_S$-presque partout est un fermé pour la topologie de $L^1(\mu_S)$. Ce fermé contient toutes les fonctions continues, qui sont denses dans $L^1(\mu_S)$ et donc c'est $L^1(\mu_S)$ tout entier. $\neg$

**Lemme 4.4.5** *Si $A$ est un borélien de $F$, alors pour $\mu_S$ presque tout $x$ :*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mu_S(A\cap C_k(x))}{\mu_S(C_k(x))}=\mathbb{1}_A(x)$$

*où $C_k(x)$ est un (le) cylindre d'ordre $k$ qui contient $x$.*

*Démonstration* : il suffit d'appliquer la proposition 4.4.4 à $\phi=\mathbb{1}_A$. $\neg$

### 4.4.2 Les mesures de Gibbs sont exactes.

Le but de cette partie est de montrer que toute mesure de Gibbs, $\mu_S$, est exacte. Dans un premier temps nous voyons qu'une mesure de Gibbs n'est pas atomique.

**Lemme 4.4.6** *Soit $\mu_S$ une mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$. Elle n'est pas atomique.*

*Démonstration* : Nous allons raisonner par l'absurde. Si au contraire il existe un $x$ tel que $\mu_S(\{x\}) > 0$. On sait déjà que $x \notin (H_1 \bigcup G)$. De plus $\mu_S$ est une mesure conforme de Jacobien $\lambda_S e^{-\mathcal{B}_S}$. Par conséquent pour tout $x' \in Ant(x)$,

$$\mu_S(\{x'\}) = \frac{1}{\lambda_S} e^{\mathcal{B}_S(x')} \mu_S(\{x\}).$$

-Premier cas. Le point $x$ n'est pas périodique. Nous montrons alors que les ensembles $(Ant_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. Supposons qu'il existe $n$ et $m$ tels que $Ant_n(x) \cap Ant_m(x) \neq \emptyset$, et prenons $x' \in Ant_n(x) \cap Ant_m(x)$. Alors $g_F^n(x') = g_F^m(x') = x$, et si on suppose par exemple que $n < m$, on doit avoir $g_F^{m-n}(x) = x$, ce qui signifie que $x$ est périodique, et donc contredit l'hypothèse. Ainsi $\mu_S(Ant_n(x)) = \widetilde{\mathcal{L}}_S^n(\mathbb{I})(x)\mu_S(\{x\})$. Le lemme 4.3.4 prouve alors que $\mu_S(\{x\}) = 0$ sinon $\mu_S$ ne serait pas une mesure de probabilité.

Comme notre hypothèse est $\mu_S(\{x\}) > 0$ cela montre $x$ est nécessairement périodique, et d'une manière plus générale, que tout point qui charge la mesure doit être périodique.

–Deuxième cas : $x$ est périodique. Notons $n$ sa période. Alors $x \in Ant_n(x)$. Tous les points de $Ant_n(x)$ chargent la mesure et ils sont donc périodiques. Si $x'$ est l'un d'eux et si $n'$ est sa période, alors il existe un multiple de $n'$ noté $m$ qui est strictement plus grand que $n$. Ainsi $x' = g_F^m(x') = g_F^{m-n}(x)$ et donc $x'$ appartient à l'orbite de $x$. Ceci étant vrai pour tout $x' \in Ant_n(x)$, l'orbite de $x$ ne peut être finie condition *sine qua non* pour que $x$ soit périodique. Ce cas est également impossible.
Conclusion, $\mu_S$ ne peut pas être atomique. $\neg$

**Définition 4.4.7** *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{T}_n$ la sous-tribu des boréliens tels que si $E \in \mathcal{T}_n$ et si $x \in E$ alors :*

$$Ant_n(g_F^n(x)) \subset E.$$

*Si $x$ est un point de $Ant_n(y)$ on appellera frère d'ordre $n$ de $x$ tous les éléments de $Ant_n(y)$.*

La tribu $\mathcal{T}_n$ est telle que si un point a une certaine propriété vis à vis de la mesure $\mu_S$, tout ses frères d'ordre $n$ auront une propriété similaire.

**Lemme 4.4.8** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E \in \mathcal{T}_n$. Si $x \in E \setminus H$ et si*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mu_S(E \cap C_k(x))}{\mu_S(C_k(x))} = 1,$$

*où $C_k(x)$ désigne le cylindre d'ordre $k$ qui contient $x$, alors pour tous les frères d'ordre $n$, $y$, de $x$ on a :*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mu_S(E \cap C_k(y))}{\mu_S(C_k(y))} = 1.$$

*Démonstration* : Choisissons $y$ un frère de $x$. Notons $J$ le jacobien de $\mu_S$ qui vaut $\lambda_S e^{-\mathcal{B}_S}$. Il y a un homéomorphisme naturelle entre $C_n(x)$ et $C_n(y)$. Cela induit un homéomorphisme $\phi$ entre $C_k(x)$ et $C_k(y)$ pour tout $k \geq n$. Comme $E \in \mathcal{T}_n$, $\phi(E \cap C_k(x)) = E \cap C_k(y)$. L'invariance de $\mu_S$ par l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}_S^*$ montre que :

$$\mu_S(E \cap C_k(y)) = \int_{E \cap C_k(x)} \frac{J^k(t)}{J^k(\phi(t))}\, d\mu_S.$$

De même :

$$\mu_S(C_k(y)) = \int_{C_k(x)} \frac{J^k(t)}{J^k(\phi(t))}\, d\mu_S.$$

Par ailleurs $S_n(\mathcal{B}_S)$ est continue et à variation uniformément bornée sur chaque cylindre d'ordre $k \geq n$. On note $V_k$ un majorant de sa variation sur les cylindres d'ordre $k$. Il est clair que $V_k \to 0$ quand $k \to +\infty$. On trouve alors

$$\frac{\mu_S(E \cap C_k(y))}{\mu_S(C_k(y))} = \frac{\displaystyle\int_{E \cap C_k(x)} \frac{J^k(t)}{J^k(\phi(t))}\, d\mu_S}{\displaystyle\int_{C_k(x)} \frac{J^k(t)}{J^k(\phi(t))}\, d\mu_S}.$$

Ce qui entraine que

$$\frac{\mu_S(E \cap C_k(x))}{\mu_S(C_k(x))} e^{-4V_k} \leq \frac{\mu_S(E \cap C_k(y))}{\mu_S(C_k(y))} \leq 1.$$

Si $k \to +\infty$ on trouve le résultat souhaité. $\neg$

Voici le résultat important de cette section.

**Proposition 4.4.9** *La mesure de Gibbs $\mu_S$ est exacte, c'est à dire que $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n = \{\emptyset, F\}$ pour la mesure $\mu_S$.*

*Démonstration* : Soit $E$ un borélien de $\mathcal{T}_\infty \overset{\text{déf}}{=} \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Quitte à restreindre $E$ on suppose que $E \cap H = \emptyset$. On suppose aussi que $\mu_S(E) > 0$. Par le lemme 4.4.5 il existe un point $x$ de $E$ tel que $\lim_{k \to +\infty} \frac{\mu_S(E \cap C_k(x))}{\mu_S(C_k(x))} = \mathbb{1}_E(x) = 1$. Fixons $\delta > 0$. Il existe $k_1$ tel que pour tout $k \geq k$ on ait $\mu_S(E \cap C_k(x)) \geq (1 - \delta)\mu_S(C_k(x))$.
$E$ est un borélien de $\mathcal{T}_{k_1}$ et comme dans le lemme 4.4.8 on arrivera à :

$$\frac{\mu_S(E \cap C_k(y))}{\mu_S(C_k(y))} \geq (1 - \delta) e^{-4V_k}$$

pour tout $k \geq k_1$ et pour tout $y$ frère d'ordre $k_1$ de $x$. En particulier pour $k = k_1$ c'est vrai. De plus $(V_k)_k$ est uniformément bornée par une constante universelle $C$ comme le montre le lemme 4.2.2. Si nous sommons cette minoration sur tous les frères d'ordre $k_1$ de $x$, compte tenu de ce que les cylindres d'un ordre fixé forment –pour $\mu_S$– une partition on trouve :

$$\mu_S(E) = \sum_{y \in Ant_{k_1}(g_F^{k_1}(x))} \mu_S(E \cap C_{k_1}(y)) \geq (1-\delta)e^{-4C}.$$

Nous venons donc d'établir que
Si $E$ est un borélien de $\mathcal{T}_\infty$ de mesure strictement positive, alors $\mu_S(E) \geq (1-\delta)e^{-4C}$. Le lemme 4.4.6 indique que $\mu_S$ n'est pas atomique, et donc nécessairement $\mu_S(E) = 1$. $\neg$

### 4.4.3 Ergodicité et unicité de la mesure quasi-Gibbs invariante

Nous allons montrer dans cette partie que toute mesure quasi-Gibbs, $m_S$, est mélangeante. Elle sera alors automatiquement ergodique. Ensuite nous utiliserons cette propriété d'ergodicité pour prouver l'unicité de la mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$ ainsi que l'unicité de la mesure quasi-Gibbs invariante.

**Proposition 4.4.10** *Toute mesure quasi-Gibbs invariante, $m_S$, est mélangeante et donc ergodique.*

*Démonstration* : Soient $\phi$ et $\psi$ deux fonctions continues d'intégrales nulles. Pour montrer le mélange de $m_S$ il suffit de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int \phi.\psi \circ g_F^n \, dm_S = 0.$$

Mais $\int \phi.\psi \circ g_F^n \, dm_S = \int \mathbb{E}[\phi.\psi \circ g_F^n | \mathcal{T}_n] \, dm_S$, cette dernière intégrale étant elle-même égale à $\int \mathbb{E}[\phi|\mathcal{T}_n].\psi \circ g_F^n \, dm_S$ par définition de l'espérance conditionnelle. La mesure $m_S$ est équivalente à la mesure de Gibbs $\mu_S$, et donc la tribu $\mathcal{T}_n$ décroit vers la tribu triviale. Par ailleurs

$$\|\mathbb{E}[\phi|\mathcal{T}_n].\psi \circ g_F^n\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty \, \|\phi\|_\infty.$$

Le théorème de convergence dominée prouve que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int \phi.\psi \circ g_F^n \, dm_S = 0$$

et donc $m_S$ est mélangeante. $\neg$
L'ergodicité d'une mesure invariante est équivalente au fait que la mesure est une mesure extrémale dans le compact convexe des mesures de probabilité invariantes. C'est cette idée que nous allons utiliser pour prouver le résultat suivant.

**Proposition 4.4.11** *Le système $(F, g_F)$ admet une unique mesure de Gibbs associée au potentiel $\mathcal{B}_S$, et une unique mesure quasi-Gibbs invariante.*

*Démonstration* : Nous démontrerons d'abord l'unicité de la mesure de Gibbs. Avant tout rappelons que le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu oblige l'opérateur $\mathcal{L}_S$ à n'avoir *qu'une seule* valeur propre réelle strictement positive et de plus grand module, c'est à dire $\lambda_S$. Une autre mesure de Gibbs, c'est à dire un autre vecteur propre de $\mathcal{L}_S^*$ aura nécessairement la même valeur propre $\lambda_S$, du fait que toute valeur propre de $\widetilde{\mathcal{L}_S^*}$ est *la* valeur propre réelle dominante de $\mathcal{L}_S$. Supposons donc que $\widetilde{\mu}_S$ est un autre vecteur propre de $\mathcal{L}_S^*$ associé à $\lambda_S$. Fixons nous $t \in [0,1]$ et notons $\mu_S^t \overset{déf}{=} t\,\mu_S + (1-t)\,\widetilde{\mu}_S$. Notons ensuite $m_S^t$ la mesure définie par $dm_S^t = h\,d\mu_S^t$. L'étude faite auparavant montre que $m_S^t$ est mélangeante donc ergodique et que pour tout $t$ :

$$m_S^t = t\,m_S^1 + (1-t)\,m_S^0$$

ce qui oblige ces trois mesures à n'en être en fait qu'une seule et donc $\widetilde{\mu}_S$ à être égale à $\mu_S$. Il n'y a qu'une seule mesure de Gibbs.
Montrons maintenant l'unicité de la mesure quasi-Gibbs invariante. Nous venons de voir l'unicité de la mesure de Gibbs. Toute mesure quasi-Gibbs est donc équivalente à $\mu_S$. Le problème revient donc à prouver l'unicité du vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_S$ pour l'opérateur $\mathcal{L}_S$ dans $L^1(\mu_S)$. Si $\widetilde{h}$ est une fonction de $L^1(\mu_S)$ telle que :

$$\mathcal{L}_S(\widetilde{h}) = \lambda_S\,\widetilde{h}$$

on note $h^t$ la fonction définie par $h^t = t\,h + (1-t)\,\widetilde{h}$, où $t$ est un paramètre à valeurs dans $[0,1]$ ; $h$ et $\widetilde{h}$ sont toutes les deux dans l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_S$ de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_S$, et donc $h^t$ vérifie également :

$$\mathcal{L}_S(h^t) = \lambda_S\,h^t.$$

La mesure $m^t$ définie par $dm^t \overset{déf}{=} h^t d\mu_S$ est une mesure $g_F$-invariante équivalente à la mesure de Gibbs $\mu_S$, et l'étude précédente montre qu'elle est ergodique. De plus pour tout $t \in [0,1]$

$$m^t = (1-t)\,m_S + t\,m^1$$

ce qui n'est possible que si $m_S = m^1$, l'égalité ayant lieu $\mu_S$-presque partout , c'est à dire $h = \widetilde{h}$ $\mu_S$ p.p.. L'unicité du vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_S$ de l'opérateur $\mathcal{L}_S$ dans $L^1(\mu_S)$ est acquise, et donc il existe une et une seule mesure quasi-Gibbs invariante. ¬

## 4.5 Etats d'équilibre

### 4.5.1 Présentation du formalisme thermodynamique

Nous allons définir, comme dans le cas de l'Axiom-A, la notion de pression. Cependant nous ne pouvons pas définir facilement les notions d'entropie et de pression topologiques, puisque la transformation $g_F$ n'est pas continue, mais seulement continue par "blocs". De plus les points des ensembles $H$ et $G$ peuvent poser problème. En fait, nous verrons en annexe, que l'ensemble $G$ est forcément négligeable pour toute mesure borélienne de probabilité $g_F$-invariante. par ailleurs l'ensemble $H$ est $g_F$-invariant, et est donc pour toute mesure borélienne de probabilité $g_F$-invariante et ergodique, soit négligeable, soit total. Toute mesure invariante pouvant se décomposer en mesures ergodiques (et extrémales), on peut donc ne s'intéresser qu'aux mesures qui ne chargent pas $H$.

**Définition 4.5.1** *On appellera $\mathcal{M}'_F$ l'ensemble des mesures de probabilité, ergodiques, $g_F$-invariantes, et ne chargeant pas l'ensemble $H$ des points qui ne reviennent pas une infinité de fois dans $R$ par itération de $f$.*

**Définition 4.5.2** *Si $m$ est une mesure dans $\mathcal{M}'_F$ on note $\mathcal{P}_m(\mathcal{B}_S)$ le réel $h_m(g_F) + \int \mathcal{B}_S\, dm$, et on l'appelle pression métrique de la mesure $m$ pour le potentiel $\mathcal{B}_S$ du système $(F, g_F)$.*
*On appelle alors pression du système pour le potentiel $\mathcal{B}_S$, et on le note $\mathcal{P}(\mathcal{B}_S)$, l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par :*

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}_S) = \sup_{m \in \mathcal{M}'_F} \mathcal{P}_m(\mathcal{B}_S).$$

*Si une mesure réalise ce maximum elle sera appelée état d'équilibre du système pour le potentiel $\mathcal{B}_S$.*

### 4.5.2 Existence et unicité de l'état d'équilibre

Dans cette partie nous allons montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.5.3** *Pour toute fonction höldérienne $\mathcal{A}$ définie sur $\Omega$, il existe un et un seul état d'équilibre du système $(F, g_F)$ pour le potentiel $\mathcal{B}_S$, et la mesure qui réalise l'équilibre est l'unique mesure quasi-Gibbs invariante associée au potentiel. La valeur de la pression du système pour le potentiel $\mathcal{B}_S$ est alors* $\log \lambda_S$

En reprenant des idées qu'on trouvera dans [24], [10] et [3], on constate que la démonstration de ce théorème repose sur le lemme clef suivant.

**Lemme 4.5.4** *Il existe une constante universelle $C$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout cylindre d'ordre $n$, $C_n$, et pour tout $x$ dans $C_n$ on ait :*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{m_S(C_n)}{\frac{1}{\lambda_S^n} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x)}} \leq C.$$

*Démonstration* : Soit $n$ un entier. Soit $C_n$ un cylindre d'ordre $n$. Soit $x$ un point de $C_n$. $C_n$ est un compact de $F$. Nous savons aussi que $C_n$ est propre, c'est à dire qu'il est égal à l'adhérence de son intérieur. Comme $\mu_S$ ne charge pas $\partial F$ et comme

$m_S$ est équivalente à $\mu_S$ la $m_S$-mesure de $\partial C_n$ bord de $C_n$ est nulle. Ceci permet d'écrire que :

$$m_S(C_n) = m_S(int(C_n)) = \sup_{\varphi \prec int(C_n)} \int \varphi \, dm_S$$

où $\varphi \prec int(C_n)$ signifie que $\varphi$ est une fonction continue positive, nulle en dehors de $int(C_n)$, et majorée par 1. Prenons donc une telle fonction $\varphi$. Nous avons la suite d'égalités suivante

$$\begin{aligned} \int \varphi \, dm_S &\overset{déf}{=} \int \varphi.h \, d\mu_S \\ &= \frac{1}{\lambda_S^n} \int \sum_{y \in Ant_n(x)} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} \varphi(y).h(y) \, d\mu_S(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_S^n} \int \mathbb{1}_{C_n}(y) e^{S_n(\mathcal{B}_S)(y)} \varphi(y).h(y) \, d\mu_S(x) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$h$ est une fonction continue et strictement positive sur le compact $F$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Il existe alors une constante universelle $C$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq h \leq C.$$

Par ailleurs la variation sur chaque cylindre de $\mathcal{B}_S$ est bornée par une constante universelle ; l'égalité (4.7) donne alors

$$\frac{1}{C} \times \left( \frac{1}{\lambda_S^n} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x)} \right) \leq \int \varphi \, dm_S \leq C \times \left( \frac{1}{\lambda_S^n} e^{S_n(\mathcal{B}_S)(x)} \right)$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.5.4. $\neg$

Nous pouvons démontrer le théorème. La preuve se fait en deux étapes. D'abord nous montrons que la pression métrique de la mesure $m_S$ est exactement $\log \lambda_S$, puis nous montrons, que toute autre mesure dans $\mathcal{M}'_F$, a une pression métrique strictement plus petite que $\log \lambda_S$.

*Etape 1* : La partition en cylindre $\mathcal{C}$ (partition au sens de $m_S$) est génératrice, c'est à dire que $\bigvee_{n=0}^{+\infty} {g_F^{-n}}(\mathcal{C})$ est la partition en points notée $\mathcal{E}$. Nous savons donc que l'entropie métrique de la partition en cylindres, $h_{m_S}(g_F, \mathcal{C})$, est égale à l'entropie métrique $h_{m_S}(g_F)$. Par ailleurs la partition en cylindre est croissante, c'est à dire que

$$\mathcal{C}_n \overset{déf}{=} \bigvee_{k=0}^{n-1} g_F^{-k}(\mathcal{C}) = g_F^{n-1}(\mathcal{C})$$

qui est la partition en cylindres d'ordre $n-1$. Nous savons que

$$h_{m_S}(g_F, \mathcal{C}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_{m_S} \left[ g_F, \bigvee_{k=0}^{n-1} g_F^{-k}(\mathcal{C}) \right],$$

ce qui entraine que :

$$h_{m_S}(g_F, \mathcal{C}) = \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int -\log m_S(g_F^{n-1}(\mathcal{C}))(x)\, dm_S(x).$$

L'encadrement du lemme 4.5.4 donne

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n} \log C - \frac{1}{n} \int S_n(\mathcal{B}_S)(x)\, dm_S(x) + \log \lambda_S \quad \leq \quad & \frac{-1}{n} \int \log m_S(g_F^{n-1}(\mathcal{C}))(x)\, dm_S(x) \leq \frac{1}{n} \log C \\ & - \frac{1}{n} \int S_n(\mathcal{B}_S)(x)\, dm_S(x) + \log \lambda_S \qquad (4.8) \end{aligned}$$

et l'inégalité (4.8) donne en passant à la limite en $n$

$$h_{m_S}(g_F) + \int \mathcal{B}_S(x)\, dm_S(x) = \log \lambda_S$$

ce qui conclut la première étape.
*Etape 2* : On choisit une mesure $\mu$ dans $\mathcal{M}'_F$ qui n'est pas la mesure $m_S$. On suppose que $\mathcal{P}_\mu(\mathcal{B}_S) \geq \log \lambda_S$. La famille $\mathcal{C}$ est une partition génératrice, car $\mu(G \cup H) = 0$, et donc

$$h_\mu(g_F) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu \left[ g_F, \bigvee_{k=0}^{n-1} g_F^{-k}(\mathcal{C}) \right] = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} H_\mu \left[ g_F, g_F^{-n+1}(\mathcal{C}) \right].$$

Comme la pression de la mesure $\mu$ est plus grande que $\log \lambda_S$ on obtient

$$n \log \lambda_S \quad \leq \quad H_\mu [g_F, \mathcal{C}_n] + \int S_n(\mathcal{B}_S)(x)\, d\mu(x). \qquad (4.9)$$

Compte tenu de l'encadrement du lemme 4.5.4 nous avons pour <u>*tout*</u> point $x$ qui se trouve dans un atome de $\mathcal{C}_n$ (c'est à dire pour tout point se trouvant dans un cylindre d'ordre $n-1$)

$$S_n(\mathcal{B}_S)(x) - \log \mu(\mathcal{C}_n(x)) \quad \leq \quad C + n \log \lambda_S \qquad (4.10)$$

où $C$ est une constante universelle. En intégrant par rapport à $\mu$ les deux inégalités (4.10) et (4.9) (nous avons vu que (4.10) est vraie pour $\mu$-presque tout $x$), nous obtenons pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ :

$$\int -\log \left( \frac{\mu\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)}{m_S\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)} \right) d\mu(x) \quad \geq \quad -C. \qquad (4.11)$$

Nous allons considérer deux cas.

–Premier cas. On suppose que la mesure $\mu$ choisie est singulière par rapport à $m_S$. Il existe un ensemble $E$ tel que $\mu(E) = 1$ et $m_S(E) = 0$. Quitte à restreindre cet ensemble on suppose que $E \subset F_\infty$. On choisit ensuite un compact $K$ et un ouvert $U$ tels que $K \subset E \subset U$ on se fixe un entier $n$ et on note :

$$E_1 = \{c_n \in \mathcal{C}_n \ , \ c_n \cap K \neq \emptyset\}$$
$$E_2 = \{c_n \in \mathcal{C}_n \ , \ c_n \cap K = \emptyset\}.$$

Par construction $K$ est inclus dans la réunion (disjointe au sens des mesures) des cylindres d'ordres $n-1$, c'est à dire que $K$ est inclus dans les atomes de $\mathcal{C}_n$. Notons $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les points qui sont respectivement dans un des éléments de $E_1$ ou de $E_2$. Par construction $K$ est inclus dans $\mathcal{E}_1$. De plus si $n$ est suffisament grand $U$ contient $\mathcal{E}_1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int -\log\left(\frac{\mu\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)}{m_S\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)}\right) d\mu \quad &= \quad m_S(\mathcal{E}_1)\sum_{c_n\in E_1}\frac{m_S(c_n)}{m_S(\mathcal{E}_1)}\left(\frac{-\mu(c_n)}{m_S(c_n)}\log\left(\frac{\mu(c_n)}{m_S(c_n)}\right)\right) \\ &\quad + m_S(\mathcal{E}_2)\sum_{c_n\in E_2}\frac{m_S(c_n)}{m_S(\mathcal{E}_2)}\left(\frac{-\mu(c_n)}{m_S(c_n)}\log\left(\frac{\mu(c_n)}{m_S(c_n)}\right)\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

puisque $\mu$ ne charge pas $G$.
Par concavité de la fonction $x \mapsto -x\log x$ la majoration (4.12) devient

$$\int -\log\left(\frac{\mu\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)}{m_S\Big(\mathcal{C}_n(x)\Big)}\right) d\mu \quad \leq \quad -\mu(\mathcal{E}_1)\log\left(\frac{\mu(\mathcal{E}_1)}{m_S(\mathcal{E}_1)}\right) - \mu(\mathcal{E}_2)\log\left(\frac{\mu(\mathcal{E}_2)}{m_S(\mathcal{E}_2)}\right). \tag{4.13}$$

Les majorations (4.13) et (4.11) donnent finalement :

$$-C \leq \mu(U)\log m_S(U) + \mu(K^c)\log m_S(K^c) + \frac{2}{e}.$$

Les mesures $\mu$ et $m_S$ sont régulières et donc :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \inf_U m_S(U) & = & m_S(E) & = & 0; \\ \inf_U \mu(U) & = & \mu(E) & = & 1; \\ \sup_K m_S(K^c) & = & m_S(K^c) & = & 1; \\ \sup_K \mu(K^c) & = & \mu(K^c) & = & 0. \end{array}\right.$$

Ceci implique en particulier que $-C \leq -\infty$ ce qui est impossible. Les deux mesures, $\mu$ et $m_S$, ne peuvent être singulières.

–Deuxième cas. Les deux mesures ne sont pas étrangères. Les mesures $\mu$ et $m_S$ sont deux mesures ergodiques non-singulières, donc elles sont égales, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\mu \neq m_S$. Ainsi, l'hypothèse $\mathcal{P}_\mu(\mathcal{B}_S) \geq \log\lambda_S$ entraine que $\mu = m_S$, et donc

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}'_F}\mathcal{P}_\mu(\mathcal{B}_S) = \mathcal{P}_{m_S}(\mathcal{B}_S)$$

et $m_S$ est l'unique mesure réalisant le maximum. Le théorème est prouvé. $\neg$

# Chapitre 5

# Equivalence des mesures conditionnelles

## 5.1 Du local au global. Le cas $S > S_S$

Nous allons voir dans cette partie que les mesures d'équilibre $m_S$ associées aux potentiels $\mathcal{B}_S$ pour le système $(F, g_F)$, sont liées à des mesures vérifiant une propriété proche de la définition des mesures d'équilibre pour le système global $(\Omega, f)$. Nous allons montrer que l'extension naturelle du système $(F, g_F, m_S)$ est isomorphe à un système $(R, g, \widehat{m}_S)$, celui-ci ayant comme extension inductive le système $(\Omega, f, \check{m}_S)$ pour une certaine mesure $\check{m}_S$.

### 5.1.1 Extension naturelle du système $(F, g_F, m_S)$

#### Première caractérisation de l'extension naturelle

**Lemme 5.1.1** *Il existe une mesure $g$-invariante $\widehat{m}_S$ sur le rectangle $R$ telle que les deux systèmes $(R, g, \widehat{m}_S)$ et $(F, g_F, m_S)$ vérifient les hypothèses de la proposition 3.1.1.*

*Démonstration* : On remarque d'abord que si $A$ est un borélien de $R$, la famille $\left(g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(A))\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car pour tout entier $n$ nous avons

$$g^{n+1}\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n-1}(A))\right) = g^n\left(g\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-1})\right)\right) g^{-n}(A),$$

et la propriété markovienne de $R$ entraine que $g\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-1})\right)(A) \subset \pi_F^{-1}(\pi_F(A))$.

Nous cherchons à construire une mesure telle que $\pi_{F*}\widehat{m}_S = m_S$, ce qui oblige à avoir $\widehat{m}_S(\pi_F^{-1}(A)) = m_S(A)$ pour tout borélien de $F$.

On appelle alors bloc-entier de $R$ tout borélien $A$ tel que s'il n'est pas vide, et si $x \in A$, alors la feuille stable de $R$ passant par $x$ est dans $A$, c'est à dire

$$\pi_F^{-1}(\pi_F(x)) \subset A.$$

On appelle ensuite bloc de $R$, tout bloc entier de $R$ privé des points de $R$ qui ne reviennent qu'un nombre fini de fois dans $R$ par itération de $f^{-1}$. On notera $R_{-\infty}$ l'ensemble des points de $R$ qui reviennent un infinité de fois dans $R$ par itération de $f^{-1}$.

On définit alors une application $\widehat{m}_S$ par :

$$\widehat{m}_S(A) = \begin{cases} m_S\left(\pi_F(A)\right) & \text{si } A \text{ est un bloc} \\ m_S\left(\pi_F\left(g^{-n}(A)\right)\right) & \text{si } n \text{ est le plus petit entier tel que } g^{-n}(A) \text{ soit un bloc.} \end{cases}$$

Nous allons prouver que l'application $\widehat{m}_S$ définit une mesure de probabilité $g$-invariante sur les boréliens de $R_{-\infty}$, en utilisant le théorème de Carathéodory.

*Etape 1.* On note $\mathcal{T} \overset{déf}{=} \{g^n(B),\ n \in \mathbb{N},\ B \text{ bloc}\}$ et on va montrer que c'est une algèbre.

– $R_{-\infty} = \pi_F^{-1}(\pi_F(R)) \cap R_{-\infty}$, et donc $R_{-\infty} \in \mathcal{T}$.

– Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $A$ s'écrit $g^n(B)$, où $B$ est un bloc. $g$ est injective ($m_S$-presque partout) et surjective sur $R_{-\infty}$, et donc $R_{-\infty} \setminus A = g^n(R_{-\infty} \setminus B)$, ce qui prouve que $A^c \in \mathcal{T}$.

– Si $(A_k)_{0 \leq k \leq m}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$, chacun s'écrivant $g^{n_k}(B_k)$, où les $B_k$ sont des blocs, alors, en posant $n = \sup\{n_k\}$, on a

$$\bigcap_{k=0}^{m} A_k = g^n(B)$$

où $B$ est un bloc.

*Etape 2.* On montre que les fermés intersectés avec $R_{-\infty}$ sont dans la $\sigma$-algèbre $\mathcal{Q}$ engendrée par $\mathcal{T}$. On se fixe donc un fermé $B$. Nous allons montrer que

$$B \cap R_{-\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B \cap R_{-\infty}))\right).$$

Si $x \in B \cap R_{-\infty}$ alors pour tout entier $n$, $g^{-n}(x) \in \pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B \cap R_{-\infty}))$ et donc $x \in g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B))\right)$. Réciproquement si pour tout $n$, $x \in g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B \cap R_{-\infty}))\right)$, alors pour tout $n$ il existe un point $x_n$ de $B \cap R_{-\infty}$ tel que $\pi_F(g^{-n}(x)) = \pi_F(g^{-n}(x_n))$. Par conséquent $g^{-n}(x_n) \in W^s(g^{-n}(x), R)$ pour tout $n$, ce qui montre que $(d(x, x_n)) < \varepsilon/\lambda^n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de $B \cap R_{-\infty}$ qui converge vers $x$, et donc $x \in B$. De plus, pour tout entier $n$, $g^{-n}(x)$ est défini, et donc $x \in B \cap R_{-\infty}$. Ceci montre bien que $B \cap R_{-\infty} \in \mathcal{Q}$.

*Etape 3.* Nous montrons que $\widehat{m}_S$ vérifie la propriété de limite séquentielle, c'est à dire que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$ et si $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, alors $\lim_{n \to +\infty} \widehat{m}_S(A_n) = 0$.

Pour cela nous introduisons une sous-classe compacte (voir [18]). On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments $B$ de $\mathcal{T}$ tels que $\pi_F(B)$ soit un compact de $F$ qui n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre 1. Chaque cylindre étant compact, cela entraine en particulier que pour tout cylindre d'ordre 1 $C$, et pour tout $B \in \mathcal{C}$, $\pi_F(B) \cap C$ est compact.

Il faut vérifier que l'ensemble $\mathcal{C}$ est une sous-classe compacte de $\mathcal{S}$, qui a la propriété d'approximation : pour tout $B$ dans $\mathcal{S}$

$$\widehat{\mu}(B) = \sup\{\widehat{\mu}(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\}.$$

Vérifions d'abord que $\mathcal{C}$ est un sous-classe compacte. On choisit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcap_{n\geq 0} C_n = \emptyset$. Ainsi, sur $F$, la suite $(\pi_F(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de compacts, telle que $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n) = \emptyset$. Pour tout $N$, $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n)$ est un compact comme intersection de compacts, et le théorème des fermés emboités prouve que $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n)$ ne peut être vide si pour tout $N$, $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n) \neq \emptyset$. L'hypothèse $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n) = \emptyset$ prouve alors qu'il existe $N$ tel que $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n) = \emptyset$, et donc $\bigcap_{n=0}^{N} C_n = \emptyset$. $\mathcal{C}$ est bien une classe compacte.

Il faut maintenant prouver que $\mathcal{C}$ a la propriété d'approximation. Si $B$ est un bloc de $R$, par définition de $\widehat{m}_S$, $\widehat{m}_S(B) = m_S(\pi_F(B))$. La mesure $m_S$ est régulière, et donc

$$m_S(\pi_F(B)) = \sup\{m_S(C),\ C \subset \pi_F(B),\ C \text{ compact}\}. \tag{5.1}$$

La relation (4.22) prouve que

$$\widehat{m}_S(B) = \sup\{\widehat{m}_S(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\},$$

mais on peut améliorer ce résultat : si $n$ est un entier, et si $\varepsilon$ est fixé positif, par croissance de la famille de partitions en cylindres, on peut trouver $C$ compact de $F$ inclu dans $\pi_F(B)$, tel que $C$ n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre $n$ ; chaque intersection est alors elle-même compacte, et

$$m_S(\pi_F(B) \setminus C) < \varepsilon.$$

Ceci montre que si $n$ est un entier fixé,

$$\widehat{m}_S(B) = \sup\{\widehat{m}_S(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}_n\},$$

où $\mathcal{C}_n$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $\pi_F(C)$ soit un compact de $F$ qui n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre $n$. De plus, si $C \in \mathcal{C}_n$, $g^{n-1}(C)$ est un élément de $\mathcal{C}$. Si on prend $B$ dans $\mathcal{S}$, il existe un bloc $B'$ et un entier $n$ tels que $B = g^n(B')$. Le bloc $B'$ est approximable par les éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$, et donc $B$ est approximable par des éléments de $\mathcal{C}$. Ainsi

$$\widehat{m}_S(B) = \sup\{\widehat{m}_S(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\}.$$

La proposition I-6-2 de [18] montre alors que $\widehat{m}_S$ vérifie la propriété de limite séquentielle.

*Etape 4.* Les hypothèses du théorème de Carathéodory sont vérifiées, et $\widehat{m}_S$ s'étend en une mesure de probabilité sur $\mathcal{Q}$. Cette $\sigma$-algèbre contient tous les fermés

de $R$ intersectés avec $R_{-\infty}$, et donc tous les boréliens intersectés avec $R_{-\infty}$. De plus par construction $\widehat{m}_S$ est $g$-invariante sur $\mathcal{T}$, et donc sur $\mathcal{Q}$. Quitte à compléter la mesure $\widehat{m}_S$, on peut supposer qu'elle est définie sur les boréliens, et ne charge que $R_{-\infty}$.
Par construction de la mesure $\widehat{m}_S$ pour tout borélien $B$ de $F$, $\widehat{m}_S(\pi_F^{-1}(B)) = m_S(B)$. D'autre part pour tout $y$ dans $F$, on a bien

$$g\left(\pi_F^{-1}(y)\right) \subset \pi_F^{-1}\left(g_F(y)\right),$$

et si deux points $x$ et $y$ de $R$ sont tels que pour tout entier $n$, $\pi_F\left(g^{-n}(x)\right) = \pi_F\left(g^{-n}(y)\right)$, la propriété de mélange de $f$ montre que nécessairement $x = y$. Nous pouvons appliquer la proposition 3.1.1, et en déduire que $(R, g, \widehat{m}_S)$ est isomorphe à l'extension naturelle de $(F, g_F, m_S)$. $\neg$

### Seconde caractérisation de l'extension naturelle

Nous commençons par preciser le potentiel. Comme pour le cas de la feuille les cylindres de $R$ (préimages par $\pi_F$ de ceux de $F$) peuvent avoir un bord en commun. La propriété de Markov de $R$ montre que tout point ne peut être dans plusieurs cylindres à la fois qu'un nombre fini de fois le long de son orbite. Ceci prouve que cet ensemble de points sera de mesure nulle pour toute mesure invariante. De même nous ne considérerons ici que des mesures invariantes ergodiques qui ne chargent pas $R \setminus R_\infty$. Nous noterons alors $\widehat{\mathcal{B}}_S$ la fonction définie presque partout par

$$\widehat{\mathcal{B}}_S(x) \overset{déf}{=} \sum_{k=0}^{r(x)-1} \mathcal{A} \circ f^k(x) \; - r(x)\, S.$$

Ce potentiel est relié à $\mathcal{B}_S$ puisque nous avons le lemme suivant :

**Lemme 5.1.2** *Les deux applications $\mathcal{B}_S \circ \pi_F$ et $\widehat{\mathcal{B}}_S$ sont cohomologues pour la transformation $g$.*

*Démonstration* : Pour $y_1$ et $y_2$ deux points de $R_1$ tels que $\pi_F(y_1) = \pi_F(y_2)$ on définit l'application $\widehat{\omega}$ par $\widehat{\omega}(y_1, y_2) \overset{déf}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{A} \circ f^k(y_1) - \mathcal{A} \circ f^k(y_2)$. Soit $x \in R_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{B}}_S(x) - \mathcal{B}_S \circ \pi_F(x) &= \sum_{k=0}^{r(x)-1} \mathcal{A} \circ f^k(x) - \mathcal{A} \circ f^k \circ \pi_F(x) - \widehat{\omega}(g \circ \pi_F(x), g_F(x)) \\
&= \widehat{\omega}(x, \pi_F(x)) - \widehat{\omega}(g(x), g \circ \pi_F(x)) - \widehat{\omega}(g \circ \pi_F(x), g_F(x)) \\
&= \widehat{\omega}(x, \pi_F(x)) - \widehat{\omega}(g(x), g_F(x)) \\
&= \widehat{\omega}(Id, \pi_F)(x) - \widehat{\omega}(Id, \pi_F)(g(x))
\end{aligned}$$

Le lemme est alors démontré. $\neg$

Dans la suite nous appellerons pression de la mesure $\nu$ pour le potentiel $\widehat{\mathcal{B}}_S$ la quantité $\mathcal{P}_\nu(\widehat{\mathcal{B}}_S) \overset{déf}{=} h_\nu(g) + \int \widehat{\mathcal{B}}_S\, d\nu$, où $\nu$ est $\nu$ est une mesure $g$-invariante et ergodique qui ne charge pas $R \setminus R_\infty$. On appellera alors pression du système pour le potentiel $\widehat{\mathcal{B}}_S$ la valeur $\mathcal{P}(\widehat{\mathcal{B}}_S) \overset{déf}{=} \sup_\nu \mathcal{P}_\nu(\widehat{\mathcal{B}}_S)$. Toute mesure qui réalise ce maximum sera appelée mesure d'équilibre pour le potentiel $\widehat{\mathcal{B}}_S$. Le lemme précédent admet comme corollaire immédiat le résultat suivant :
Si $\nu$ est une mesure $g$-invariante ergodique qui ne charge pas $R \setminus R_\infty$, alors $\mathcal{P}_\nu(\widehat{\mathcal{B}}_S) = \mathcal{P}_\nu(\mathcal{B}_S \circ \pi_F)$.

On remarque que si $\nu$ est une mesure de probabilité $g$-invariante ergodique sur $R$, qui ne charge pas $R \setminus R_\infty$, alors la mesure $\nu' \overset{déf}{=} \pi_{F*}\nu$ est $g_F$-invariante et ergodique et ne charge pas $H$, et

$$\int \widehat{\mathcal{B}}_S\, d\nu = \int \mathcal{B}_S \circ \pi_F\, d\nu = \int \mathcal{B}_S\, d\nu'.$$

Les propriétés de l'extension naturelle permettent d'avoir le résultat suivant :

**Théorème 5.1.3** *Le système $(R, g)$ admet une unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\widehat{\mathcal{B}}_S$, qui est la mesure $\widehat{m}_S$.*

**Conséquences pour $\mathcal{L}_S$**

Le théorème (5.1.3) caractérise de manière unique la mesure $\widehat{m}_S$. Ceci nous permet alors d'étudier l'invariance des objets introduits pour le système $(F, g_F)$ vis à vis du choix de la feuille instable $F$. En particulier si on se fixe deux feuilles instables $F^1$ et $F^2$, on peut définir pour chacun des systèmes $(F^i, g_{F^i})$, $i \in \{1, 2\}$, les valeurs propres $\lambda_{S,i}$ et les fonctions propres $h_i$ pour les opérateurs $\mathcal{L}_{S,i}$, ainsi que les mesures $\mu_{S,i}$. La propriété de type Markov du rectangle $R$ montre que si $x \in F^1$ et si $x'$ est dans $Ant(n, x)$ (pour $g_{F^1}$) alors le point $y' \overset{déf}{=} \pi_{F^2}(x')$ est dans $Ant(n, y)$ (pour $g_{F^2}$), où $y \overset{déf}{=} \pi_{F^2}(x)$. De plus, nous avons l'égalité

$$\mathcal{B}_{S,1}(x) - \mathcal{B}_{S,2} \circ \pi_{F^2}(x) = \widehat{\omega}(x, \pi_{F^2}(x)) - \widehat{\omega}(g_{F^1}(x), \pi_{F^2} \circ g_{F^1}(x)),$$

ce qui, compte tenu de l'unicité pour chaque $i$ de $\lambda_{S,i}$, $\mu_{S,i}$ et $h_i$, entraine que

(1) $\lambda_{S,1} = \lambda_{S,2}$ ;
(2) $h_1 \circ \pi_{F_1}(x) = e^{\widehat{\omega}(\pi_{F^2}(x), \pi_{F^1}(x))} h_2 \circ \pi_{F^2}(x)$ ;
(3) $\pi_{F^1 *}\mu_{S,2} = \mu_{S,1}$.

### 5.1.2 Un système induisant $(R, g, \widehat{m}_S)$

Maintenant que nous avons identifié l'extension naturelle de $(F, g_F, m_S)$ nous allons montrer qu'on peut étendre ce système à $\Omega$ tout entier. Pour cela nous savons qu'il suffit de vérifier que $\int r\, d\widehat{m}_S$ est borné.

**Lemme 5.1.4** *Pour tout $S > S_S$, on a $\int r\, d\widehat{m}_S < +\infty$.*

*Démonstration* : Par définition de $\widehat{m}_S$ on a $\int r\, d\widehat{m}_S = \int r\, dm_S$. Comme la mesure $m_S$ est équivalente à la mesure de Gibbs $\mu_S$, il suffit de prouver que $\int r\, d\mu_S < +\infty$. La mesure $\mu_S$ est invariante par $\widetilde{\mathcal{L}}_S^*$ et par positivité de l'application temps de premier retour nous aurons :

$$\int r\, d\mu_S = \frac{1}{\lambda_S} \int \mathcal{L}_S(r)\, d\mu_S$$

où

$$\mathcal{L}_S(r)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{y \in Ant(k,x)} e^{\mathcal{B}_S(y)} \right) k e^{-kS}$$

pour $\mu_S$-presque tout $x$. Si $x_0$ est un point où $\mathcal{L}_S(r)(x_0)$ est définie par la série précédente, et si $x_0 \in F_1$, alors $\mathcal{L}_S(r)(x_0)$ peut être vue comme la série dérivée de $\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x_0)$ dont le seuil de convergence est $S_S < S$. Ainsi $\mathcal{L}_S(r)(x_0) < +\infty$. La surjectivité de $g_F$ et la condition de variations bornées de $\mathcal{B}_S$ sur chaque cylindre montrent alors qu'il existe une constante $C_S$ telle que :

$$\int r\, d\mu_S < C_S$$

et le lemme est démontré. ¬
On notera $\check{m}_S$ la mesure $f$-invariante ergodique sur $\Omega$ telle que $(\Omega, f, \check{m}_S)$ induise $(R, g, \widehat{m}_S)$. De simples calculs prouvent la proposition suivante :

**Proposition 5.1.5** *Pour tout $S > S_S$ la pression de $\check{m}_S$ pour le potentiel höldérien $\mathcal{A}$ vérifie la relation :*

$$\mathcal{P}_{\check{m}_S}(f, \mathcal{A}) = S + \frac{\log \lambda_S}{\int_F r\, dm_S}.$$

## 5.2 Le cas $S = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Mesure de Gibbs pour le système global

Nous savons qu'il existe une unique mesure d'équilibre associée au potentiel $\mathcal{A}$ pour le système $(\Omega, f)$. Cette mesure est l'unique mesure quasi-Gibbs $f$-invariante. Nous allons reconnaitre la mesure d'équilibre $\mu^{\mathcal{A}}$ parmi les mesures $\check{m}_S$. La proposition 5.1.5 montre que pour tout $S > S_S$ nous avons :

$$\mathcal{P}_{\check{m}_S}(f, \mathcal{A}) \quad = \quad S + \check{m}_S(R) \log \lambda_S. \tag{5.2}$$

Nous avons également vu que $S_S \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Si on se fixe un $S > \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ l'équation (5.2) montre que $\log \lambda_S < 0$, c'est à dire que $\lambda_S < 1$. Nous en déduisons que si la mesure $\mu^{\mathcal{A}}$ est une mesure $\check{m}_S$ nécessairement $S \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. En fait nous allons prouver que $\mu^{\mathcal{A}} = \check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$, et comme $S_S \leq \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ il nous faut d'abord prouver que $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ existe et que $\widehat{\mu}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ peut s'étendre à $\Omega$ tout entier.

### 5.2.1 Etude du cas $S = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$

#### Existence de $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'unique condition d'existence d'une mesure $\mu_S$ est la convergence pour tout $x$ de $F$ de la série $\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x)$. Nous savons aussi qu'il suffit que cette somme existe pour un seul $x_0$ de $F$ pour qu'il y ait convergence partout. Nous allons démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.2.1** *Il existe une constante $C$ telle que pour tout $x$ dans $F$ on ait :*

$$\sum_{y \in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(y)} \leq C$$

*chaque $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(y)$ étant en fait un $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(y, C_1(y))$.*

*Démonstration* : Comme nous venons de le voir il suffit de le vérifier pour un $x$ fixé. On choisit donc $x$ et on prend un $S > \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Nous savons qu'il existe une constante universelle (qui ne dépend que de $\varepsilon$ et $\mathcal{A}$) telle que pour tout $y$ dans $F$ on ait :

$$\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) \leq e^C \, \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(y),$$

d'où $\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) \leq e^C \int \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(y) \, d\mu_S(y)$, et

$$\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) \leq e^C \, \lambda_S \leq e^C.$$

D'autre part nous avons

$$\mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{y \in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y)} \right) e^{-nS}$$

ce qui montre que l'application $S \mapsto \mathcal{L}_S(\mathbb{1}_F)(x)$ est décroissante , positive et majorée sur $(\mathcal{P}_{\mathcal{A}}, +\infty)$. Elle admet donc une limite lorsque $S$ tend vers $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, et donc

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{1}_F)(x) \leq e^C.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\neg$

#### Existence de $\check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$

L'extension naturelle du système $(F, g_F, m_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ est $(R, g, \widehat{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$. Pour pouvoir étendre cette mesure à $\Omega$ tout entier nous devons estimer $\int r \, d\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$.

**Proposition 5.2.2** *$\int r \, d\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ est majorée.*

*Démonstration* : Tout d'abord la positivité de l'application temps de retour montre que $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$-presque partout $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(r)(x)$ est défini par la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{y\in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y)}\right) n\, e^{-nS}$. Par ailleurs la variation bornée de $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ sur chaque cylindre montre qu'il suffit de vérifier que $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(r)(x) < +\infty$ en un point $x$ pour avoir le résultat souhaité. On se fixe donc un point $x$ générique, tel que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(r)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{y\in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y)}\right) n\, e^{-n\mathcal{P}_\mathcal{A}}.$$

On choisit un $y$ dans $Ant(n,x)$. Le lemme A.1.1 donne deux familles d'ensembles $\{\xi^s(f^k(y))\}_{1\leq k\leq n}$ et $\{\xi^u(f^k(y))\}_{0\leq k<n}$, chaque ensemble contenant une boule de rayon $\varepsilon$ pour la topologie adaptée, et étant soit complétement en dehors de $R$, soit complétement en dedans. De plus par le lemme A.1.2, il existe un entier $N$ tel que chaque $\xi^u(f^k(y))$ intersecte avec $f^{-N}(intR)$ et chaque $\xi^s(f^k(y))$ intersecte avec $f^N(intR)$. Par ailleurs, la propriété de type Markov des deux familles, $\{\xi^s(f^k(y))\}_{1\leq k\leq n}$ et $\{\xi^u(f^k(y))\}_{0\leq k<n}$, montre que s'il existe $z$ dans $\xi^u(f^k(y))\cap f^{-l}(intR)$, alors

$$f^l(\xi^u(f^k(y))) \supset W^u(f^l(z),R),$$

et s'il existe $z$ dans $\xi^s(f^k(y))\cap f^l(intR)$, alors

$$f^{-l}(\xi^s(f^k(y))) \supset W^s(f^{-l}(z),R).$$

Fixons $k\leq n-2N$. Le lemme A.1.2 montre donc que $\xi^u(f^k(y))$ intersecte avec $f^{-N}(intR)$. On choisit $f^{-N}(z^u)\in\xi^u(f^k(y))\cap f^{-N}(intR)$, et donc

$$f^N(\xi^u(f^k(y))) \supset W^u(z^u,R).$$

De plus, il existe un plus petit entier $N_k$, $N_k\leq N$ tel que $\xi^s(f^{k+N+N_k}(y))$ intersecte avec $f^{N_k}(intR)$ (ici on utilise la décroissance de la famille $\{\xi^s(f^k(y))\}_{1\leq k\leq n}$). On choisit alors $f^{N_k}(z^s)\in\xi^s(f^{k+N+N_k}(y))\cap f^{N_k}(intR)$, et donc

$$f^{-N_k}(\xi^s(f^{k+N+N_k}(y))) \supset W^s(z^s,R).$$

Posons

$$z_k = f^{-(N+k)}([z^s,z^u]) = z(n,y,k)\ ;$$

alors $z_k(y)\in\xi^u(y)=F$ et,

(i) $f^j(z_k(y))\in\xi^u(f^j(y))$ pour tout $j\leq k$ ;
(ii) $f^{k+N}(z_k(y))\in R$, $f^{j+N}(z_k(y))\notin R$ pour tout $k<j\leq N_k$ ;
(iii) $f^{j+N+N_k}(z_k(y))\in\xi^s(f^{j+N+N_k}(y))$ pour tout $j\leq n-(N+N_k)$.

**Lemme 5.2.3** *Si $z$ est dans $\Omega$, il n'y a qu'un nombre fini de points $y$ dans $Ant(n,x)$ tels que $z=z(n,y,k)$ pour un $k$. Ce nombre est uniformément majoré en $x$ et $n$.*

*Démonstration du lemme* : Si $z = z(n, y, k) = z(n, y', k)$, $f^k(y)$ et $f^k(y')$ doivent alors être $(\varepsilon, N + N_k)$-séparés. On note $E(\varepsilon, 2N)$ le plus grand cardinal de n'importe quel réseau $(\varepsilon, 2N)$-séparé maximal ; au plus $E(\varepsilon, 2N)$ $y$ différents ont donc le même $z(n, y, k)$.

Le cas $z = z(n, y, k) = z(n, y', k')$ est impossible car si on suppose $k < k'$, alors $f^{k+N}(z)$ est dans $R$ et son orbite n'intersecte pas $R$ pour les temps compris entre $k + N + 1$ et $n - 1$ ; par ailleurs on doit avoir $f^{k'+N}(z) \in R$. De même, le cas $z = z(n, y, k) = z(n, y, k')$ est impossible. Finallement moins de $E(\varepsilon, 2N)$ différents points $y$ peuvent avoir le même $z = z(n, y, k)$. $\neg$

Si $z = z(n, y, k)$, alors $f^j(z)$ et $f^j(y)$ sont proches pour $0 \leq i \leq k$ et $n - k - N - N_k \leq j \leq n$. Cela prouve qu'il existe une constante universelle, $C$, telle que

$$e^{S_n(\mathcal{A})(y)} \leq e^C \, e^{S_n(\mathcal{A})(z)}, \tag{5.3}$$

dès que $z = z(n, y, k)$ pour un $k \leq n - 2N$. La construction du point $z = z(n, y, k)$ montre que $f^n(z) \in R$, et $\pi_F \circ f^n(z) = x$. De plus, $\{p,\ 0 \leq p \leq n,\ f^p(z \in R)\}$ est de cardinal majoré par $2 + N$, et minoré par 3. Ainsi, $z$ appartient à $\bigcup_{2 \leq i \leq N+1} Ant_i(x)$.

Notons $Ant_i(n, x)$, l'ensemble des points $w$ de $Ant_i(n, x)$ tels que $g_F^i(w) = \pi_F \circ f^n(w)$ ; nous venons de montrer que

$$(n - 2N) \sum_{y \in Ant(n,x)} e^{\mathcal{B}(y)} \leq e^C \sum_{2 \leq i \leq N+1} \sum_{z \in Ant_i(n,x)} e^{S_i(\mathcal{B})(z)}, \tag{5.4}$$

où $C$ est une constante universelle qui prend en compte la majoration (5.3), la majoration uniforme obtenue dans le lemme 5.2.3, et la majoration de $\omega$ par une constante.

En sommant sur $n$ la majoration (5.4), on montre qu'il existe une constante universelle $C$, telle que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(r)(x) \quad \leq \quad \left( e^C \sum_{k=2}^{N+1} \mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^k(\mathbb{I}_F)(x) \right) + 2N \mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{I}_F)(x). \tag{5.5}$$

Comme $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{I}_F)(x)$ converge, $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}^k(\mathbb{I}_F)(x)$ converge pour tout $k$, et l'inégalité (5.5) montre que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(r)(x) < +\infty. \ \neg$$

On notera $\check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ la mesure $f$-invariante de probabilité sur $\Omega$ telle que le système dynamique $(\Omega, f, \check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$ induise le système dynamique $(R, g, \widehat{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}})$. Nous aurons encore

$$\mathcal{P}_{\check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}(f, \mathcal{A}) \quad = \quad \mathcal{P}_{\mathcal{A}} + \check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(R) \log \lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}. \tag{5.6}$$

### 5.2.2 Identification de la mesure $\mu^{\mathcal{A}}$

Nous venons de voir que $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$, $\widehat{\mu}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ et $\check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ existent, mais nous pouvons donner une autre caractérisation de ces mesures.

**Proposition 5.2.4** *La mesure d'équilibre $\mu^{\mathcal{A}}$ pour le potentiel $\mathcal{A}$ restreinte à $R$ est la mesure d'équilibre pour le potentiel $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$, c'est à dire :*

$$\mu^{\mathcal{A}} = \check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}.$$

La démonstration de cette proposition se fait en deux étapes. D'une part nous prouverons que $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \leq 1$ et d'autre part nous prouverons que $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \geq 1$. On aura alors $\mathcal{P}_{\check{m}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}}(f, \mathcal{A}) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

**Preuve de $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \leq 1$**

l'égalité (5.6) prouve que $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \leq 1$.

**Preuve de $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \geq 1$**

Nous allons démontrer par l'absurde que nécessairement $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} \geq 1$. On suppose donc que $\lambda_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}} < 1$. Alors $\mathcal{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ est une contraction, et pour tout $x$ de $F$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{1}_F)(x)$ converge. On se fixe un $x$ dans $F$. $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{1}_F)(x)$ est une somme convergente de termes positifs, et nous pouvons donc sommer ces termes dans n'importe quel ordre. On se fixe un entier $n$, et on choisit dans $\Omega$ un réseau $(\varepsilon, n)$-séparé maximal $E_n$,

**Lemme 5.2.5** *Il existe un entier $N$ indépendant de $n$, tel que pour tout $y$ de $E_n$ et pour tout $x$ dans $F$, il existe $z_y \in F$, vérifiant*
*(i) $\pi_F \circ f^{n+2N}(z_y) = x$ ,*
*(ii) $f^N(z_y)$ et $y$ sont $(\varepsilon, n)$ proches.*

*Démonstration* : On choisit $y$ dans $E_n$. La propriété de mélange (lemme A.1.2) montre qu'il existe un entier $N$ indépendant de $n$ et $y$, tel que $W^s_{\varepsilon/4}(y) \cap f^N(intR) \neq \emptyset$. Comme $R$ est de diamètre majoré par $\varepsilon$, on peut toujours supposer que $N$ est suffisamment grand pour que $diam^s(f^N(intR)) < \varepsilon/8$, et $diam^u(f^{-N}(intR)) < \varepsilon/8$. Ainsi, si $w \in W^s_{\varepsilon/4}(y) \cap f^N(intR)$, $f^N(W^s(f^{-N}(w), R)) \subset W^s_{3\varepsilon/8}(y)$. On peut donc supposer que $f^{-N}(w) \in F$. L'ensemble $\xi^u(f^n(w))$ contient une boule pour la topologie de $W^u_{loc}(f^n(w))$ de diamètre $\varepsilon/4$ qui contient $f^n(w)$, et que nous notons $U^u(f^n(w))$. Le mélange entraine encore que $U^u(f^n(w)) \cap f^{-N}(intR) \neq \emptyset$, et si $w' \in U^u(f^n(w)) \cap f^{-N}(intR)$, alors $f^{-N}(W^u(f^N(w'), R)) \subset U^u(f^n(w)) \subset W^u_{\varepsilon/4}(f^n(w))$. On peut donc supposer que $\pi_F \circ f^N(w') = x$. la propriété markovienne de la famille des $\xi^u$ entraine que $f^{-n-N}(w') \in F$ ; alors le point $z_y \stackrel{déf}{=} f^{-n-N}(w')$ est tel que $\pi_F \circ f^{n+2N}(z_y) = x$, et $f^N(z_y)$ et $y$ sont $(\varepsilon, n)$ proches. $\neg$

Réciproquement, si $z$ est dans $F$ et tel que $\pi_F \circ f^{n+2N}(z) = x$, alors il existe $y \in E_n$ tel que $f^N(z)$ et $y$ soient $(\varepsilon, n)$ proches. De plus, si $z$ et $z'$ sont dans $F$, et sont tels que
(i) $\pi_F \circ f^{n+2N}(z) = x = \pi_F \circ f^{n+2N}(z')$ ,
(ii) $f^N(z)$ et $y$ sont $(\varepsilon, n)$ proches, et $f^N(z')$ et $y$ sont $(\varepsilon, n)$ proches.

Comme les deux points $z$ et $z'$ sont $(2\varepsilon, n)$-séparés ($2\varepsilon$ est une contante d'expansivité), $z$ et $z'$ doivent être $(2\varepsilon, N)$-séparés ou $f^{n+N}(z)$ et $f^{n+N}(z')$ doivent être $(2\varepsilon, N)$-séparés. Il existe donc une constante universelle $e^C$ telle qu'au plus $e^C$ points $z$ distincts pistent le même $y$ du réseau $E_n$.

Notons $Ant_f(n+2N, x)$ l'ensemble des points $z$ de $F$ tels que $\pi_F \circ f^{n+2N}(z) = x$. Nous avons alors prouvé, qu'il existe une constante universelle $e^C$, telle que pour tout $n$,

$$e^{-C} \sum_{y \in E_n} e^{S_n(\mathcal{A})(y)} \leq \sum_{y \in Ant_f(n+2N,x)} e^{S_{n+2N}(\mathcal{A})(y')} \leq e^C \sum_{y \in E_n} e^{S_n(\mathcal{A})(y)}. \tag{5.7}$$

Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réseaux $(\varepsilon, n)$-séparés maximaux, (5.7) entraine qu'il existe $C$ constante universelle, telle que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{y \in E_n} e^{S_n(\mathcal{A})(y) - n\mathcal{P}_\mathcal{A}} &\leq e^C \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{y \in Ant_f(n+2N,x)} e^{S_{n+2N}(\mathcal{A})(y) - (n+2N)\mathcal{P}_\mathcal{A}} \\ &\leq e^C \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(\mathbb{1}_F)(x). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Nous savons (voir [4]) qu'il existe une constante universelle $C$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq \sum_{y \in E_n} e^{S_n(\mathcal{A})(y) - n\mathcal{P}_\mathcal{A}} \leq C,$$

pour tout réseau $(\varepsilon/2, n)$-séparé maximal $E_n$, et donc l'inégalité (5.8) montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(\mathbb{1}_F)(x)$ ne peut pas converger, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent $\lambda_\mathcal{A} \geq 1$. L'unicité de l'État d'Équilibre montre que nécessairement, $\mu^\mathcal{A} = \check{m}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$.

## 5.3 Démonstration des théorèmes

Dans cette partie nous supposerons que $S = \mathcal{P}_\mathcal{A}$. Pour simplifier les notations nous ne mettrons plus l'indice $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ et nous aurons juste les mesures $\mu$ et $m$ sur $F$, $\widehat{m}$ sur $R$. On notera toujours $\mu^\mathcal{A}$ la mesure étendue sur $\Omega$.

### 5.3.1 Équivalence des mesures désintégrées

Nous allons construire sur $\Omega$ une partition mesurable subordonnée au feuilletage stable. Si $x$ est dans $R$, on pose $\eta^n(x) = W^s(x, R)$. Si $x \in \Omega$ est n'est pas dans $R$, on note $n(x)$ le plus petit entier positif tel que

$$f^{-k}(x) \in R,$$

s'il existe. On pose alors $\eta^s(x) = f^{n(x)}(\eta^s(f^{-n(x)}(x)))$. La propriété de Markov du rectangle $R$ montre que $\eta$ est bien une partition mesurable et subordonnée au feuilletage stable. On définit ensuite l'image de $\eta$ sur $R$ par l'application $g$. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$g^n\eta^s(x) = \begin{cases} g^n\left(\eta^s(y)\right) & \text{s'il existe un } y \text{ dans } R_n \text{ tel que } g^n(y) = x, \\ \{x\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure $m$ est conforme de Jacobien $e^{-\mathcal{B}_{\mathcal{P}\mathcal{A}}-\log h+/log h\circ g_F}$, et donc la proposition 3.1.2 s'applique.

**Proposition 5.3.1** *Il existe un ensemble $\Gamma$ de $\widehat{m}$-mesure pleine tel que pour tout $x$ dans $\Gamma$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout atome de $g^n\eta^s$ qui n'est pas réduit à un point vérifie :*

$$\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta^s(y)) = \frac{h(y_F^n)}{h(y_F)} e^{S_{r^n(y_F^n)}(\mathcal{A})(y_F^n) - r^n(y_F^n)\mathcal{P}_{\mathcal{A}} + \omega\circ g^n(y_F^n)}$$

*où $y$ est un point de l'atome et $y_F = \pi_F(y)$ et $y_F^n = \pi_F \circ g^{-n}(y)$.*

Nous allons maintenant démontrer l'équivalence des mesures désintégrées.

**Proposition 5.3.2** *Pour tout couple de points $(x, y) \in \Gamma^2$ les mesures $\mu_x^{\mathcal{A},s}$ et $\mu_y^{\mathcal{A},s}$ sont équivalentes modulo l'holonomie instable. De plus si $z_1$ et $z_2$ sont respectivements deux points de $\eta^s(x) \cap R_\infty \cap R_{-\infty}$ et $\eta^s(y) \cap R_\infty \cap R_{-\infty}$ tels que $W^u(z_1, R) = W^u(z_2, R)$*

$$J(z_1, z_2) \overset{déf}{=} \frac{d\mu_x^{\mathcal{A},s}(z_1)}{d\mu_y^{\mathcal{A},s}(z_2)} = \frac{h(y_F)}{h(x_F)} e^{\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathcal{A}\circ f^{-k}(z_1) - \mathcal{A}\circ f^{-k}(z_2)) + \omega(z_1) - \omega(z_2)\right)},$$

*avec $x_F = \pi_F(x)$ et $y_F = \pi_F(y)$.*

*Démonstration* : Soient $x$ et $y$ deux points quelconques de $\Gamma$. On commence par remarquer que si $z \in \eta^s(x)$ et si $g^n\eta(z) = \{z\}$, alors nécessairement $\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta(z)) = 0$. De plus la propriété de contraction le long du feuilletage stable montre que pour obtenir l'équivalence des mesures, il suffit de prouver l'existence d'une constante universelle $C$, indépendante de $x$ et $y$, telle que pour tout couple de points $z_1$ et $z_2$ vérifiants

$(i)$ $z_1 \in W^s(x, R)$, $z_2 \in W^s(y, R)$ ;
$(ii)$ $z_1 \in W^u(z_2, R)$ ;
$(iii)$ pour tout $n$, $g^n\eta(z_1) \neq \{z_1\}$.

alors

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta(z_1))}{\mu_y^{\mathcal{A},s}(g^n\eta(z_2))} \leq C. \tag{5.9}$$

On remarque alors que (5.9) est une conséquence directe de la proposition 5.3.1, des propriétés de continuité höldérienne de $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ et de $\omega$, et du fait que $h$ est une fonction continue sur le compact $F$ ne s'annulant pas. La partition $\eta$ est génératrice sur chaque feuille stable de $R$, et on prouve ainsi que les deux mesures sont équivalentes.

Il reste à estimer le Jacobien. Le théorème des martingales assure qu'on doit nécessairement avoir (avec les notations de l'énoncé)

$$J(z_1, z_2) \stackrel{déf}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta^s(z_1))}{\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta^s(z_2))}.$$

On fixe donc $n$, et on note $r = r^n(z_{1F}^n) = r^n(z_{2F}^n)$. La proposition 5.3.1 montre que

$$\frac{\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta^s(z_1))}{\mu_x^{\mathcal{A},s}(g^n\eta^s(z_2))} = \frac{h(z_{1F}^n)}{h(z_{2F}^n)}\frac{h(z_{2F})}{h(z_{1F})}e^{S_r(\mathcal{A})(z_{1F}^n)-S_r(\mathcal{A})(z_{2F}^n)+\omega(z_{1F})-\omega(z_{2F})}. \tag{5.10}$$

Par continuité de la fonction $h$, qui est minorée par une constante strictement positive sur $F$, le terme $\frac{h(z_{1F}^n)}{h(z_{2F}^n)}$ converge vers 1 lorsque $n$ va à l'infini. De plus, la propriété de continuité höldérienne de $\mathcal{A}$ et les contractions/dilatations le long des feuilletages montrent qu'il existe une constante universelle $C$ telle que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{r/2}^{r-1} \mathcal{A}\circ f^k(z_{2F}^n) - \mathcal{A}\circ f^{k-r}(z_2)\right| &\leq \frac{C}{\lambda^{r/2}}\\
\left|\sum_{r/2}^{r-1} \mathcal{A}\circ f^k(z_{1F}^n) - \mathcal{A}\circ f^{k-r}(z_1)\right| &\leq \frac{C}{\lambda^{r/2}}\\
\left|\sum_{0}^{r/2} \mathcal{A}\circ f^k(z_{2F}^n) - \mathcal{A}\circ f^{k-r}(z_{1F}^n)\right| &\leq \frac{C}{\lambda^{r/2}}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

et la série d'inégalités (5.11) montre que

$$\lim_{n\to+\infty} S_r(\mathcal{A})(z_{1F}^n) - S_r(\mathcal{A})(z_{2F}^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}\circ f^{-k}(z_1) - \mathcal{A}\circ f^{-k}(z_2).$$

La proposition est alors démontrée. ¬

On peut procéder de même en inversant $f$ et $f^{-1}$. On construit alors une partition mesurable subordonnée au feuilletage instable, et on prouve que les mesures désintégrées instables $\mu^{\mathcal{A},u}$ sont équivalentes pour tous les points d'un même ensemble $\Gamma'$ de $\mu^{\mathcal{A}}$-mesure pleine dans $R$. toutes ces mesures étant équivalentes entre elles, en chaque point $x$ de $\Gamma'$ les mesures $\mu_x^{\mathcal{A},u}$ et $\pi_{W^u(x,R)*}\mu^{\mathcal{A}}$ sont équivalentes, et il existe une application $\phi_x$ telle que

$$\frac{d\mu_x^{\mathcal{A},u}(z)}{d\mu_x(z)} = \phi_x(z), \tag{5.12}$$

où $\mu_x$ désigne la mesure de Gibbs trouvée sur le feuille $W^u(x, R)$ pour le paramètre $S = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. La fonction $h$ étant bornée loin de 0, et $\omega$ étant aussi continue et bornée, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq \phi \leq C.$$

### 5.3.2 Démonstration du théorème B

Soit $x_0$ un point de $R$. Si $z$ est un point quelconque de $R$, il existe un unique couple de points $x \in W^u(x_0, R)$ et $y \in W^s(x_0, R)$ tel que

$$z = [x, y].$$

La définition des mesures désintégrées sur le feuilletage stable montre que pour $\widehat{m}$-presque tout $z$ de $R$,

$$d\widehat{m}(z) \;=\; d\mu_x^{\mathcal{A},s}(y) \otimes dm_y(x), \tag{5.13}$$

où $m_y$ désigne la mesure quasi-Gibbs obtenue si on fait $F = W^u(y, R)$. Les deux mesures $\mu_y^{\mathcal{A},u}$ et $m_y$ sont équivalentes sur la feuille $W^u(z, R)$, et les relations (5.12) et (5.13) montrent que

$$d\widehat{m}(z) \;=\; \phi^{-1}(z, y)\, d\mu_x^{\mathcal{A},s}(y) \otimes d\mu_y^{\mathcal{A},u}(x). \tag{5.14}$$

Les deux partition mesurables $\eta^u$ et $\eta^s$ étant fixées, nous savons (voir [15] et [16]) que les mesures $\mu^{\mathcal{A},u}$ et $\mu^{\mathcal{A},s}$ ont $\mu^{\mathcal{A}}$-presque partout des dimensions ponctuelles, notées respectivement $\delta^u$ et $\delta^s$.

*Remarque* : L'hypothèse $f$ $C^2$-difféomorphisme faite dans [15] et [16] est superflue dans notre cas, puisque les exposants de Lyapunov associés à $\mu^{\mathcal{A}}$ sont tous non nuls.

La continuité des applications $x \mapsto E_x^u$ et $x \mapsto E_x^s$ montre qu'il existe une constante universelle, ne dépendant que de $f$ et de la partition $\mathcal{R}$, telle que pour tout $\rho$ suffisament petit on ait :

$$\left[B^u(x, \frac{\rho}{C}); B^s(x, \frac{\rho}{C})\right] \subset B(x, \rho) \subset \left[B^u(x, C\,\rho); B^s(x, C\,\rho)\right].$$

L'équivalence des mesures conditionnelles montre alors qu'il existe une constante universelle, $C$, telle que pour tout $\rho$ suffisament petit, $\mu^{\mathcal{A}}$-presque partout,

$$\frac{1}{C}\, {\mu^{\mathcal{A},u}}_x\,(B^u(x,\rho))\,.{\mu^{\mathcal{A},s}}_x\,(B^s(x,\rho)) \leq \mu^{\mathcal{A}}([B^u(x,\rho); B^s(x,\rho)]) \leq C\, {\mu^{\mathcal{A},u}}_x\,(B^u(x,\rho))\,.{\mu^{\mathcal{A},s}}_x\,(B^s(x,\rho))\,.$$

On en déduit alors le théorème. $\neg$

### 5.3.3 Démonstration du théorème A

Dans [5], Bowen et Marcus montrent que, du fait du mélange, il suffit de montrer l'existence et l'unicité de la composante de la mesure transverse sur la seule transversale $F$. Nous allons donc prouver que seule la mesure $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ vérifie la propriété de $e^w$-absolue continuité. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

*Étape 1 : $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ vérifie la propriété recquise.*
Si $C$ et $C'$ sont deux cylindres d'ordres respectifs $n$ et $m$ distincts, et si $r^n(C)$ le $n$-ième temps de retour de $C$ est égale à $r^m(C')$ le $m$-ième temps de retour de $C'$, les deux cylindres sont alors $W^s$ conjugués. Ceci montre que si une des mesures $(\mu_S)_{S\geq\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ est solution du problème, nécessairement le terme $\log\lambda_S$ doit être nul, et la relation

$$\mathcal{P}_{\check{m}_S}(f,\mathcal{A}) = S + \check{m}_S(R)\log\lambda_S$$

montre que $\lambda_S = 1$ si et seulement si $S = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Ainsi seule la mesure $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ peut être solution, parmis les mesures $(\mu_S)_{S\geq\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$.

On vérifie maintenant que $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ vérifie la propriété recquise. On prend donc deux boréliens de $F$, $A$ et $A'$ qui sont $W^s$-conjugués. On note $\pi_{A,A'}$ une holonomie stable mesurable de $A$ sur $A'$. Quitte à restreindre $A$ et $A'$ on peut les supposer tous les deux dans $F_\infty$. La propriété markovienne de $R$ implique que pour tout $x$ dans $A$, il existe un plus entier $n(x)$ à partir duquel, pour tout $n\geq n(x)$, $f^n(x)$ et $f^n\circ\pi_{A,A'}(x)$ sont, soit tous les deux hors de $R$, soit tous les deux dans $R$. On écrit alors $A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, où $x\in A_n$ si et seulement si $n = n(x)$. A ceci correspond aussi une partition $A' = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A'_n$. On partitionne à nouveau chaque ensemble $A_n$ en une suite de boréliens $(A_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$, telle que sur chaque ensemble $A_n^m$, l'application $f^n$ correspond à l'application $g^{k(n,m)}$, pour un certain entier $k(n,m)$. Reporté sur $A'_n$ cela donne une partition $A'_n = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} A'^m_n$, telle que sur chaque $A'^m_n$, $f^n$ correspond à un $g^{k'(n,m)}$. La propriété de cocycle de la fonction $\mathcal{B}$, et le fait que $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ est une mesure conforme, prouvent que

$$\forall(n,m)\ \in\ \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\quad \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(A'^m_n) = \int_{A_n^m} e^{w(\pi_{A,A'}(x),x)}\,d\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(x).$$

La mesure $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ est bien solution du problème.

*Étape 2 : unicité de la solution.*
On choisit une mesure, $\mu$, borélienne et de probabilité sur $F$, qui est solution du problème. Nous allons d'abord montrer, que si $\mu(F_\infty) = 1$, alors $\mu = \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$.

**Définition 5.3.3** *Dans cette section, on appellera cylindre de module $n$ de $F$, tout cylindre, $C$, de $F$ d'ordre $k$, avec $r^k(C) = n$, où $r^k(C)$ désigne le $k$-ième temps de retours du cylindre. On notera $\mathcal{C}_n$ leur ensemble.*

Nous donnons quelques lemmes préparatoires.

**Lemme 5.3.4** *Si $C$ et $C'$ sont deux cylindres différents de module $n$, alors $C \cap C' = \emptyset$.*

*Démonstration* : Par définition des cylindres, il existe $x$ et $x'$, respectivement dans $intC$ et $intC'$, tels que $f^n(x) \in intW^u(f^n(x), R)$ et $f^n(x') \in intW^u(f^n(x'), R)$. Si $y \in C \cap C'$, $f^n(y)$ est dans $intW^u(f^n(x), R) \cap intW^u(f^n(x'), R)$, qui sont deux feuilles disjointes, car $C \neq C'$, ce qui est absurde. $\neg$

**Lemme 5.3.5** *il existe une constante, $K > 0$, telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C) = K.$$

*Démonstration* : Ceci résulte du mélange de la mesure $\mu^{\mathcal{A}}$. Par définition $\lim_{n \to +\infty} \mu^{\mathcal{A}}(R \cap f^{-n}(R)) = (\mu^{\mathcal{A}}(R))^2$. De plus $\mu^{\mathcal{A}}(R \cap f^{-n}(R)) = m_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C).\mu^{\mathcal{A}}(R)$ et les deux mesures $m_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ et $\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}$ sont équivalentes. $\neg$

Comme $\mu$ est solution, la propriété de $e^w$-absolue continuité montre que

$$\begin{aligned} \mu(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C) &= \sum_{C \in \mathcal{C}_n} \mu(C) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}_n} \int_{C_0} e^{\pi_{C_0, C}(x), x} d\mu(x) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}_n} \frac{\int_{C_0} e^{\pi_{C_0, C}(x), x} d\mu(x)}{\int_{C_0} e^{\pi_{C_0, C}(x), x} d\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(x)} \int_{C_0} e^{\pi_{C_0, C}(x), x} d\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(x) \end{aligned} \tag{5.15}$$

La relation (5.15), les propriétés de continuité höldérienne de la fonction $\mathcal{A}$, et la définition des cylindres de modules $n$, montrent qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que

$$\frac{\mu(C_0)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C_0)} e^{-\kappa} \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C) \leq \mu(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C) \leq \frac{\mu(C_0)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C_0)} e^{\kappa} \mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(\bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_n} C), \tag{5.16}$$

où $C_0$ est un cylindre de module $n$. On remarque que les propriétés de $e^w$-a.c. entrainent que la relation (5.16) est vraie quel que soit le cylindre de module $n$, $C_0$, choisi, car il existe une constante universelle $\kappa$ telle que si $C$ et $C'$ sont deux cylindres de module $n$

$$\frac{\mu(C)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C)} e^{-\kappa} \leq \frac{\mu(C')}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C')} \leq e^{\kappa} \frac{\mu(C)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C)}. \tag{5.17}$$

Ceci implique que la famille des valeurs de $\frac{\mu(C)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C)}$ quand $C$ est un cylindre de module $n$, et quand $n$ décrit $\mathbb{N}^*$ est une famille bornée par une constante $D$. Sinon, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_{n \to +\infty} \max \left\{ \frac{\mu(C)}{\mu_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}(C)}, C \in \mathcal{C}_n \right\} = +\infty,$$

et (5.16) montre alors $\lim_{n\to+\infty}\mu(\bigsqcup_{C\in\mathcal{C}_n} C) = +\infty$, ce qui est absurde, $\mu$ étant de probabilité sur $F$. Les cylindres de $F$ sont générateurs au sens des mesures $\mu$ et $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ puisque $\mu(F_\infty) = \mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(F_\infty) = 1$, ce qui prouve que nécessairement la mesure $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$.

**Lemme 5.3.6** *Si $C_n$ désigne un cylindre de module $n$, alors*

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{\mu(C_n)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_n)} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\mu(C_n)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_n)} = 0.$$

*Démonstration* : on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux sous-suites $(n_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$, et $(n_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty}\frac{\mu(C_{n_k^1})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^1})} = 0,\\ &\forall k,\quad \frac{\mu(C_{n_k^2})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^2})} > K_0,\end{aligned}$$

où $K_0$ est une constante strictement positive. Soit $\varepsilon$ petit et fixé, et $k$ pris tel que $\frac{\mu(C_{n_k^1})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^1})} < \varepsilon$. On notera $C$ au lieu de $C_{n_k^1}$. La relation (5.16) restreinte à $C$, montre qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que

$$\frac{\mu(C_{n_k^2})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^2})}e^{-\kappa}\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C), \ \leq \mu((\textstyle\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C) \ \leq \dfrac{\mu(C_{n_k^2})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^2})}e^{\kappa}\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\displaystyle\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C).$$

L'équivalence des deux mesures, $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ et $m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$, fait qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que pour tout $k$,

$$e^{\kappa} \leq \frac{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C)}{m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C)} \leq e^{\kappa}.$$

De plus la mesure $m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ est la projection de $\widehat{m}_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$, elle-même restriction renormalisée de $\mu^\mathcal{A}$ à $R$. Ainsi $m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C) = \frac{\mu^\mathcal{A}(f^{-n_k^2}(R)\cap\pi_F^{-1}(C))}{\mu^\mathcal{A}(R)}$, et le mélange montre que $\lim_{n\to+\infty} m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C) = m_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C)\mu^\mathcal{A}(R)$. Il existe donc une constante universelle $\kappa$, telle que

$$K_0e^{-\kappa} \leq e^{-\kappa}\frac{\mu(C_{n_k^2})}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_{n_k^2})} \leq \frac{\mu((\bigsqcup_{C'\in\mathcal{C}_{n_k^2}} C')\cap C)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C)} \leq \frac{\mu(C)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C)} \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde, et donc le lemme est prouvé. $\neg$

Supposons maintenant que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu(C_n)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_n)} = 0$. En recouvrant $F_\infty$ par des cylindres d'ordre assez grand, et donc de grand module, le mélange montre que

$\mu(F_\infty) = 0$, ce qui est faux. Ainsi $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\mu(C_n)}{\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C_n)} > 0$, ce qui signifie que $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\mu$, et donc $\mu$ et $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ sont équivalentes.

Il existe une fonction mesurable et presque surement bornée, $\varphi$, telle que $d\mu = \varphi\, d\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$, et $\int \varphi\, d\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}} = 1$. Les deux mesures $\mu$ et $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ étant toutes les deux $e^w$-a.c., la fonction $\varphi$ vérifie la propriété suivante.

$$\text{pour } \mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}} - p.p.x, \forall\ y \in\ W^s(x) \cap F,\ \varphi(x) = \varphi(y). \tag{5.18}$$

Supposons que $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(\varphi \neq 1) > 0$, comme $\int \varphi d\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}} = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(E) > 0$, avec $E = \{x, \varphi(x) > 1 + \eta\}$. On choisit $x$ point de densité de $E$. Le théorème des martingale établit que pour tout $\varepsilon$, il existe $N$ tel que pour tout cylindre d'ordre $n \geq N$, $C$, avec $x \in C$,

$$\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C \cap E) > (1-\varepsilon)\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C).$$

On choisit un tel cylindre $C$ d'ordre $n$. $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$-presque tout point de $C \cap E$ est point de densité de $E$. A chaque $y$ de densité de $E \cap C$, on associe un cylindre $C(y)$ comme dans le théorème des martingales, d'ordre $p >> n$, tel que la variation de $S_n(\mathcal{A})$ sur chaque cylindre d'ordre $p$ soit plus petite que $\varepsilon/3$, et

$$\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C(y) \cap E) > (1-\varepsilon)\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C(y)).$$

De l'ensemble de cylindres ainsi obtenu on extrait un sous-ensemble de cylindres disjoints recouvrant les même points de $F$. Si le cylindre $C$ est tel que $r^n(C) = s$, alors tout cylindre de module $s$, $C'$, est $W^s$-conjugué à $C$, et la propriété de $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ entraine que

$$\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C' \cap E) > (1-\varepsilon)^2 e^{2\varepsilon/3}\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(C').$$

Le mélange montre alors qu'on doit avoir $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(E) \geq (1-\varepsilon)^2 e^{2\varepsilon/3}$, et donc en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}(E) = 1$, ce qui est impossible. Donc $\mu = \mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$.

Nous allons maintenant montrer que si $\mu$ est solution du problème, alors nécessairement $\mu(F_\infty) = 1$. Du fait de la propriété markovienne de $R$, et l'existence des ensembles $\xi^u(f^k(x))$ et $\xi^s(f^k(xx))$ montrent que si $x$ ne revient jamais dans $R$ par itération de $f$, alors pour tout $y \in W^s(x) \cap F$, $y$ ne revient qu'un nombre fini de fois dans $R$ par itération de $f$. Si on suppose que $\mu(H) > 0$, alors il existe $(\alpha, \beta)$ deux réels positifs, tels que $\alpha + \beta = 1$, et deux mesures de probabilités sur $F$, solutions du problèmes, $\mu_1$ et $\mu_2$, telles que

*1* $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ ;

*2* $\mu_1(F_\infty) = 1$, et $\mu_2(H) = 1$.

Ceci montre qu'on peut se ramener au cas ou $\mu(H) = 1$. Nous allons chercher à exprimer une contradiction.

Ici nous utilisons la propriété géométrique du système de posséder un recouvrement markovien. Quitte à redécouper les rectangles on peut toujours supposer que $R$ est l'un d'eux. Puisque $H$ est de mesure $\mu$ totale, presque tout point de $H$ est de densité. Il existe donc un point $x$ de densité, tel que l'orbite de $x$ soit une infinité de fois dans un des rectangles du recouvrement. On suppose par exemple que $f^N(x)$ revient une infinité de fois dans le rectangle qui le contient, $R'$. Le raisonnement précédent s'appliquera à ce rectangle, et la mesure $f^N_*(\mu)$ restreinte à la feuille instable du rectangle $R'$, $W^u(f^N(x), R')$ doit être la mesure $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$ de ce rectangle. Par $f$-invariance de la mesure d'équilibre, $\mu$ doit aussi être la mesure $\mu_{\mathcal{P}_\mathcal{A}}$, ce qui constitue une contradiction. $\neg$

# Annexe A

Nous allons donner ici quelques propriétés que nous avons utilisées.

## A.1 Éloignement du bord

Ici, nous utilisons la propriété géométrique du système $(\Omega, f)$, d'avoir des partitions markoviennes. On suppose donc qu'on dispose d'un recouvrement de $\Omega$ par des rectangles propres, qui vérifie la propriété de Markov. Cette construction est possible si on procède comme dans [4]. Par compacité, on suppose que ce recouvrement est fini, et on peut aussi supposer que les intérieurs des rectangles sont disjoints. On appelle ces rectangles $\{R_i\}$, et $\mathcal{R}$ sera leur ensemble. Les termes $\partial^u\mathcal{R}$ et $\partial^s\mathcal{R}$ désigneront respectivement la réunion de leur bord instable et stable.

**Lemme A.1.1** *Soit $x$ dans $R_0$, tel que $f^n(x) \in R_0$ et $f^k(x) \notin R_0$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$. Alors il existe une famille d'ensembles $(\xi^s(f^k(x)))_{1\leq k\leq n}$ telle que*
*(i) $\xi^s(f^n(x)) = W^s(f^n(x), R_0)$ ;*
*(ii) pour tout $k$ dans $[1, n-1]$ $\xi^s(f^k(x)) \subset W^s_{loc}(f^k(x))$, et $\xi^s(f^k(x)) \cap R_0 = \emptyset$ ;*
*(iii) pour tout $k$, $f(\xi^s(f^k(x))) \subset \xi^s(f^{k+1}(x))$ ;*
*(iv) pour tout $k$, pour tout $m \leq 0$, si $f^m(\xi^s(f^k(x))) \cap intR_0 \neq \emptyset$, et si $w \in f^m(\xi^s(f^k(x))) \cap intR_0$, alors $f^m(\xi^s(f^k(x))) \supset W^s(w, R_0)$.*
*De plus, il existe une constante uniforme $\varepsilon$ telle que*

$$\xi^s(f^k(x)) \supset B^s(y_k, \varepsilon) \ni f^k(x)$$

*pour un certain $y_k$.*

*Démonstration* : Prenons $x$ et $n$. On commence par poser $\xi^s(f^n(x)) = W^s(f^n(x), R_0)$ et $\xi^s(x) = W^s(x, R_0)$. Il existe un rectangle $R_i \neq R_0$ tel que $\xi^s(f(x)) \in R_i$. La propriété de Markov de $\mathcal{R}$ montre que $f(\xi^s(x)) \subset W^s(f(x), R_i)$ ; on pose alors $\xi^s(f(x)) = W^s(f(x), R_i)$. En procédant ainsi on construit les suites d'ensembles $(\xi^s(f^k(x)))$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de rectangle, $\{\partial^u R_i\}$ est une réunion finie de compacts. De plus, tout $z$ dans $\Omega\backslash\partial^u\mathcal{R}$, est dans une boule de diamètre assez grand, qui n'intersecte pas avec $\partial^u\mathcal{R}$. Cela prouve que chaque $\xi^s(f^k(x))$ contient une boule de rayon $\varepsilon/2$. De plus, deux points $x$ et $y$, dans deux rectangles différents sont tels que $\xi^s(x) \cap \xi^s(y) = \emptyset$. Le point $(iv)$ est une directe conséquence de la continuité de $f$ et de la propriété markovienne de $\mathcal{R}$. $\neg$

*Remarque.* De même, il existe une famille d'ensembles $(\xi^u(f^k(y)))_{1 \leq k \leq n}$ avec des propriétés symétriques.

On énonce maintenant le mélange d'une manière différente.

**Lemme A.1.2** *Soit $\varepsilon$ une constante d'expansivité. Il existe un entier $N$ tel que pour tout $x \in \Omega$ $W^u_\varepsilon(x) \cap f^{-N}(intR_0) \neq \emptyset$.*

*Démonstration* : Comme $intR_0$ est un ouvert, il contient un point périodique $x_0$. $W^s(x_0)$ est dense dans $\Omega$, et si $p_0$ est la période de $x_0$, et $W^u_\varepsilon(x) \cap f^{-np_0} W^s(x_0, intR_0)$, alors il existe un ouvert $U$ contenant $x$ tel que pour tout $y$ dans $U$ $W^u_\varepsilon(y) \cap f^{-np_0} W^s(x_0, intR_0)$. Par compacité, on peut trouver un nombre fini de tels ouverts, et donc un $N$ maximal. $\neg$

*Remarque.* Si $N$ est pris suffisament grand, on sait que $f^N(W^u_\varepsilon(x)) \cap intR_0$ est une feuille instable de $intR_0$. De même, si $N$ est suffisament grand, $W^s_\varepsilon(x) \cap f^N(intR_0) \neq \emptyset$ pour tout $x$ et $f^{-N}(W^s_\varepsilon(x)) \cap intR_0$ est une feuille stable de $intR_0$.

## A.2 Une propriété de $G$

l'ensemble $G$ des points qui sont dans plusieurs cylindres de même ordre a été supposé négligeable pour tout mesure $g_F$-invariante. Nous allons en donner ici la raison.

**Lemme A.2.1** *Si $x$ est un point de $G$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $n$, tels que $g^n_F(x) \in G$.*

*Démonstration* : on raisonne par l'absurde. On commence par remarquer, que si $g^n_F(x) \in G$, alors nécessairement $g^k_F(x) \in G$ pour tout $k$ plus petit que $n$. Si $x$ est un point pour lequel il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $g^n_F(x) \in G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n_F(x) \in G$. Ceci entraine que pour tout $n$, il existe trois cylindres $C_n$,$C'_n$ et $C_{n-1}$ d'ordres respectifs, $n$, $n$, et $n-1$, tels que $C_n \neq C'_n$, $C_n \subset C_{n-1}$ et $C'_n \subset C_{n-1}$.

Le point $x$ est donc dans deux cylindres de même ordre $n_0$, qu'on notera $C^1_0$ et $C^2_0$. Quitte à itérer, on peut supposer que ces deux cylindres sont d'ordre 1. L'un a nécessairement un temps de premier retour plus petit que l'autre, sinon ces deux cylindres seraient égaux. On suppose que c'est $C^1_0$, et que son temps de retour est $p_1$. Alors $g_F(x) = \pi_F \circ f^{p_1}(x)$, et $g_F(x)$ doit être dans deux cylindres de même ordre. Ceci prouve que dans $C^1_0$, $x$ est dans deux cylindres différents et de même ordre (au moins égale à 2). La propriété de Markov de $R$ montre que ces deux cylindres ne sont pas dans $C^2_0$. Le même raisonnement fait sur le temps de premier retour de $C^2_0$ montre que dans ce cylindre, $x$ est également deux cylindres différent de même ordre, au moins égale à 2. Ainsi $x$ est au moins dans 4 cylindres différents, $C^1_1$, $C^2_1$, $C^3_1$, et $C^4_1$, les deux premiers étant dans $C^1_0$ et de même ordre $n_1$, les deux derniers dans

$C_0^2$ et de même ordre, $n_2$. Les quatre temps de retours $r^{n_1}(C_1^1)$, $r^{n_1}(C_1^2)$, $r^{n_2}(C_1^3)$, et $r^{n_2}(C_1^4)$ sont nécessairement tous distincts, deux à deux, car un point ne peut pas être dans deux feuilles instables de $R$ différentes. On montre ainsi que le point $x$ est nécessairement dans $2^n$ cylindres d'ordre $n$ différents. Fixons l'un d'eux et notons $N$ sont temps de $n$-ième retour dans $R$. $f^N(x)$ est dans $R$, mais les images par $f^N$ des $2^n - 1$ autres cylindres ne rencontrent $R$ que sur son bord. Le lemme A.1.1, montre que dans chaque image par $f^N$ d'un des cylindres, il existe un boule de rayon $\varepsilon/2$, aussi proche qu'on veut de $f^N(x)$. Toutes ces boules doivent être d'intérieurs disjoints, or un point ne peut appartenir à au plus $C(u)$ boules fermées d'intérieurs disjoints. Ceci finit la démonstration par l'absurde. $\neg$

## A.3 Propriété de $S \mapsto \log \lambda_S$

Si on se fixe $S_1$ et $S_2$ deux réels strictement plus grand que $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, et si $t \in [0,1]$, alors si on pose $S_3 \overset{déf}{=} S_1 + (1-t)S_2$, l'inégalité de Hölder donne :

$$\mathcal{L}_{S_3}(\mathbb{1}_F)(x) \overset{déf}{=} \sum_{y \in Ant(x)} \left(e^{\mathcal{B}_{S_1}(x)}\right)^t \left(e^{\mathcal{B}_{S_2}(x)}\right)^{1-t} \leq \left(\mathcal{L}_{S_1}(\mathbb{1}_F)(x)\right)^t \left(\mathcal{L}_{S_2}(\mathbb{1}_F)(x)\right)^{1-t}$$

pour tout $x$ dans $F$. L'inégalité de Hölder donnera de même :

$$\mathcal{L}^n_{S_3}(\mathbb{1}_F)(x) \leq \left(\mathcal{L}^n_{S_1}(\mathbb{1}_F)(x)\right)^t \left(\mathcal{L}^n_{S_2}(\mathbb{1}_F)(x)\right)^{1-t}$$

pour tout $x$ dans $F$ et pour tout entier $n$. Si nous prouvons que $\frac{1}{n} \log \mathcal{L}^n_S(\mathbb{1}_F)(x)$ converge vers $\lambda_S$ lorsque $n$ tend vers l'infini, nous aurons alors prouvé que $S \mapsto \log \lambda_S$ est convexe, ce qui entrainera la continuité de $S \mapsto \lambda_S$. L'idée est alors d'étudier plus attentivement l'opérateur $\mathcal{L}_S$. En particulier nous avons :

**Proposition A.3.1** *Pour tout $S > S_S$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_S$ de module $\lambda_S$ sont simples. De plus elles sont toutes de la forme $\lambda_S \, e^{2ik\pi/p}$ où $p$ est le cardinal de leur ensemble et $k$ un entier. Ceci est encore valable pour $S = S_S$ si $\mathcal{L}_S(\mathbb{1})$ converge pour cette valeur du paramètre.*

*Démonstration* : On prouve d'abord que les valeurs propres de $\widehat{\mathcal{L}}_S$ de module 1 sont simples.
Soit $\lambda_i$ tel que $|\lambda_i| = 1$ et $\lambda_S \lambda_i$ soit valeur propre de $\mathcal{L}_S$. Le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu montre qu'il existe une fonction $u$ dans $C^0_\eta(F)$ telle que $\widehat{\mathcal{L}}_S(u) = \lambda_i \, u$. Par conséquent $|\widehat{\mathcal{L}}_S(u)| = |u|$ et par l'inégalité triangulaire on a $|\widehat{\mathcal{L}}_S(u)| \leq \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|)$. Cela donne finalement :

$$|u| \leq \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|).$$

Par ailleurs $\int \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|) \, d\mu_S = \int |u| \, d\mu_S$ puisque $|u|$ est une fonction continue. Cela prouve donc que

$$|u| = \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|) \ \mu_S - \text{presque partout.}$$

Nous savons que $\mu_S$ charge tous les cylindres, et donc $\mu_S$ charge tous les ouverts puisque chaque ouvert contient au moins un cylindre. Si $x \in F$ alors pour tout $\delta$ $\mu_S(B^u(x,\delta)) > 0$ et donc il existe $y \in B^u(x,\delta)$ tel que $|u(y)| = \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|)(y)$. Par continuité de $u$ on trouve que

$$|u| = \widehat{\mathcal{L}}_S(|u|) \text{ partout.}$$

De plus $||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|$ ce qui montre que $|u| \in C^0_\eta(F)$. Comme 1 est valeur propre simple de $\widehat{\mathcal{L}}_S$ il existe $K \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $|u| = K\,h$. Quitte à renormaliser, on peut supposer que $K = 1$. Il existe donc une fonction continue $v$ à valeur dans $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1 telle que $u = v\,h$.
Nous avons $\lambda_i v(x)h(x) = \frac{1}{\lambda_S}\sum_{y\in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(y)}v(y)h(y)$ ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda_i v(x) = \frac{1}{\sum_{y\in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(x)}h(y)} \sum_{y\in Ant(x)} e^{\mathcal{B}_S(x)}v(y)h(y).$$

C'est un barycentre à coefficients positifs de points de module 1 qui est lui-même de module 1. Ceci ne peut se faire que si $v(y) = \lambda_i v(x)$
Si on suppose maintenant que $u'$ est un autre vecteur propre de $\widehat{\mathcal{L}}_S$ dans $C^0_\eta(F)$ pour la valeur propre $\lambda_i$, alors la discussion précédente est encore valable et nous aurons une fonction $v'$ continue à valeurs dans $\mathbb{U}$ et telle que $v' = v' \circ g_F$. Si $w$ est une fonction continue sur $F$, on aura

$$\begin{aligned}\int \widehat{\mathcal{L}}_S(\frac{v}{v'} \circ g_F.h).w\,d\mu_S &= \int \frac{v}{v'} \circ g_F.w \circ g_F\,dm_S \\ &= \int \frac{v}{v'}.w\,dm_S = \int \frac{v}{v'}.w.h\,d\mu_S\end{aligned}$$

Or nous savons que $\int \widehat{\mathcal{L}}_S(\frac{v}{v'} \circ g_F.h).w\,d\mu_S = \int \widehat{\mathcal{L}}_S(\frac{v}{v'}.h).w\,d\mu_S$ puisque $\frac{v}{v'} \circ g_F = \frac{v}{v'}$. Nous en déduisons donc que

$$\widehat{\mathcal{L}}_S(\frac{v}{v'}.h) = \frac{v}{v'}.h \ \mu_S - \text{presque partout.}$$

Par continuité de $v$ et $v'$, et le fait que $\mu_S$ charge tous les ouverts, on aura

$$\widehat{\mathcal{L}}_S(\frac{v}{v'}.h) = \frac{v}{v'}.h \text{ partout.}$$

$h$ est une fonction strictement positive sur un compact, ce qui montre que $1/h$ est aussi dans $C^0_\eta(F)$, puis que $v$ et $v'$ sont dans $C^0_\eta(F)$. L'unicité du vecteur propre associé à 1 dans $C^0_\eta(F)$ montre alors que $\frac{v}{v'}$ est une fonction constante et réelle de module 1, ce qui ne peut être réaliser que si $v = \pm v'$ et $u = \pm u'$.
On prouve maintenant que les valeurs propres de $\widehat{\mathcal{L}}_S$ de module 1 sont des racines de l'unité.

Comme $v = \lambda_i . v \circ g_F$, on en déduit que pour tout entier $n$ on a $\lambda_i^n . v^n \circ g_F = v^n$ et donc pour tout $x$ dans $F$ :

$$\widehat{\mathcal{L}}_S(v^n h)(x) = \widehat{\mathcal{L}}_S(\lambda_i^n . v^n \circ g_F h)(x) = \lambda_i^n . v^n(x) h(x).$$

$\widehat{\mathcal{L}}_S$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres de module 1 ; elles forment donc un groupe d'ordre $p$ , et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\lambda_i = e^{2ik\pi/p}. \neg$$

*Remarque* : Une telle proposition aurait pu s'énoncer d'une manière plus générale, mais nous avons choisi de ne la démontrer que dans notre cas précis afin d'éviter d'avoir à introduire une mesure invariante par l'adjoint de l'opérateur $\Phi$ dans la partie sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu.
Nous avons ensuite deux corollaires à la proposition :

**Corollaire A.3.2** *Si $S > S_S$ est fixé, et si $p$ est le cardinal des valeurs propres de $\mathcal{L}_S$ de module $\lambda_S$, alors on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{np} \log |\mathcal{L}_S^{np}(\mathbb{1}_F)(x)| = \log \lambda_S$$

*pour tout $x$ dans $F$.*

*Démonstration* : D'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, la fonction $\mathbb{1}_F$ s'écrit $\sum_{k=1}^{p} \varphi_i + \psi$, où ces fonctions sont toutes continues, chaque $\varphi_i$ est telle que $\mathcal{L}_S(\varphi_i) = \lambda_i \lambda_S \varphi_i$ et pour tout $n$ , $\|\mathcal{L}_S^n(\psi)\| \leq \lambda_S^n \rho^n$, où $0 < \rho < 1$. De plus, si on suppose que $\lambda_1 = 1$, alors $\varphi_1 = h$. La proposition précédente montre que pour tout entier $n$, pour tout $x$ on aura :

$$\widehat{\mathcal{L}}_S^{np}(\mathbb{1}_F)(x) = 1 - \psi(x) + \widehat{\mathcal{L}}_S^{np}(\psi)(x).$$

On a donc le résultat souhaité puisque $h(x) > 0$ pour tout $x$. $\neg$

**Corollaire A.3.3** *La fonction $S \mapsto \log \lambda_S$ est convexe, et donc continue sur son domaine de définition.*

*Démonstration* : Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder avec $n = kp_1p_2p_3$, où $p_i$ est le cardinal de l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{L}_{S_i}$ de module $\lambda_{S_i}$, puis d'en prendre le log et de faire tendre $k$ vers l'infini en utilisant le corollaire précédent. $\neg$

# Deuxième partie

# Dynamique Non-Uniformément Hyperbolique

# Chapitre 1

# Introduction et premières définitions

## 1.1 Définition du cadre et premières définitions

Si on se donne une variété Riemannienne $C^\infty$ compacte, de dimension finie et sans bord, $M$, et si $f$ est un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme, on ne peut en général étudier le système dynamique défini par $(M, f)$ sans introduire la notion de mesure de probabilité invariante. En effet, sans hypothèses supplémentaires, il n'est plus possible de définir un ensemble uniformément hyperbolique comme dans le cas axiom-A. La solution consiste alors à utiliser le théorème d'Oseledec ([19] ou [15]), pour définir un ensemble de points hyperboliques de mesure pleine (si la mesure est ergodique). Nous savons alors définir dans ce cadre les notions de feuilletages stables et instables, et il est possible de récupérer certaines des propriétés des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. On peut remarquer par exemple, que s'il est nécessaire de se fixer à priori une mesure invariante pour définir les feuilletages, les variétés stables et instables ainsi construites n'en restent pas moins topologiques.

Une manière de retrouver un peu d'uniformité, consiste alors à étudier des familles d'ensembles, appelés ensembles de Pesin. Plus précisément, si $C$ est un réel dans $[1, +\infty[$, et si $r$ est un entier de $\mathbb{N}^*$, on notera $\Lambda_r^C$ l'ensemble des points de $M$ tels que, si $\varepsilon < 1/100 - \log(1 - 1/r)$, alors :

(1) il existe une décomposition de $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$,

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\forall\ v \in\ E^s_{f^m(x)} \begin{cases} \left\|df^n_{f^m(x)}(v)\right\| \leq C\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\ e^{n\varepsilon+|m|\varepsilon}\|v\| \\ \\ \left\|df^{-n}_{f^m(x)}(v)\right\| \geq \frac{1}{C}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\ e^{-n\varepsilon-|m|\varepsilon}\|v\| \end{cases}$$

$$\forall\ v \in\ E^u_{f^m(x)} \left\{ \begin{array}{l} \left\|df^n_{f^m(x)}(v)\right\| \geq \frac{1}{C}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\ e^{-n\varepsilon-|m|\varepsilon}\|v\| \\ \\ \left\|df^{-n}_{f^m(x)}(v)\right\| \leq C\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\ e^{n\varepsilon+|m|\varepsilon}\|v\|, \end{array}\right.$$

(3) L'angle $\gamma(f^m(x))$ entre $E^u(f^m(x))$ et $E^s(f^m(x))$ est tel que

$$\frac{1}{C}e^{-\varepsilon|m|/3} \leq \gamma(f^m(x)).$$

Ces ensembles ne sont pas $f$-invariants, mais ils ont certaines propriétés agréables. Dans [20], Pesin énonce en particulier le résultat suivant :

**Proposition 1.1.1** *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont vraies :*

- *Les ensembles $\Lambda_r^C$ sont fermés ;*
- *les applications $x \mapsto E^s(x)$ et $x \mapsto E^u(x)$ sont continues sur chaque $\Lambda_r^C$ ;*
- *l'ensemble $\Lambda_r \stackrel{déf}{=} \bigcup_{C\geq 1}\Lambda_r^C$ est $f$-invariant ;*
- *pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$ et pour tout $C \geq 1$, il existe un réel $\alpha = \alpha(C,q,r) > 0$ tel que $f^q(\Lambda_r^C) \subset \Lambda_r^\alpha$.*

Ces ensembles $\Lambda_r^C$ jouent donc un rôle essentiels dans la théorie de Pesin.

**Définition 1.1.2** *Soit $M$ un variété Riemannienne compacte $C^\infty$, de dimension finie et sans bord. Soit $f$ un $C^{1+\alpha}$ difféormorphisme de $M$ sur $M$. On dira qu'un point $x$ de $M$ est régulier s'il existe un réel $C \geq 1$ et un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \Lambda_r^C$. On notera $\Lambda$ l'ensemble des points réguliers.*

On rappelle qu'en tout point régulier on peut définir une variété stable et une variété instable, respectivement notées $W^s(x)$ et $W^u(x)$, de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{déf}{=} \{y, \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log d(f^n(y), f^n(x)) < 0\},$$

$$W^u(x) \stackrel{déf}{=} \{y, \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log d(f^n(y), f^n(x)) < 0\}.$$

*Remarque* : Le théorème d'Oseledec assure que pour chaque mesure borélienne de probabilité, hyperbolique et $f$-invariante sur $M$, l'ensemble des points réguliers est de mesure pleine.

L'ensemble des mesures $f$-invariantes est évidemment non dénombrable, et il est impossible de trouver ou de caractériser (en général) tous ses éléments. Par exemple, si $x_0$ est un point périodique de $M$ pour $f$, la mesure de comptage le long de son orbite, renormalisée, est une mesure borélienne de probabilité $f$-invariante. Un des buts que l'on peut se fixer, est de caractériser ces mesures invariantes, ou de chercher des particularités. Par exemple, une mesure ergodique peut se voir comme une mesure extrémale dans le compact convexe des mesures boréliennes de probabilité $f$-invariante.

Sur $M$, il existe une mesure "canonique", qui est la mesure riemannienne de la variété, *Leb*. Une question naturelle consiste alors à se demander si *Leb* est $f$-invariante ou non, ou plus généralement s'il existe des mesures absolument continues par rapport à *Leb* qui sont $f$-invariantes. Cette question est intéressante dans la mesure où la mesure *Leb* exprime une certaine "réalité" géométrique. D'autres mesures invariantes peuvent également exprimer des propriétés géométriques : le théorème de Birkhov assure que pour toute mesure borélienne de probabilité, invariante et ergodique, $\mu$, et pour toute fonction continue, $\varphi$, la moyenne temporelle converge presque surement vers la moyenne spatiale, c'est à dire

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f^k(x)\overset{\mu-p.s.}{\longrightarrow}\int\varphi\,d\mu.$$

Une question consiste alors à savoir si pour de telles mesures la convergence peut avoir lieu sur un ensemble de mesure de Lebesgue positive, pour toute fonction continue. Une mesure ayant cette propriété est alors appelée mesure de Sinai Ruelle Bowen, ou mesure SRB. Il existe d'autres définition des mesures boréliennes de probabilité SRB dans le cas uniformément hyperbolique : Ce sont aussi les mesures qui ont des mesures conditionnelles sur un des feuilletages stable ou instable absolument continues par rapport à la mesure riemannienne de la sous-variété, ou encore, les mesures qui sont d'équilibre pour le potentiel $-\log J^u$ ou $-\log J^s$.

Dans le cas non-uniformément hyperbolique, aucune définition précise n'existe, ni dans le cas des mesures $\sigma$-finies. Nous introduirons donc nos propres définitions.

Dans toute la suite, la mesure de Lebesgue désignera la mesure riemannienne de la variété ou sous-variété considérée. Par extension, elle désignera aussi cette mesure restreinte et renormalisée à un ensemble de mesure positive. A chaque fois, nous mettrons en indice l'ensemble pris comme ensemble de mesure pleine.

**Définition 1.1.3** *Si $\mu$ est une mesure borélienne, $\sigma$-finie, $f$-invariante, on dira qu'une partition mesurable $\xi^u$ est Lebesgue-subordonnée au feuilletage instable $W^u$, si et seulement si pour $\mu$-presque tout $x$, $\xi^u(x)$ est un borélien de mesure de Lebesgue, $Leb^u_{W^u(x)}$, positive.*

**Définition 1.1.4** *On appellera mesure $\sigma$-SRB toute mesure borélienne, $\sigma$-finie, $f$-invariante, $\mu$, telle que si on se donne, $\xi^u$, une partition mesurable Lebesgue-subordonnée au feuilletage instable, et si $\mu^u_x$ représente le système de mesures conditionnelles associées à $\xi^u$, alors $\mu^u_x$ est absolument continue par rapport à la mesure $Leb^u_{W^u(x)}$.*

## 1.2 L'atlas de Lyapunov

L'atlas de Lyapunov se construit généralement une fois qu'on s'est fixé une mesure hyperbolique $f$-invariante. Néanmoins il est facile de le construire sur tout $\Lambda_r$, dès que celui-ci n'est pas vide. On pourra voir [15] ou [25] pour une construction explicite.

Il existe une application borélienne $l$ définie sur $\Lambda_r$ telle que

- $l : \Lambda_r \longrightarrow [1, +\infty]$ ;
- $l(f^{\pm 1}(x)) \leq e^{\varepsilon} l(x)$,

et une famille de plongement $\Phi_x : B(0, l(x)^{-1}) \subset \mathbb{R}^d \to M$, telle que

(1) $\Phi_x(0) = x$, $d\Phi_x(0)$ envoie respectivement $\mathbb{R}^u \times \{0\}^s$ et $\{0\}^u \times \mathbb{R}^s$ sur $E^u(x)$ et $E^s(x)$ ;

(2) Si on pose $\widehat{f}_x \stackrel{déf}{=} \Phi_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \Phi_x$ et $\widehat{f}_x^{-1} \stackrel{déf}{=} \Phi_{f^{-1}(x)}^{-1} \circ f^{-1} \circ \Phi_x$, alors

Pour tout $v$ de $\mathbb{R}^u \times \{0\}^s$, $e^{\lambda - \varepsilon} \|v\| \leq \|d\widehat{f}_x(0).v\|$,

et pour tout $v$ de $\{0\}^u \times \mathbb{R}^s$, $\|d\widehat{f}_x(0).v\| \leq e^{-\lambda + \varepsilon} \|v\|$ ;

(3) $Lip(\widehat{f}_x - d\widehat{f}_x(0)) \leq \varepsilon$ et $Lip(\widehat{f}_x^{-1} - d\widehat{f}_x^{-1}(0)) \leq \varepsilon$ ;

(4) Si $\varphi$ est une application $\alpha$-Hölder, on note $Lip_\alpha$ la constante de Hölder. Alors, $Lip_\alpha(d\widehat{f}_x) \leq l(x)$, et $Lip_\alpha(d\widehat{f}_x^{-1}) \leq l(x)$ ;

(5) il existe une constante universelle $K_L$ telle que pour tout couple de points $(z, z')$ dans la boule $B(0, l(x)^{-1})$, on ait

$$K_L^{-1} d(\Phi_x(z), \Phi_x(z')) \leq \|z - z'\| \leq l(x) d(\Phi_x(z), \Phi_x(z')).$$

Si $l_0$ est fixé, et si $n$ est un entier strictement positif on note

$$\Lambda_r(n) \stackrel{déf}{=} \{x \in \Lambda_r \ , \ l_0 e^{(n-1)\varepsilon} < l(x) \leq l_0 e^{(n)\varepsilon}\},$$

$$\text{et } \Lambda_r(0) \stackrel{déf}{=} \{x \in \Lambda_r \ , \ l(x) \leq l_0\}.$$

Par définition, deux ensembles $\Lambda_r(n)$ et $\Lambda_r(m)$ différents ($n \neq m$) sont disjoints. L'hypothèse de variation lente de l'application $x \mapsto l(x)$ montre également que pour tout $n$, $f^n(\Lambda_r(0)) \subset \sqcup_{k=0}^n \Lambda_r(k)$.

Ces ensembles $\Lambda_r(n)$ montrent comment nous sommes loin du cas uniformément hyperbolique. Ils expriment le fait que les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ ne sont que mesurables et non pas continues, et qu'on ne peut espérer aucune uniformité. Nous allons définir maintenant un critère géométrique qui nous permettra d'avoir des structures produit locales.

**Définition 1.2.1** *Si $x$ est un point régulier, on note, avec les conventions introduites dans la présention de l'atlas de Lyapunov,*

$$W_l^u(x) = \{y \in M, \ \forall n \leq 0, \ f^n(y) \in \Phi_{f^n(x)} B(0, l^{-1}(f^n(x)))\}.$$

*On notera de même $W_l^s(x)$ en changeant $n$ en $-n$.*

**Hypothèse :** On dira que l'ensemble $\Lambda_r$ vérifie une hypothèse de non intersection brutale s'il existe une constante universelle $K_H < 1$, telle que pour Lebesgue-presque tout $x$ dans $\Lambda_r(n)$, il existe un entier $m(x)$ tel que pour tout entier $p \geq m(x)$ et pour tout $y \in \Lambda_r(p)$,

$$W_l^u(x) \cap B(y, K_H\, e^{-p\varepsilon}) = \emptyset \text{ et } W_l^s(x) \cap B(y, K_H\, e^{-p\varepsilon}) = \emptyset.$$

Une hypothèse d'intersection non brutale signifie qu'autour d'un point dans $\Lambda_r(n)$, les ensembles $\Lambda_r(p)$, avec $p$ grand, ne peuvent se rapprocher trop près des variétés stables et instables locales en $x$.

## 1.3 Résultat et plan de la preuve

L'atlas de Lyapunov montre que localement la situation n'est pas trop éloignée du cas uniformément hyperbolique. De plus une hypothèse de non intersection brutale montre que les variétés locales pourraient définir une structure produit comme dans le cas uniformément hyperbolique. Nous allons préciser cette notion de structure locale produit.

**Définition 1.3.1** *Si $\mu$ est une mesure borélienne $f$-invariante, on dira qu'elle a une structure locale produit, si pour $\mu$-presque tout $x$ de $M$, il existe un borélien $R$ de mesure de positive contenant $x$, et une application $\varphi$ de $R$ dans $W_l^u(x) \times W_l^s(x)$ telle que sur $R$ la mesure soit équivalente au produit de mesures, $\varphi_*^{-1}(\mu_{u,x} \otimes \mu_{s,x})$, $\mu_{u,x}$ étant portée par $W_l^u(x) \cap R$, et $\mu_{s,x}$ étant portée par $W_l^s(x) \cap R$.*

Le but de cette partie est alors de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 1.3.2** *Soit $M$ un variété Riemannienne compacte $C^\infty$, de dimension finie et sans bord. Soit $f$ un $C^{1+\alpha}$ difféormorphisme de $M$ sur $M$. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.*
*($H_1$) $Leb_M(\Lambda) > 0$ ;*
*($H_2$) le système $(M, f)$ est conservatif pour la mesure de Lebesgue ;*
*($H_3$) l'ensemble des points réguliers $\Lambda_r$ vérifie une hypothèse de non intersection brutale pour tout $r$ suffisament grand.*
*Alors, il existe une mesure borélienne, $\nu$, $\sigma$-finie,, $f$-invariante, qui est $\sigma$-SRB, et qui a une structure locale produit.*

Nous utiliserons souvent la notion de mesure conforme, et nous en rappelons donc la définition.

**Définition 1.3.3** *Soit $(X, \Phi)$ un système dynamique. Soit $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de $X$. Soit $m$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(X)$. On dira que $m$ est conforme s'il existe une fonction $J : X \mapsto \mathbb{R}^+$ borélienne telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ où $\Phi$ est injective et $\Phi(B)$ est un borélien, alors*

$$m\left(\Phi(B)\right) = \int_B J\, dm.$$

*Remarque* : si on a seulement, $m\,(\Phi(B)) \geq \int_B J\,dm$, on dira que $J$ est un sous-jacobien.

La définition entraine que pour toute fonction borélienne $f : X \mapsto \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\Phi(B)} f\,dm = \int_B f \circ \Phi\,J\,dm. \tag{1.1}$$

La fonction $J = J(m)$ s'interprète comme le jacobien de $m$ pour la transformation $\Phi$. Il est unique $m$-p.p.. Inversement si on connait une mesure $m$ telle que pour une transformation $\Phi$, il existe $J$ tel que pour tout borélien $B$ où $\Phi$ est injective, la relation (1.1) est vraie, alors la transformation sera dite conforme de jacobien $J$ pour la mesure $m$.

Dans toute la suite $M$ désignera une variété Riemannienne compacte $C^\infty$, de dimension finie $d$ et sans bord, et $f$ un $C^{1+\alpha}$ difféormorphisme de $M$ sur $M$.

Puisque $\Lambda = \bigcup_{r \in \mathbb{N}^*} \Lambda_r$, la réunion étant croissante, on choisit un entier $r$ suffisament grand pour que $Leb(\Lambda_r) > 0$. On choisit aussi un $\varepsilon$ comme dans la définition des ensembles $\Lambda_r^C$. On notera également $\lambda \stackrel{déf}{=} -\log(1 - 1/r)$.

Dans une première étape nous rappellerons la méthode de transformations de graphes, que nous utiliserons pour démontrer les propriétés principales des deux feuilletages, stable et instable. Nous redémontrerons alors le théorème de la variété (in)stable, ainsi que la propriété Hölder des feuilletages.

Dans un deuxième chapitre nous utiliserons la méthode de transformation de graphes et les propriétés établies pour démontrer un lemme de poursuite ; nous l'utiliserons pour construire un recouvrement markovien de $\Lambda_r$, puis nous étudierons les propriétés des feuilletages restreints aux rectangles.

Dans un troisième chapitre nous construirons à partir du recouvrement un sous-système dilatant et markovien. Nous démontrerons alors l'existence d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'ensemble. Nous relierons alors ce système à $(M, f)$, et démontrerons enfin le théorème.

# Chapitre 2

# Rappel sur les feuilletages

## 2.1 Transformations de graphes

### 2.1.1 Le cas linéaire

Nous allons dans cette partie redémontrer le théorème de transformation de graphe tel qu'on peut le trouver dans [12].

**Proposition 2.1.1** *Soit $E$ un espace de Banach et $T : E \mapsto E$ un endomorphisme tel qu'il existe $E_1$ et $E_2$ avec $E = E_1 \oplus E_2$ et $T : E_i \mapsto E_i$. On suppose que la norme choisie, $\| \|_E$, vaut la norme $\max(\| \|_{E_1}, \| \|_{E_2})$. Si on note $T_i \overset{déf}{=} T_{|E_i}$ on suppose alors que*

*$\|T_1^{-n}v\|_{E_1} \leq e^{-(\lambda_1-\varepsilon)n}\|v\|_{E_1}$ pour tout $v \in E_1$,*

*$\|T_2^{n}v\|_{E_2} \leq e^{(\lambda_2+\varepsilon)n}\|v\|_{E_2}$ pour tout $v \in E_2$,*

*avec $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ et $\varepsilon < \frac{-\lambda_2}{100}, \frac{\lambda_1}{100}$ ;*

*Si $f : E \mapsto E$ est telle que :*

*(i) $f$ est $C^1$,*

*(ii) $f(0) = 0$,*

*(iii) $Lip(f - T) < \varepsilon$,*

*alors il existe une application $g$, continue de $E_1$ sur $E_2$ telle que la restriction de $f^{-1}$ au graphe de $g$ soit contractante, de rapport de contraction au moins $e^{-(\lambda_1-2\varepsilon)}$.*

La démonstration de la proposition se fait en plusieurs étapes.

**Définition 2.1.2** *On note $p_i$ les projections sur $E_i$ parallèlement à $E_j$, avec $j \neq i$, et $f_i \overset{déf}{=} p_i \circ f$.*

*$Lip(E_1, E_2)$ désignera l'espace des applications lipschitziennes de $E_1$ dans $E_2$ de constante de lipschitz plus petite que 1 et valant 0 et 0.*

nous avons le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 2.1.3** *Si $\sigma \in Lip(E_1, E_2)$, alors*

$$Lip(f_1 \circ (id, \sigma) - T_1) \leq Lip(f - T).$$

*Démonstration* :

$$\begin{aligned} f_1 \circ (id, \sigma) - T_1 &= f_1 \circ (id, \sigma) - p_1 \circ T \circ (id, \sigma) \\ &= p_1 \circ (f - T) \circ (id, \sigma), \end{aligned}$$

donc $Lip(f_1 \circ (id, \sigma) - T_1) \leq Lip(p_1) Lip(f - T) Lip((id, \sigma))$. Comme la norme sur $E_1 \oplus E_2$ est la norme du maximum, nous avons, $Lip(p_1) \leq 1$, ainsi que $Lip((id, \sigma)) < 1$. $\neg$

Nous redonnons ici le théorème d'inversion des fonctions lipschitziennes :

**Lemme 2.1.4** *Soient, $E$ et $F$ deux espaces de Banach, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire inversible. Si $f$ est une application de $E$ dans $F$ telle que $Lip(f - T) < ||T^{-1}||^{-1}$, alors $f$ est un lipéomorphisme d'inverse $f^{-1}$, tel que*

$$Lip(f^{-1}) \leq \frac{1}{||T^{-1}||^{-1} - Lip(f - T)}.$$

*De plus pour tout $x_0$, $f(B(x_0, r)) \supset B(f(x_0), r(||T^{-1}||^{-1} - Lip(f - T)))$.*

*Démonstration* : *Étape 1 : $f$ est injective.* Soient $x$ et $y$ deux points de $E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= ||(f - T)(x) - (f - T)(y) + T(x) - T(y)|| \\ &\geq ||T(x - y)|| - Lip(f - T)||x - y||, \end{aligned}$$

et l'hypothèse faite sur $Lip(f - T)$ montre que $x = y$.

*Étape 2 : $f$ est surjective.* On cherche à résoudre l'équation

$$f(x) = y. \tag{2.1}$$

L'équation (2.1) est équivalente à

$$x = T^{-1}(y - (f - T)(x)). \tag{2.2}$$

L'hypothèse faite sur $Lip(f - T)$ entraine que l'application $\phi_y : x \mapsto T^{-1}(y - (f - T)(x))$ est contractante, et donc elle admet un unique point fixe.

*Étape 3 : $f^{-1}$ est lipschitzienne.*

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(y)|| &= ||(f - T)(x) - (f - T)(y) + T(x) - T(y)|| \\ &\geq ||T(x - y)|| - Lip(f - T)||x - y|| \\ &\geq \left(\frac{1}{||T^{-1}||} - Lip(f - T)\right)||x - y|| \end{aligned}$$

et donc $\dfrac{1}{||T^{-1}||^{-1} - Lip(f - T)}||f(x) - f(y)|| \geq ||x - y||.$

*Étape 4 : image d'une boule.* Si $x_0$ est un point de $E$, pour tout $y \in B(f(x_0), r(||T^{-1}||^{-1} - Lip(f-T)))$, $||f^{-1}(y) - x_0|| \leq \dfrac{r(||T^{-1}||^{-1} - Lip(f-T)))}{||T^{-1}||^{-1} - Lip(f-T)} = r$. $\neg$

Si $\sigma \in Lip(E_1, E_2)$, le lemme 2.1.3 montre que $f_1 \circ (id, \sigma)$ est un lipéomorphisme et

$$Lip((f_1 \circ (id, \sigma))^{-1}) \leq \frac{e^{-\lambda_1+\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}}.$$

**Définition 2.1.5** *Soit $\sigma \in Lip(E_1, E_2)$. On note $\Gamma_f(\sigma)$ l'application de $E_1$ dans $E_2$ définie par*

$$\Gamma_f(\sigma) \stackrel{déf}{=} f_2 \circ (id, \sigma) \circ (f_1 \circ (id, \sigma))^{-1}.$$

Nous avons le résultat suivant.

**Lemme 2.1.6** *$\Gamma_f$ laisse $Lip(E_1, E_2)$ invariant.*

*Démonstration* : soient $x$ et $y$ deux points de $E_1$. Soit $\sigma \in Lip(E_1, E_2)$. On a :

$$\|\Gamma_f(\sigma)(x) - \Gamma_f(\sigma)(y)\| = \|f_2 \circ (id, \sigma) \circ (f_1 \circ (id, \sigma))^{-1}(x) - f_2 \circ (id, \sigma) \circ (f_1 \circ (id, \sigma))^{-1}(y)\|$$

et donc

$$\|\Gamma_f(\sigma)(x) - \Gamma_f(\sigma)(y)\| \leq \frac{e^{\lambda_2 - \lambda_1 + 3\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}} \|x - y\|. \qquad \neg$$

Nous allons maintenant voir un lemme technique, puis nous prouverons que l'application $\Gamma_f$ admet un unique point fixe.

**Lemme 2.1.7** *Soient $x$ et $y$ deux points respectivement dans $E_1$ et $E_2$. Soit $\sigma$ dans $Lip(E_1, E_2)$. Alors*

$$\|f_2(x,y) - \Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,y)\| \leq e^{\lambda_2+3\varepsilon} \|\sigma(x) - y\|.$$

*Démonstration* : Nous avons par inégalité triangulaire

$$\|f_2(x,y) - \Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,y)\| \leq \|f_2(x,\sigma(x)) - \Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,y)\| + \|f_2(x,y) - f_2(x,\sigma(x))\|. \tag{2.3}$$

Le premier membre de droite de (2.3) vaut

$$\|\Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,\sigma(x)) - \Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,y)\|$$

et est donc majoré par

$$\frac{e^{\lambda_2 - \lambda_1 + 3\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}} \|f_1(x,y) - f_1(x,\sigma(x))\| \leq 2\varepsilon \|\sigma(x) - y\|.$$

Le second terme de droite de (2.3) est majoré par

$$\left(e^{\lambda_2+\varepsilon} + \varepsilon\right) \|\sigma(x) - y\|.$$

Ainsi nous obtenons

$$\|f_2(x,y) - \Gamma_f(\sigma) \circ f_1(x,y)\| \leq e^{\lambda_2+3\varepsilon} \|\sigma(x) - y\|. \qquad \neg$$

**Lemme 2.1.8** *L'opérateur $\Gamma_f$ est une contraction de $Lip(E_1, E_2)$.*

*Démonstration* : On choisit $\sigma_1$ et $\sigma_2$ dans $Lip(E_1, E_2)$. Ceci donne pour tout $x$ de $E_1$ :

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_f(\sigma_1)(x) - \Gamma_f(\sigma_2)(x)\| &= \left\| f_2 \circ (id, \sigma_1) \circ (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x) - f_2 \circ (id, \sigma_2) \circ (f_1 \circ (id, \sigma_2))^{-1}(x) \right\| \\
&= \Big\| f_2 \left( (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x), \sigma_1 \left( (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x) \right) \right) \\
&\quad - f_2 \circ (id, \sigma_2) \circ (f_1 \circ (id, \sigma_2))^{-1} \left( f_1 \circ (id, \sigma_1) \circ (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x) \right) \Big\| \\
&= \Big\| f_2 \left( (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x), \sigma_1 \left( (f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x) \right) \right) \\
&\quad - \Gamma_f(\sigma_2) \left( f_1((f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x), \sigma_1((f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x))) \right) \Big\| \\
&\leq e^{\lambda_2 + 3\varepsilon} \|\sigma_1((f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x)) - \sigma_2((f_1 \circ (id, \sigma_1))^{-1}(x))\| \\
&\leq \frac{e^{\lambda_2 - \lambda_1 + 4\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1 + \varepsilon}} \|\sigma_1 - \sigma_2\| \, \|x\|. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.4) montre alors que

$$\|\Gamma_f(\sigma_1)(x) - \Gamma_f(\sigma_2)(x)\| \leq \frac{e^{\lambda_2 - \lambda_1 + 4\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1 + \varepsilon}} \|\sigma_1 - \sigma_2\|. \qquad \neg$$

Nous pouvons montrer maintenant la proposition 2.1.1. Comme $\Gamma_f$ est contractante sur l'espace complet $Lip(E_1, E_2)$, elle y admet un unique point fixe. Cette application invariante par $\Gamma_f$ sera notée $g$. Elle est 1-Lipschitzienne, donc continue. Il reste à vérifier que $f^{-1}$ est contractante sur $graph(g)$.
comme $graph(g)$ est $f$-invariant, et que $g \in Lip(E_1, E_2)$, si $x_1$ et $x_2$ sont deux points de $E_1$, alors

$$\|(x_1, g(x_1)) - (x_2, g(x_2))\| = \|x_1 - x_2\|_{E_1},$$

ce qui montre que si $(x_i, g(x_i)) = f((y_i, g(y_i)))$, alors

$$\begin{aligned}
\|f^{-1}(x_1, g(x_1)) - f^{-1}(x_1, g(x_1))\| &= \|(f_1 \circ (id, g))^{-1}(x_1) - (f_1 \circ (id, g))^{-1}(x_2)\|_{E_1} \\
&\leq e^{\lambda_1 + 2\varepsilon} \|x_1 - x_2\|_{E_1} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

et la majoration (2.5) prouve bien que $f^{-1}$ est contractante sur $graph(g)$. $\neg$

### 2.1.2 Le cas fibré

Une des étapes importante de la démonstration, est de prouver un lemme de poursuite. La méthode de transformation de graphe nous y aidera. Pour cela il est nécessaire d'adapter son énoncé au cas fibré, puisque nous travaillerons avec des pseudo-orbites et non plus avec des orbites. Nous allons donc établir le résultat suivant.

**Proposition 2.1.9** *Soit $X$ un espace, et $E$ un espace de Banach. On note $Y$ le fibré $X \times E$. On considère une application bijective $f : X \to X$, et $T : Y \to Y$ une application telle que :*

*(i) pour tout $x$ de $X$, $T_x$ est un endomorphisme de $E$,*

*(ii) pour tout $x$ de $X$, il existe $E_1(x)$ et $E_2(x)$ avec $E = E_1(x) \oplus E_2(x)$ et $T_x : E_i(x) \to E_i(f(x))$. De plus la norme choisie, $||\,.\,||_E$, vaut la norme $\max(||\,.\,||_{E_1}, ||\,.\,||_{E_2})$.*

*(iii) si on note $T_{x,i} \overset{déf}{=} T_{x|E_i}$ alors*

*(a) $\|T_{x,1}^{-n} v\|_{E_1} \leq e^{-(\lambda_1-\varepsilon)n}\|v\|_{E_1}$ pour tout $v \in E_1(x)$,*

*(b) $\|T_{x,2}^{n} v\|_{E_2} \leq e^{(\lambda_2+\varepsilon)n}\|v\|_{E_2}$ pour tout $v \in E_2(x)$,*

*avec $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ et $\varepsilon < \frac{-\lambda_2}{100}, \frac{\lambda_1}{100}$ ;*

*Soit $F : Y \to Y$ un recouvrement de $f$, tel que pour tout $x$ de $X$*

*(i) $F_x$ est $C^1$,*

*(ii) il existe une fonction $\delta : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\delta(f^{\pm 1}(x)) \leq \delta(x)e^{\varepsilon}$ et $\|F_x(0)\| \leq \delta(f(x))$,*

*(iii) $Lip(F_x - T_x) < \varepsilon$.*

*Alors, il existe une unique famille $\mathbf{g} = \{g_x\}_{x\in X}$, invariante par $F$, telle que pour tout $x$, $g_x$ soit une application continue de $E_1(x)$ dans $E_2(x)$, et $F_x^{-1}$ soit contractante sur le graphe de $g_x$, de rapport de contraction au moins $e^{-(\lambda_1-2\varepsilon)}$.*

*Démonstration* : L'idée est d'adapter le plus possible la démonstration de la proposition 2.1.1 du cas linéaire. Nous allons noter $Lip(E_1(x), E_2(x))$ l'espace des fonctions 1-lipschitziennes de $E_1(x)$ dans $E_2(x)$. On reprend aussi toutes les notations du cas linéaire :

On appelle $p_{x,i}$ les projections sur l'espace $E_i(x)$ parallèlement à $E_j(x)$, puis $F_{x,i} \overset{déf}{=} p_{f(x),i} \circ F_x$. On remarque que $F_{x,1} \circ (id, \sigma)$ est encore inversible pour tout $\sigma \in Lip(E_1(x), E_2(x))$, et on appellera $\Gamma_x$ l'opérateur défini par

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_x : Lip(E_1(x), E_2(x)) & \longrightarrow & Lip(E_1(f(x)), E_2(f(x))) \\ \sigma & \longmapsto & F_{x,2} \circ (id, \sigma) \circ (F_{x,1} \circ (id, \sigma))^{-1} . \end{array}$$

Il s'agit simplement de la transformation de graphe par l'application $F_x$. On constate encore que $\Gamma_x$ envoie $Lip(E_1(x), E_2(x))$ sur $Lip(E_1(f(x)), E_2(f(x)))$.

On se fixe alors un point $x$ de $X$, et on prend une application $\sigma$ dans $Lip(E_1(x), E_2(x))$. Comme $Lip(F_x - T_x) \leq \varepsilon$, on a

$$\|F_{x,2}(0, \sigma(0)) - F_{x,2}(0,0)\| \leq (e^{\lambda_2+\varepsilon} + \varepsilon)\sigma(0),$$

et

$$\|F_{x,1}(0, \sigma(0)) - F_{x,1}(0,0)\| \leq \varepsilon\sigma(0).$$

Ceci montre que

$$\|\Gamma_x(\sigma)(0)\| \leq e^{\lambda_2+3\varepsilon}\sigma(0) + 2\delta(x).$$

Posons $\kappa(x) \stackrel{déf}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} 2\delta(f^{-j-1}(x))e^{j(\lambda_2+3\varepsilon)}$. La fonction $\kappa$ est à variations lentes, c'est à dire que $\kappa(f^{\pm 1}(x)) \leq \kappa(x)e^{\varepsilon}$, et si on suppose que $\|\sigma(0)\| \leq \kappa(x)$, alors on aura $\|\Gamma_x(\sigma)(0)\| \leq \kappa(f(x))$. Considérons l'ensemble $Lip_\kappa(E_1(x), E_2(x))$ des applications 1-Lipschitz de $E_1(x)$ sur $E_2(x)$ telles que leur valeur en 0 soit de norme plus petite que $\kappa(x)$. Nous venons de voir que $\Gamma_x$ envoie $Lip_\kappa(E_1(x), E_2(x))$ sur $Lip_\kappa(E_1(f(x)), E_2(f(x)))$.

De plus si $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont dans $Lip_\kappa(E_1(x), E_2(x))$, alors

$$\|\Gamma_x(\sigma_1)(y) - \Gamma_x(\sigma_2)(y)\| \leq e^{\lambda_2+3\varepsilon} \left\|\sigma_1(F_{x,1} \circ (id, \sigma_1))^{-1}(y) - \sigma_2(F_{x,1} \circ (id, \sigma_1))^{-1}(y)\right\|, \tag{2.6}$$

pour tout $y$ de $E_1(x)$, et comme $(F_{x,1} \circ (id, \sigma_1))^{-1}$ est Lipschitzienne, nous avons

$$\|(F_{x,1} \circ (id, \sigma_1))^{-1}(y)\| \leq \frac{e^{-\lambda_1+\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}} \left(\|y\| + \delta(x) + \varepsilon\sigma(0)\right).$$

Posons $\Gamma_x^n \stackrel{déf}{=} \Gamma_{f^{n-1}(x)} \circ \Gamma_{f^{n-2}(x)} \circ \ldots \circ \Gamma_x$, et notons $\mathbf{0}_n$ l'application de $E_1(f^{-n}(x))$ dans $E_2(f^{-n}(x))$, qui à tout $y$ associe 0. Alors $\mathbf{0}_n$ appartient à $Lip_\kappa(E_1(f^{-n}(x)), E_2(f^{-n}(x)))$, et si $n$ et $p$ sont deux entiers, la majoration (2.6) entraine que

$$\begin{aligned}\|\Gamma^{n+p}_{f^{-n-p}(x)}(\mathbf{0}_{n+p})(y) - \Gamma^n_{f^{-n}(x)}(\mathbf{0}_n)(y)\| \leq e^{n(\lambda_2+3\varepsilon)} \Bigg[ & \left(\frac{e^{-\lambda_1+\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}}\right)^n \|y\| + \\ & (\delta(x) + \varepsilon\kappa(x)) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda_1+2\varepsilon}}{1 - \varepsilon e^{-\lambda_1+\varepsilon}}\right)^j . \Bigg]\end{aligned} \tag{2.7}$$

L'inégalité (2.7) montre finalement qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de la suite de fonction $(\Gamma^n_{f^{-n}(x)}(\mathbf{0}_n))_{n \in \mathbb{N}}$. On pose alors

$$g_x(y) \stackrel{déf}{=} \lim_{n \to +\infty} \Gamma^n_{f^{-n}(x)}(\mathbf{0}_n)(y) \ ;$$

la convergence uniforme assure que $g_x$ est continue, et la définition montre que $F_x(g_x) = g_{f(x)}$. De plus l'inégalité (2.7) prouve également l'unicité d'une telle famille $\mathbf{g}$. $\neg$

## 2.2 Propriétés des feuilletages

### 2.2.1 Le théorème de la variété instable

Dans cette section, $x$ désigne un point régulier, qu'on supposera dans $\Lambda_r$. Si $\delta$ est un réel de $]0, 1]$ on notera $W^u_{l,\delta}(x)$, l'ensemble des points $y$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{-n}(y) \in \Phi_{f^{-n}(x)} B(0, \delta\, l^{-1}(f^{-n}(x))).$$

On définit de même $W^s_{l,\delta}$ en inversant $f$ et $f^{-1}$. La théorie de la transformation de graphe, dans le cas linéaire, utilisée dans les cartes de l'atlas de Lyapunov au-dessus de l'orbite du point $x$, avec $T = d\widehat{f}_x(0)$, $f = \widehat{f}_x$, et $\lambda_i = e^{\pm\lambda}$, permet d'établir le résultat suivant.

**Proposition 2.2.1** *Soit $x \in \Lambda_r$ et $\delta \in ]0,1]$. Alors*

*(i) $\Phi_x^{-1}(W^u_{l,\delta}(x))$ est un graphe d'une fonction continue $g_x$,*

$$g_x : B^u(0, \delta l^{-1}(x)) \to B^s(0, \delta l^{-1}(x))$$

*et $g_x(0) = 0$ ;*

*(ii) $\widehat{f}_x\left(\Phi_x^{-1}(W^u_{l,\delta}(x))\right) \cap B(0, \delta l^{-1}(f(x))) = \Phi^{-1}_{f(x)}(W^u_{l,\delta}(f(x)))$.*

La transformation de graphe montre en fait que l'application $g_x$ est 1-lipschitzienne. Cependant elle est aussi différentiable. Nous allons en donner la preuve, car nous en aurons besoin pour montrer que le feuilletage est Höldérien.

Si $z \in B(0, l^{-1}(x))$ et si $\widehat{f}_x(z) \in B(0, l^{-1}(f(x)))$ on définit $\Psi_z$ par

$$\begin{array}{rcl} \Psi_z : \mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s) \\ v & \longmapsto & \Psi_z(v) \end{array}$$

où $\Psi_z(v)$ est l'application définie par

$$graph(\Psi_z(v)) \overset{déf}{=} d\widehat{f}_x(z)\,(graph(v))\,.$$

Si $g$ est une application de $W^u_{x,\delta}(x)$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s)$, on définit l'application $\Psi_g$ de $\widehat{f}_x\left(W^u_{x,\delta}(x)\right) \cap W^u_{f(x),\delta}(f(x))$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s)$ par

$$\Psi_g(\widehat{f}_x(z)) = \Psi_z(g(z)).$$

La théorie de transformation de graphe, avec $T = d\widehat{f}_x(0)$ et $z \mapsto \Psi_z$ pour tout $z$ de $W^u_{x,\delta}(x)$, montre que $\Psi_z$ admet un unique point fixe, qu'on notera $\partial g_x(z)$. De plus si $\mathbf{0_{n,z}}$ désigne l'application de $B^u(0, \delta l^{-1}(f^{-n}(x)))$ dans $B^s(0, \delta l^{-1}(f^{-n}(x)))$ constamment égale à $p_2(\widehat{f_x}^{-n}(z))$, et $\Psi^n_z$ l'application $\Psi_{\widehat{f_x}^{-1}(z)} \circ \ldots \circ \Psi_{\widehat{f_x}^{-n}(z)}$, alors les suites $\left(\Gamma^n_f(\mathbf{0_{n,z}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Psi^n_z(0))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément en $z$ sur $W^u_{x,\delta}(x)$ respectivement vers $g_x$ et $\partial g_x(z)$. Ainsi $g_x$ est différentiable et $dg_x(z) = \partial g_x(z)$.

La proposition 2.2.1 donne également une vitesse de contraction. Ainsi si $y$ appartient à $W^u_{l,\delta}(x)$, on a

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \log d(f^n(y), f^n(x)) \leq -\lambda + \varepsilon.$$

La définition de la variété instable globale, $W^u(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(W^u_l(f^{-n}(x)))$, montre alors que

$$W^u(x) = \{y \in M,\ \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \log d(f^n(y), f^n(x)) \leq -\lambda + \varepsilon\}.$$

Nous avons aussi une seconde caractérisation de $W^u_l(x)$.

**Lemme 2.2.2** *Soit $x$ un point dans $\Lambda_r$. La variété instable locale, $W_l^u(x)$, est la composante connexe de $W^u(x) \cap \Phi_x B(0, l^{-1}(x))$ qui contient $x$.*

*Démonstration* : clairement $W_l^u(x)$ est connexe et contient $x$. De plus, la composante connexe de $W^u(x) \cap \Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$ qui contient $x$ est une sous-variété, connexe, donc connexe par arc. Supposons qu'elle contienne un point $y$ qui n'est pas dans $W_l^u(x)$. Il existe un arc $t \mapsto c(t)$, $t \in [0,1]$, dans la composante connexe de $W^u(x) \cap \Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$ qui contient $x$, qui joint le point $y$ au point $x$. Cet arc rencontre $W_l^u(x)$ en un point, $z = c(t_0)$, tel que pour tout $t \in [0, t_0[$, $c(t) \notin W_l^u(x)$. Aucun voisinage de $z$ dans la topologie de $W^u(x)$ ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^u$, ce qui contredit le fait que $W^u(x)$ est une sous-variété de dimension $u$. ¬

Comme $f$ est $C^{1+\alpha}$ il est légitime de penser que $g_x$ a plus de régularité que la simple différentiabilité. L'application $x \mapsto W^u(x)$ est seulement mesurable, mais nous allons voir dans la section suivante qu'elle a plus de régularité sur les ensembles de Pesin. nous verrons également que l'application $g_x$ est de classe $C^{1+\alpha}$, ce qui prouvera que $W^u(x)$ est de classe $C^{1+\alpha}$.

### 2.2.2 Propriétés höldériennes

Il est important de connaitre la régularité de l'application $x \mapsto W^u(x)$. D'une manière générale, nous ne pouvons pas avoir plus que de la mesurabilité. Toutefois, sur chaque ensemble de Pesin, les estimations sont uniformes, et il est raisonnable d'espérer plus de régularité. Le but de cette section est de prouver, que d'une part les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont höldériennes sur chaque ensemble de Pesin, et d'autre part qu'elles sont $\alpha$-höldériennes, respectivement sur $W_l^s(x)$ et $W_l^u(x)$.

**Proposition 2.2.3** *Posons* $\beta = \dfrac{\alpha(2\lambda - 7\varepsilon)}{2\max(\log |||df^{-1}|||, \log |||df|||)}$. *Les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont $\beta$-höldériennes sur chaque $\Lambda_r(n)$. La constante de Hölder est alors égale à une constante $C$ multipliée par $l(x)$.*

*Démonstration* : On considère un point $x$ régulier. Dans les cartes au-dessus de $x$ et de $f^{-1}(x)$, l'application $d\widehat{f_x}^{-1}$ peut se voir comme une matrice

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Si $v \overset{déf}{=} v^u + v^s$ est dans $\mathbb{R}^{u+s}$, et si on pose $w \overset{déf}{=} d\widehat{f_x}^{-1}(v) = w^u + w^s$, alors,

$$w^u = Av^u \text{ et } w^s = Dv^s. \tag{2.8}$$

Si on suppose en outre que $v$ est contracté d'au moins $e^{-(\lambda - 2\varepsilon)}$ par $d\widehat{f_x}^{-1}$, les égalités (2.8) entrainent que

$$|Av^u + Dv^s| \leq e^{-(\lambda-2\varepsilon)} \left[ |v^u| + |v^s| \right].$$

Toutes les normes étant équivalentes, à une constante universelle près, on peut supposer que pour tout vecteur $v = v^u + v^s$, $|v| = |v^u| + |v^s|$, et donc

$$|A||v^u| + |D||v^s| \leq e^{-(\lambda-2\varepsilon)}\left[|v^u| + |v^s|\right].$$

Le terme $|A||v^u|$ est nécessairement plus grand que $e^{-\log|||df|||}|v^u|$, et le terme $|D||v^s|$ plus grand que $e^{\lambda-\varepsilon}|v^s|$, ce qui entraine que

$$e^{-\log|||df|||}|v^u| + e^{\lambda-\varepsilon}|v^s| \leq e^{-(\lambda-2\varepsilon)}\left[|v^u| + |v^s|\right].$$

Finalement on doit avoir

$$\frac{|v^s|}{|v^u|} \leq \frac{e^{-(\lambda-2\varepsilon)} - e^{-\log|||df|||}}{e^{\lambda-\varepsilon} - e^{-(\lambda-2\varepsilon)}}. \tag{2.9}$$

Supposons maintenant que l'on perturbe la matrice, pour avoir

$$\begin{pmatrix} A_\varepsilon & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & D_\varepsilon \end{pmatrix},$$

et si $v$ est encore un vecteur contracté par cette matrice (dans les bonnes cartes), et si les deux sous-matrices $A_\varepsilon$ et $D_\varepsilon$ ne sont que de très petites perturbations de $A$ et $D$, l'inégalité (2.9) devient

$$\frac{|v^s|}{|v^u|} \leq \frac{e^{-(\lambda-2\varepsilon)} - e^{-\log|||df|||+2\varepsilon} + |\varepsilon_2|e^{\lambda-3\varepsilon}}{e^{\lambda-3\varepsilon} - e^{-(\lambda-2\varepsilon)} - |\varepsilon_1|e^{-\log|||df|||+2\varepsilon}}. \tag{2.10}$$

Prenons $y$ dans $B(0, l^{-2}(x)) \cap \Lambda_r(0)$. Il existe un unique $n$ tel que

$$y \in B(x, |||df_x^{-1}|||^{-n}e^{-2n\varepsilon}l^{-2}(x)) \text{ et } y \notin B(x, |||df_x^{-1}|||^{-(n+1)}e^{-2(n+1)\varepsilon}l^{-2}(x)).$$

Ceci signifie que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{-k}(y)$ est dans $\Phi_{f^{-k}(x)}(B(0, l^{-1}(f^{-k}(x))))$. Pour tout $k$ on notera $y_{-k}$ le point $\Phi^{-1}_{f^{-k}(x)}(f^{-k}(y))$. On suppose que $n$ est assez grand pour que si $m \overset{déf}{=} \left[\frac{\alpha n}{2}\right]$, alors

$$e^{-m\log|||df^{-1}|||} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

On remarque que la définition de $m$ entraine que $n\alpha - m \geq m$. Par hypothèse

$$||y_0|| \leq l_0|||df_x^{-1}|||^{-n}e^{-2n\varepsilon}. \tag{2.12}$$

Dans le but d'estimer les matrices $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ lorsqu'on fera de grandes itérations, et non plus une seule comme dans la discussion précédente, nous donnons un lemme technique.

**Lemme 2.2.4** *Soit $Y = E \times X$ un fibré trivial sur l'espace métrique $(X, d)$. On se donne $f$ une application de $X$ dans lui-même, et on se donne un relèvement $F$ de $f$ sur $Y$ qui est $\alpha$-Hölder, de constante de Hölder, $C_F$, et telle que $||F||$ soit uniformément bornée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout couple $(x, y) \in X^2$, pour tout $v \in E$, on a*

$$||F^n(y).v - F^n(x).v|| \leq C_F \sum_{k=0}^{n-1} d^\alpha(f^k(x), f^k(y))\, ||F^k(y).v||\, ||F||^{n-k}, \tag{2.13}$$

*où $F^n(x)$ désigne $F(f^n(x)) \circ F(f^{n-1}(x)) \circ \ldots \circ F(x)$.*

*Démonstration du lemme* : la démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 1$ c'est trivial. supposons que c'est vrai pour $n$, et démontrons le pour $n + 1$.

$$\begin{aligned} ||F^{n+1}(y).v - F^{n+1}(x).v|| &\leq ||(F(f^{n+1}(y)) - F(f^{n+1}(x))).F^n(y).v|| \\ &\quad + ||F(f^{n+1}(x)).(F^n(y).v - F^n(x).v)|| \\ &\leq C_F\, d^\alpha(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y))||F^n(y).v|| \\ &\qquad + ||F||\, ||F^n(y).v - F^n(x).v||. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité, associée à l'hypothèse de récurrence prouve que la majoration (2.13) est vraie pour $n + 1$, et ceci achève la preuve par récurrence. $\neg$

*Retour à la démonstration de la proposition* Si $v \in \mathbb{R}^{u+s}$ est un vecteur unitaire de $E^u(y)$ vu dans la carte de Lyapunov au-dessus de $x$, alors, la faible variation de $z \mapsto l(z)$ le long des orbites entraine que pour tout $k$,

$$||d\widehat{f}_x^{-k}(y_0)v|| \leq e^{-k(\lambda-\varepsilon)+2k\varepsilon}||v||.$$

Le lemme 2.2.4 appliqué à $\widehat{f}_x^{-1}$ et $\widehat{f}_x^{-1}$ et la majoration (2.12), montrent que pour tout $v$ dans $E^u(y)$ vu dans la carte de Lyapunov au-dessus de $x$,

$$\begin{aligned} ||d\widehat{f}_x^{-m}(y_0).v - d\widehat{f}_x^{-m}(0).v|| \quad \leq \quad & C_f\, l_0|||df_x^{-1}|||^{-n\alpha}e^{-2n\alpha\varepsilon} \times \\ & |||df^{-1}|||^m \sum_{k=0}^{m-1} e^{-k(\lambda-(4+\alpha)\varepsilon)}\, |||df^{-1}|||^{-k}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $C$ telle que

$$||d\widehat{f}_x^{-m}(y_0).v - d\widehat{f}_x^{-m}(0).v|| \leq C\, e^{-2n\varepsilon}e^{-(n\alpha-m)\log|||df_x^{-1}|||}. \tag{2.14}$$

Supposons que les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_\varepsilon & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & D_\varepsilon \end{pmatrix}$, représentent respectivement les applications linéaires $d\widehat{f}_x^{-m}(0)$ et $d\widehat{f}_x^{-m}(y_0)$. Les deux relations (2.14) et (2.11) montrent que les sous-matrices $A_\varepsilon$ et $D_\varepsilon$ ne sont que de très petites perturbations de $A$ et $D$. De plus, $e^{m\lambda} >> 10e^{3m\varepsilon}$, et donc (2.10) montre que

$$\frac{|v^s|}{|v^u|} \leq C\frac{e^{-(\lambda-4\varepsilon)m} - e^{-m\log|||df|||+2m\varepsilon} + e^{-m\log|||df^{-1}|||}e^{m(\lambda-3\varepsilon)}}{e^{m(\lambda-3\varepsilon)}},$$

où $C$ est une constante qui ne dépend que de $f$ et $l_0$. Ceci montre alors, qu'il existe une constante $C$, qui ne dépend que de $f$, $M$, et $l_0$ telle que

$$\frac{|v^s|}{|v^u|} \leq C\, e^{-(2\lambda-7\varepsilon)m}. \tag{2.15}$$

Comme $m \sim \dfrac{\alpha n}{2}$ et $d(x,y) \sim e^{-n\log|||df^{-1}|||}$, La majoration (2.15) prouve que si $\sigma_y$ désigne le graphe de l'application linéaire $E^u(y)$ dans la carte de Lyapunov au-dessus $x$, il existe $C$ constante qui ne dépend que de $f$, $M$, telle que

$$||\sigma_y|| \leq Cl_0\, d^\beta(x,y). \tag{2.16}$$

La relation (2.16) prouve la proposition. $\neg$
Un corollaire important de la proposition 2.2.3, est la variation globale Hölder de l'application Jacobien instable.

**Définition 2.2.5** *On note $\phi^{(u)}$ l'application $x \mapsto -\log J^u(x)$, où $J^u(x)$ est le jacobien de l'application $df : E^u(x) \to E^u(f(x))$.*

Nous avons alors.

**Proposition 2.2.6** *L'application $\phi^{(u)}$ est $\beta$-höldérienne sur chaque $\Lambda_r(n)$. De plus, le coefficient de Hölder est alors égale à une constante universelle multipliée par $l_0\, e^{n\varepsilon}$.*

*Démonstration* : Pour tout $x$ de $\Lambda_r$ nous avons $0 < e^{-d\log|||df|||} \leq (J^u(x))^{-1} \leq 1$. De plus $x \mapsto E^{u,s}(x)$ est $\beta$-höldérienne sur $\Lambda_r$ et sur chaque feuille stable ou instable. $\neg$

On remarque aussi, que dans l'étude précédente, la difficulté consistait à évaluer $||\sigma_y||$. Si on suppose que $y \in W^u_l(x)$, on peut remplacer le terme $\log|||df^{-1}|||$ par le coefficient de contraction $e^{-\lambda+\varepsilon}$. De plus, le théorème de la variété instable montre que dans ce cas $||\sigma_y|| \leq 1$. La définition de $\beta$ entraine alors le résultat important suivant.

**Proposition 2.2.7** *L'application $\phi^{(u)}$ est $\alpha$-höldérienne sur chaque $W^u_l(x)$, où $x \in \Lambda_r(n)$. Le coefficient de hölder est alors égale à une constante universelle multipliée par $l_0\, e^{n\varepsilon}$.*

### 2.2.3 L'absolue continuité

Sur $M$, les variétés stable et instable produisent localement une structure produit : Si $x$ et $y$ sont deux points réguliers suffisamment proches, alors $W_l^s(x) \cap W_l^u(y)$ ne contient qu'un unique point. Une question naturelle est alors, de savoir si les mesures invariantes gardent cette structure produit. D'une manière plus générale, on peut définir des holonomies locales, et comme dans [5], il devient intéressant de connaitre les mesures invariantes ou presque invariantes par ces holonomies. La première mesure à laquelle on peut s'interesser, est la mesure de Lebesgue, puisqu'elle existe naturellement sur chaque sous-variété plongée. Les holonomies ne sont que Hölder-continues, si on se resteint à des ensembles du type $\sqcup_{n=0}^{N} \Lambda_r(n)$, ou tout simplement mesurables sur $\Lambda_r$, et, il n'est donc pas nécessairement vrai, que par holonomie la mesure de Lebesgue portée par $W_l^u$, se projette en une mesure absolument continue par rapport à Lebesgue. Le but de cette section est de prouver que le feuilletage stable (resp. instable) possède une propriété de ce type, appelée absolue-continuité du feuilletage.

La première étape consiste à définir soigneusement la notion de tranversale. Dans le cas uniformément hyperbolique, les feuilles instables sont, localement, toutes "parallèles", et la structure produit introduite par l'application $[.,.] : (x, y) \mapsto W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^u(y)$ est définie uniformément. Ici, le point $y$ peut être un point régulier très proche de $x \in \Lambda_r(0)$, mais se trouver dans un $\Lambda_r(n)$ avec $n$ tellement grand, que la composante connexe de $W^u(y) \cap \Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$ qui contient $y$, n'est pas, dans la carte au dessus de $x$, un graphe "parallèle" à celui de $g_x$. Une transversale ne sera alors transverse au feuilletage que pour certaines feuilles assez "parallèles".

**Définition 2.2.8** *Soit $x \in \Lambda_r$. Si $\Sigma$ est un compact de $M$, on dira qu'il est localement transverse au feuilletage stable au point $x$, si $\Sigma \subset \Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$, et $\Phi_x^{-1}(\Sigma)$ est inclu dans un graphe de classe $C^{1+\alpha}$ de $B^u(0, l^{-1}(x))$ dans $B^s(0, l^{-1}(x))$ de pente plus petite que 1/2.*

Nous explicitons cette notion de "parallèle".

**Définition 2.2.9** *Soit $x$ un point de $\Lambda_r(n)$. Soit $r' \in \mathbb{N}$, un entier donné, $r' > r$. On appelle voisinage parallélisant d'ordre $r'$ du point $x$, et on le note $VP(r', x)$, l'ensemble des points $y$ de $\Lambda_{r'} \supset \Lambda_r$, tels que*

1. *$y \in \Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$ ;*
2. *La composante connexe de $\Phi_x^{-1}(W^u(y))$ qui contient $\Phi_x^{-1}(y)$, qu'on note $\Phi_x^{-1}(W_{loc}^u(x, y))$, et la composante connexe de $\Phi_x^{-1}(W^s(y))$ qui contient $\Phi_x^{-1}(y)$, qu'on note $\Phi_x^{-1}(W_{loc}^s(x, y))$, sont respectivement des graphes de $B^u(0, l^{-1}(x))$ dans $B^s(0, l^{-1}(x))$ et de $B^s(0, l(x)^{-1})$ dans $B^u(0, l(x)^{-1})$, de pente plus petite que 1/2.*
3. *Pour tout $y$ dans $VP(r', x)$, $l(x) \leq l'(y) \leq 100 l(x)$.*

*Soit $\delta \in ]0, 1[$ ; on appellera $\delta$-voisinage parallèlisant d'ordre $r'$ du point $x$ les points de $VP(r', x) \cap \Phi_x(B(0, \delta l^{-1}(x)))$. On le notera $\delta - VP(r', x)$.*

L'existence des voisinages parallélisants permet de définir une notion de $W^s$-conjugaison locale entre les transversales au feuilletage stable comme dans [5]. Si

$\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont deux compacts localement transverses au feuilletage stable au point $x$, ils sont tous les deux images de deux graphes $(z, \varphi_1(z))$ et $(z, \varphi_2(z))$ par $\Phi_x$. Si $r' \geq r$ est un entier fixé, les composantes connexes des variétés stables $W^s(y)$ qui contiennent $y$, pour $y \in VP(r', x)$, définissent dans $\Phi_x(B(0, l^{-1}(x)))$ des graphes de $B^s(0, l^{-1}(x))$ dans $B^u(0, l^{-1}(x))$ de pente petite, et donc, elles définissent une holonomie stable de $\Sigma_1$ dans $\Sigma_2$, qu'on note $\theta$.

**Définition 2.2.10** *Soit $r' \geq r$ un entier fixé. Soit $x \in \Lambda_r$. Soit $\theta$ l'holonomie stable définie par les points de $VP(r', x)$. On dira que le feuilletage stable est localement absolument continu au point $x$, si pour tout choix de $(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $Leb_{\Sigma_1}(A) = 0$ si et seulement si $Leb_{\Sigma_2}(\theta(A)) = 0$ pour tout $A \subset \Sigma_1$. Si pour tout $x$ de $\Lambda_r$ le feuilletage stable est localement absolument continu au point $x$, on dira qu'il est localement absolument continu.*

**Proposition 2.2.11** *Le feuilletage stable est localement absolument continu.*

*Démonstration* : On se fixe donc deux compacts localement transverses au feuilletage stable au point $x$, $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$. Ils sont dans l'images de deux graphes $(z, \varphi_1(z))$ et $(z, \varphi_2(z))$ par $\Phi_x$, et on considère l'holonomie $\theta$ de $\Sigma_1$ sur $\Sigma_2$. On notera $\Delta_i$ l'image par $\Phi_x$ de chaque graphe de $\varphi_i$. Nous allons adapter la démonstration du cas Anosov (voir [21] ou [17]). Le lemme clef de la démonstration est le suivant.

**Lemme 2.2.12** *Soient $N$ et $N'$ sont deux variétés compactes riemanniennes, et $K \subset N$ un compact de $N$. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications injectives de $K$ sur $N'$, qui converge uniformément vers l'application borélienne et injective $g$. On suppose que pour tout entier $n$, $g_n$ admet un jacobien $J_n$ pour les mesures riemanniennes, et que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $J$. Alors $g$ admet $J$ pour sous-jacobien.*

*Démonstration du lemme* : Soit $\widetilde{K}$ un compact dans $K$. On peut supposer que $g$ est continue sur $\widetilde{K}$. On se fixe un $\delta > 0$ et on note $\widetilde{K}_\delta \stackrel{déf}{=} \{y \in N', d(y, g(\widetilde{K})) < \delta\}$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$Leb_{N'}(g(\widetilde{K})) = \lim_{\delta \downarrow 0} \downarrow Leb_{N'}(\widetilde{K}_\delta).$$

Par ailleurs la convergence uniforme des $g_n$ montre que pour tout $\varepsilon$ il existe un $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $g_n(\widetilde{K}) \subset \widetilde{K}_\delta$, et donc

$$\forall n \geq n_0 \quad Leb_{N'}(g_n(\widetilde{K})) \leq Leb_{N'}(g(\widetilde{K})) + \varepsilon.$$

L'injectivité de $g_n$ montre que $Leb_{N'}(g_n(\widetilde{K}_n^p)) = \int_{\widetilde{K}_n^p} J_n \, dLeb_N$, et le lemme de Fatou prouve que

$$Leb_{N'}(g(\widetilde{K})) \geq \int_{\widetilde{K}} J(x) \, dx.$$

Ceci étant vrai pour tout compact, $J$ est un sous-jacobien. $\neg$

Nous allons appliquer ce lemme à la bonne suite de transformation $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\theta^n$ sera une application de $\Sigma_1$ dans $\Sigma_2$ qui approximera $\theta$.

On commence par se fixer $r' \geq r$. On suppose que $\varepsilon$ est encore très petit devant $\lambda' \stackrel{déf}{=} -\log(1-1/r')$. On fixe $x$ dans $\Lambda_r$. Si $y$ est dans $VP(r',x)$, alors il existe $n_x$ tel que $y \in \Lambda_{r'}(k)$, avec $k \leq n_x$. Ainsi, si $y$ est un point de $VP(r',x)$, et $z$, un point dans la composante connexe de $\Phi_x(B(0,l^{-1}(x))) \cap W^u(y)$ qui contient $y$, il existe un entier $n$ (uniforme en $z$ et $y$) tel que $f^n(z)$ appartienne à $\Phi_{f^n(y)}(B(0,l'^{-1}(f^n(y))))$. Quitte à itérer un certain nombre de fois par $f$, on peut supposer, que pour tout $y \in VP(r',x)$, $W^u_{loc}(x,y)$ est égale à $W^u_{l'}(y) \cap \Phi_x(B(0,l^{-1}(x)))$. Si $z \in \Sigma_1$ est dans $W^u_{l'}(y) \cap \Phi_x(B(0,l^{-1}(x)))$, $\theta(z)$ est alors aussi dans $W^u_{l'}(y)$.

On se fixe $n$, et on va construire $\theta^n$. L'ensemble $f^n(\Delta_2)$ est une variété compacte de dimension $u$. On le recouvre par des "cubes" disjoints, c'est à dire qu'on construit une partition, chaque élément de la partition étant un connexe qui contient un point $f^n(x_i)$ avec, $x_i \in \Sigma_2$. On suppose en outre que chaque cube est propre, dans le sens où $\overline{C_i}$ est l'adhérence de l'intérieur de $C_i$. Si $f^n(x_i)$ est le point précisé avant, le point $x_i$ est dans un $W^s_{l'}(y)$, avec $y = y(i,n)$, et $y \in VP(r',x)$ ; on suppose alors que le cube est suffisamment petit pour que pour tout $k \leq n$,

$$f^{-k}(C_i) \subset f^{n-k}(\Delta_2) \cap \Phi_{f^{n-k}(y)}(B(0,l^{-1}(f^{n-k}(y)))).$$

Enfin la compacité assure qu'on peut trouver un tel recouvrement fini.

Soit $C_i$ l'un de ces cubes. L'holonomie $\theta$ induit une holonomie image sur $C_i$, qu'on notera $\theta_n$, et qui est définie par $\theta_n = f^n \circ \theta \circ f^{-n}$. On associe ainsi à l'ensemble $C_i$ son image par $\theta_n^{-1}$, $K_i$, sur $f^n(\Delta_1)$. Clairement $\bigsqcup K_i \supset f^n(\Sigma_1)$. Si $z$ est un point de $\Sigma_1 \cap f^{-n}(K_i)$, on note $y$ un point de $VP(r',x)$ tel que pour tout $k \leq n$

$$f^{-k}(C_i) \subset f^{n-k}(\Delta_2) \cap \Phi_{f^{n-k}(y)}(B(0,l^{-1}(f^{n-k}(y)))).$$

On note $z' \stackrel{déf}{=} \theta(z)$, et pour tout $k$ dans $[0,n]$

$$z_k = \Phi^{-1}_{f^k(y)} \circ f^k(z) \stackrel{déf}{=} (z^u_k, z^s_k),$$
$$z'_k = \Phi^{-1}_{f^k(y)} \circ f^k(z') \stackrel{déf}{=} (z'^u_k, z'^s_k).$$

Dans la boule $B(0,l'^{-1}(f^n(y)))$, les ensembles $\Phi^{-1}_{f^n(y)} \circ f^n(\Delta_1)$ et $\Phi^{-1}_{f^n(y)} \circ f^n(\Delta_2)$ sont deux graphes de deux applications $\varphi^n_1$ et $\varphi^n_2$ de pentes plus petites que $1/2$. En reprenant les notations de la transformation de graphe, dans la famille de cartes au-dessus des points $f^k(y)$, on aura $\varphi^n_i = \Gamma^n_f(\varphi_i)$. On pose alors

$$Z_n = (id, \Gamma^n_f(\varphi_2)) \circ p^u \circ \widehat{f}^n_y \circ (id, \varphi_1)(z^u_0).$$

Comme $Z_n$ est dans le graphe de $\varphi^n_2$ qui est de pente petite,

$$||Z_n - z'_n|| = ||Z^u_n - z'^u_n||. \tag{2.17}$$

La transformation de graphe montre que

$$||z_n - Z_n|| = ||\Gamma_f^n(\varphi_1(z_n^u)) - \Gamma_f^n(\varphi_2)(Z_n^u)|| \leq e^{-n(\lambda'-2\varepsilon)}, \tag{2.18}$$

et la contraction le long des feuilles stables locales, qui définissent l'holonomie $\theta$ (puis $\theta_2, \dots, \theta_n$), prouve que

$$||\Phi_{f^n(y)}^{-1} \circ f^n(z) - \Phi_{f^n(y)}^{-1} \circ f^n(z')|| \leq C\, l'(y)\, e^{-n\lambda'+2n\varepsilon} d(z,z'), \tag{2.19}$$

où $C$ est une constante universelle. Les trois relations (2.17), (2.18), (2.19) montrent qu'il existe une constante universelle $C$, telle que

$$||{z'}_n^u - Z_n^u|| = ||z'_n - Z_n|| \leq C\, l'(y)\, e^{-n(\lambda'-2\varepsilon)}. \tag{2.20}$$

Il existe une injection linéaire, $\psi_i^n$, de $B^u(0, l'^{-1}(f^k(y))\,)$ dans elle-même telle que pour tout $w^u \in B^u(0, l'^{-1}(f^k(y))\,)$, si $d^u(w^u, p^u(\Phi_{f^n(y)}^{-1}(C_i))) \leq C\, l'(y)\, e^{-n(\lambda'-2\varepsilon)}$, alors $\psi_i^n(w^u) \in p^u(\Phi_{f^n(y)}^{-1}(C_i))$ et $||w^u - \psi_i^n(w^u)|| \leq C\, l'(y)\, e^{-n(\lambda'-2\varepsilon)}$. On note alors

$$z'' = \widehat{f}_{f^n(y)}^{-n} \circ (id, \Gamma_f^n(\varphi_2)) \circ \psi_i^n(z_n^u),$$

et pour tout $k$,

$$z''_k = \Phi_{f^k(y)}^{-1}(f^k(z'')) \overset{déf}{=} ({z''}_k^u, {z''}_k^s).$$

$z''_0$ est un point du graphe de $\varphi_2$, qui est de pente faible, et donc,

$$||z''_0 - z'_0|| = ||{z''}_0^u - {z'}_0^u||, \tag{2.21}$$

ce qui entraine que pour tout $k \leq n$,

$$||z''_k - z'_k|| = ||{z''}_k^u - {z'}_k^u||. \tag{2.22}$$

La majoration (2.22) montre qu'il existe une constante universelle $C$, telle que

$$d(z', z'') \leq C\, l'(y)\, e^{-2n(\lambda'-2\varepsilon)}. \tag{2.23}$$

Notons $\theta^n(z) \overset{déf}{=} z''$. L'application $\theta^n$ est globalement injective et continue sur chaque $f^{-n}(K_i)$. De plus elle converge uniformément vers $\theta$.

Il faut maintenant étudier la convergence des jacobiens. Avec les notations précédentes, le jacobien de $\theta^n$ en $z$ est donc

$$J^n(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{|\det df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z))|}{|\det df_{|T_{f^k(z'')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z''))|} |\det \psi_i^n|.$$

L'application $w \in \Delta_2 \mapsto T_w\Delta_2$ est $\alpha$-Hölder, de coefficient $C_2$. Dans la carte $(\Phi_y, B(0, l'^{-1}(y)))$ elle est $\alpha$-Hölder, de coefficient plus petit que $l'(y)C_2$. De plus la transformation de graphe montre que

$$||\Psi_{z'}(d\varphi_2) - \Psi_{z''}(d\varphi_2)|| \leq e^{-2\lambda'+2\varepsilon}||z'_0 - z''_0||^\alpha + C\, l'(y)||z'_0 - z''_0||^\alpha,$$

où $C$ est une constante universelle, et où $\Psi$ désigne la transformation de graphes des application linéaires vue dans les cartes au-dessus de la famille des $f^k(y)$. En itérant ce raisonnement pour les temps plus petits que $n$ (les points $f^k(z)$,$f^k(z')$ et $f^k(z'')$ restent dans la même famille de cartes), on obtient pour tout $k \leq n$ :

$$||\Psi^k_{z'}(d\varphi_2) - \Psi^k_{z''}(d\varphi_2)|| \leq C'_2 l'(y)\, ||z'_k - z''_k||^\alpha. \tag{2.24}$$

où $C'_2 = C_2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\alpha(2\lambda'-4\varepsilon)}$. La majoration (2.24) montre que pour tout $k$, la variation de l'espace tangent à $f^k(\Delta_2)$ est $\alpha$-Hölder, de constante plus petite que $C'_2\, l'(y)$. Comme $\varphi_2$ est de petite pente, $f$ est dilatante sur $\Delta_2$, et donc l'application $z' \mapsto \log\big(\det(df_{|T_{z'}f^k(\Delta_2)})\big)$ est $\alpha$-Hölder, de constante plus petite que $C''_2\, l'(y)$. Ainsi,

$$e^{C''_2\, l'(y) e^{-n\alpha(\lambda'-2\varepsilon)}} \leq \prod_{k=0}^n \frac{|\det(df_{|T_{f^k(z')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z')))|}{|\det(df_{|T_{f^k(z'')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z'')))|} \leq e^{C''_2\, l'(y) e^{n\alpha(\lambda'-2\varepsilon)}}. \tag{2.25}$$

De plus, $\psi_i^n$ est linéaire, et

$$||id - \psi_i^n|| \leq C\, e^{-n(\lambda'-2\varepsilon)}, \tag{2.26}$$

où $C$ est une constante qui ne dépend que de $x$. Les deux relations (2.25) et (2.26) prouvent que si $J_n(z)$ converge, il converge vers

$$\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{|\det df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z))|}{|\det df_{|T_{f^k(z')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z'))|},$$

si ce dernier produit existe.

Vu dans la carte locale, les deux espaces tangents $T_{f^k(z)}f^k\Delta_1$ et $T_{f^k(z')}f^k\Delta_2$ sont assez proches. La transformation de graphe montre que pour tout $k \leq n$

$$\begin{aligned} ||\Psi^n_{z_0}(d\varphi_1) - \Psi^n_{z'_0}(d\varphi_2)|| \;&\leq\; e^{-2k\lambda'+4n\varepsilon}||d\varphi_2(z'^u_0) - d\varphi_1(z^u_0)|| \\ &\quad + C\, l'(y) \sum_{p=0}^{k-1} e^{-2(k-p)(\lambda'-2\varepsilon)}||z^u_p - z'^u_p||^\alpha, \end{aligned}$$

ce qui entraine que

$$||\Psi^k_{z_0}(d\varphi_1) - \Psi^k_{z'_0}(d\varphi_2)|| \leq C\, l'(y)\, ||z'_k - z_k||^\alpha. \tag{2.27}$$

Par ailleurs, la régularité de $f$ implique qu'il existe une constante universelle $C$, telle que pour tout $w$ de $M$,

$$|\det df_{|A_1}(w) - \det df_{|A_2}(w)| \leq C\, d(A_1, A_2), \tag{2.28}$$

pour tout couple de sous-espaces de dimension $u$, $(A_1, A_2)$, dans $T_wM$. Les deux relations (2.27) et (2.28) montrent que

$$|\det df_{|T_{f^k(z')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z')) - \det df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z'))| \leq C\, l'(y)\, ||z'_k - z_k||^\alpha. \tag{2.29}$$

Enfin, la variation Hölder de $df$ montre que

$$||df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z')) - df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z'))|| \leq C\, l(y')\, ||z'_k - z_k||^\alpha. \tag{2.30}$$

La continuité du déterminant, la contraction le long des feuilles stables, et les relations (2.29) et (2.30) montrent que le produit

$$\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{|\det df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z))|}{|\det df_{|T_{f^k(z')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z'))|}$$

converge et est majoré par $D\, d^\alpha(z,z')$, où $D$ est une constante qui dépend de $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ et de $x$.

Ainsi, pour tout entier $n$, le jacobien $J_n$ de l'application $\theta^n$ converge simplement. Le terme

$$J(z) \stackrel{déf}{=} \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{|\det df_{|T_{f^k(z)}f^k(\Delta_1)}(f^k(z))|}{|\det df_{|T_{f^k(z')}f^k(\Delta_2)}(f^k(z'))|}$$

est donc un sous-jacobien de $\theta$. En inversant les rôles de $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, on prouve ainsi que $\theta$ admet $J$ comme jacobien. $\neg$

*Remarque* : Si les deux transversales sont inclus dans des variétés instables locales, $W_l^u(z_1)$ et $W_l^u(z_2)$, le jacobien $J$ de l'holonomie stable, $\theta$, est alors

$$J(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{J^u(f^k(z))}{J^u(f^k \circ \theta(z))}.$$

En inversant $f$ et $f^{-1}$ on montre :

**Corollaire 2.2.13** *Le feuilletage instable est localement absolument continu.*

Nous allons tirer une conséquence importante de l'absolue continuité locale. On considère un point $x$ de $\Lambda_r$ ; pour simplifier les notations, on supposera qu'il est dans $\Lambda_r(0)$. On considère alors un entier $r'$ fixé, tel que toutes les estimations précédentes soient vraies, et on considère le $\delta$-voisinage parallélisant $\delta - VP(r',x)$. La discussion faite précédemment montre qu'on peut supposer que pour tout $y \in \delta - VP(r',x)$, $W^u_{loc}(x,y)$ (resp. $W^s_{loc}(x,y)$) est égale à $W^u_{l'}(y) \cap \Phi_x(B(0,l^{-1}(x)))$ (resp. $W^s_{l'}(y) \cap \Phi_x(B(0,l^{-1}(x)))$). Dans $\delta - VP(r',x)$, on suppose qu'il existe un borélien $R$ ayant les propriétés suivante :

*(P1)* $R \subset \delta - VP(r',x)$ ;

*(P2)* Si $z$ est dans $R$, et si $z'$ est dans $R$, alors le point $[z',z] \stackrel{déf}{=} W^s_{l'}(z') \cap W^u_{l'}(z)$ est encore dans $R$.

Pour tout $z$ de $R$, on note $W^u(z,R) \overset{déf}{=} R \cap W^u_{l'}(z)$ et $W^s(z,R) \overset{déf}{=} R \cap W^s_{l'}(z)$. La propriété *(P2)* montre qu'on peut définir une application $\Psi_{z,R}$ de $W^u(z,R) \times W^s(z,R)$ dans $R$, par $\Psi_{z,R}(z_1,z_2) = [z_1,z_2]$. De plus elle est bijective, et continue par continuité des feuilletages lorsqu'on se restreint à $\delta - VP(r',x)$. Pour la même raison, la bijection réciproque est continue pour la topologie produit. C'est donc un homéomorphisme. Par ailleurs, les deux ensembles $W^u(z,R)$ et $W^s(z,R)$ sont dans des sous-variétés plongés, et ils possèdent chacun une mesure canonique $Leb^u_z$ et $Leb^s_z$, restrictions des mesures riemanniennes sur les sous-variétés.

**Proposition 2.2.14** *Supposons que $Leb(R) > 0$. Alors la mesure de Lebesgue restreinte à $R$, $Leb_R$, est équivalente à la mesure image, $\Psi_{z,R_*} Leb^u_z \otimes Leb^s_z$.*

*Démonstration* : Nous allons démontrer que chacune des deux mesures est absolument continue l'une par rapport à l'autre.
Étape 1 : On montre que la mesure $\Psi_{z,R_*} Leb^u_z \otimes Leb^s_z$ est absolument continue par rapport à la mesure Lebesgue. Pour cela, on va copier la démonstration de l'absolue continuité locale du feuilletage.

Fixons $n$ assez grand. Pour simplifier les notations, nous noterons parfois, et quand il n'y aura pas ambiguïté, $\Psi$ an lieu de $\Psi_{z,R}$. $f^n(W^u_{l'}(z))$ est une sous-variété plongée dans $M$, et il existe une constante $C$ qui ne dépend que de $R$, telle que pour tout $y$ dans $W^u(z,R)$, $l'(f^n(y)) \geq C\,e^{-2n\varepsilon}$. Ainsi, si $y$ est dans $W^u(z,R)$,

$$B(f^n(y), C\,e^{-4n\varepsilon}) \subset \Phi_{f^n(y)}\left(B(0, l'^{-1}(f^n(y)))\right). \tag{2.31}$$

De plus, la variation Hölder des feuilletages montre que si $y'$ est dans $W^u(z,R)$, et si $f^n(y') \in B(f^n(y), C\,e^{-10n\varepsilon})$, alors,

$$\Phi^{-1}_{f^n(y)}\left(W^u_{l'}(f^n(y') \cap B(f^n(y), C\,e^{-6n\varepsilon})\right) \subset graph(g^n_{y,y'}), \tag{2.32}$$

où $g^n_{y,y'}$ est une application de $\mathbb{R}^u$ dans $\mathbb{R}^s$ de pente plus petite que 1.
Quitte à prendre $n$ suffisamment grand, on peut également supposer deux propriétés supplémentaires.

$$f^n(y') \in B(f^n(y), C\,e^{-10n\varepsilon}) \Longrightarrow f^n(W^s_{l'}(y') \subset B(f^n(y), C\,e^{-6n\varepsilon}), \tag{2.33}$$

et si $f^n(y')$ n'appartient pas à la composante connexe de $f^n(W^u_{l'}(z)) \cap B(f^n(y), C\,e^{-6n\varepsilon})$ qui contient $f^n(y)$, alors

$$d^u(f^n(y), f^n(y')) > 10\,C\,e^{-n(\lambda'-10\varepsilon)}. \tag{2.34}$$

On recouvre donc $f^n(W^u(z,R))$ par les boules $B(f^n(y), C\,e^{-10n\varepsilon})$, et on utilise le théorème de Besicovitch pour extraire de ce recouvrement, un sous-recouvrement fini, chaque boule intersectant avec au plus $C(M)$ autres boules. Avec ce recouvrement fini, on construit une partition en "cellules", chaque élément $P_i$ étant dans un $\Phi_{f^n(y_i)}\left(B(0, l'^{-1}(f^n(y_i)))\right)$, et avec au plus $C(M)$ voisins.

Si $z' \in f^{-n}(P_i) \cap W^u(z,R)$, dans la carte $(\Phi_{f^n(y_i)}, B(0, l'^{-1}(f^n(y_i))))$, on écrit $f^n(z')$ sous la forme $(z'^u, z'^s)$. On note alors $\Sigma_n^s(z') = \{w \in B(0, l'^{-1}(f^n(y_i))), w^u = z'^u_n\}$. $f^{-n} \circ \Phi_{f^n(y_i)}(\Sigma_n^s)$ est une sous-variété plongée, et on note $\Delta_n^s(z')$ la composante connexe de $f^{-n} \circ \Phi_{f^n(y_i)}(\Sigma_n^s) \cap \Phi_x(B(0, l^{-1}(x))$ qui contient $z'$.

Nous établissons un lemme technique.

**Lemme 2.2.15** *Si $y$ et $y'$ sont deux points de $W^u(z,R)$ tels que $f^n(y)$ et $f^n(y')$ sont dans le même $P_i$, mais $f^n(y')$ n'appartient pas à la composante connexe de $f^n(W^u_{l'}(z)) \cap P_i$ qui contient $f^n(y)$, alors*

$$\Delta_n^s(y') \cap \Delta_n^s(y) = \emptyset.$$

*Démonstration du lemme* : Si $w$ est dans $\Delta_n^s(y') \cap \Delta_n^s(y)$, alors la distance $d(f^k(y'), f^k(w))$ est toujours de l'ordre de $d^s(f^k(y'), f^k(w))$, pour tout $0 \leq k \leq n$. De même $d(f^k(y), f^k(w)) \sim d^s(f^k(y), f^k(w))$, pour tout $0 \leq k \leq n$. Ceci montre alors que $d(y,y') \sim d^s(y,y')$, ce qui est faux (voir Fig.1 avec $\delta \sim e^{-10n\varepsilon} l'(z)$). $\neg$

Fig.1

Supposons maintenant que $\Delta_n^s(y')\cap\Delta_n^s(y)\neq\emptyset$, pour deux points $y$ et $y'$ de $W^u(z,R)$. On prend donc $w$ dans l'intersection. La définition des $\Delta_n^s(z')$ montre que pour tout $k\leq n$,

$$d(f^k(y),f^k(w))\sim e^{-k(\lambda'-4\varepsilon)},$$

et donc $d(f^n(y),f^n(y'))\sim e^{-n(\lambda'-4\varepsilon)}$. De plus les points $f^k(y)$ et $f^k(y')$ sont toujours dans une même carte locale, et donc on doit avoir

$$d(f^k(y),f^k(w))\sim d^u(f^k(y),f^k(w)).$$

Ceci montre que si $f^n(y)$ est dans $P_i$ défini à partir d'une des boules du recouvrement, $f^n(y')$ est forcément dans l'une des $C(M)$ boules qui l'intersectent. De plus la condition (2.34) et le lemme 2.2.15 montrent qu'au plus un seul point $f^n(y')$ dans chacune de ces boules peut être tel que $\Delta_n^s(y')\cap\Delta_n^s(y)\neq\emptyset$.

En faisant ce même raisonnement avec $f^{-1}$ au lieu de $f$, on construit pour chaque $z''$ de $W^s(z,R)$ une sous-variété $\Delta_n^u(z'')$, telle que pour $w$, il existe au plus $C(M)$ points $y_i$ de $W^s(z,R)$ tels que $w\in\Delta_n^u(y_i)$.
La transformation de graphe montre que $\Delta_n^s(z')$ et $\Delta_n^u(z'')$ sont respectivement les images par $\Phi_x$ d'un graphe de $B^s(0,l'^{-1}(x))$ dans $B^u(0,l'^{-1}(x))$ de pente plus petite que $1/2$ et de classe $C^{1+\alpha}$ et d'un graphe de $B^u(0,l'^{-1}(x))$ dans $B^s(0,l'^{-1}(x))$ de pente plus petite que $1/2$ et de classe $C^{1+\alpha}$. Ces deux graphes s'intersectent donc en un point exactement. On note alors

$$R_n=\{w,\ \exists(z',z'')\in W^u(z,R)\times W^s(z,R)\ \{w\}=\Delta_n^s(z')\cap\Delta_n^u(z'').$$

Si $w$ est dans $R_n$, $\{w\}=\Delta_n^s(z')\cap\Delta_n^u(z'')$, on écrit $w=\Psi_{z,R}^n((z',z''))$. $\Psi_{z,R}^n$ est donc de degré au plus $C(M)\times C(M)$ ; comme pour l'absolue continuité locale, la suite d'applications $(\Psi_{z,R}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\Psi_{z,R}$, et pour tout $n$, $\Psi_{z,R}^n$ admet pour jacobien

$$\begin{aligned}J_n((z',z'')) &= \prod_{k=0}^{n}\frac{J^u(f^k(z'))}{\det df_{|T_{f^k\circ\Psi_{z,R}^n((z',z''))}f^k(\Delta_n^u(z''))}(f^k\circ\Psi_{z,R}^n((z',z'')))}\\ &\qquad\times\prod_{k=0}^{n}\frac{J^s(f^{-k}(z''))}{\det df^{-1}_{|T_{f^{-k}\circ\Psi_{z,R}^n((z',z''))}f^{-k}(\Delta_n^s(z'))}(f^{-k}\circ\Psi_{z,R}^n((z',z'')))}\\ &\qquad\times\det_{\mathbb{R}^{u+s}}\Big(T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^u(z''),T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^s(z')\Big),\end{aligned}$$

où le terme $\det_{\mathbb{R}^{u+s}}\Big(T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^u(z''),T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^s(z')\Big)$ désigne le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^{u+s}$ d'une base formée de vecteurs de $T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^u(z'')$ et de vecteurs de $T_{\Psi_{z,R}^n(z',z'')}\Delta_n^s(z')$.

Etudions la convergence ponctuelle de ce jacobien. Le graphe $\Delta_n^s(z')$ rencontre le graphe $W_{l'}^u(z'')$ en $z_1$. Le graphe $\Delta_n^u(z'')$ rencontre le graphe $W_{l'}^s(z')$ en $z_2$, et le graphe $\Delta_n^s(z')$ rencontre le graphe $\Delta_n^u(z'')$ en $z_3\overset{déf}{=}\Psi_{z,R}^n((z',z''))$. Comme les graphes sont tous de classe $C^{1+\alpha}$, la discussion faite dans la preuve de l'absolue continuité locale montre que

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{\det\left(df_{|T_{f^k(z_3)}f^k(\Delta_n^u(z''))}(f^k(z_3))\right)}{\det\left(df_{|T_{f^k(z_2)}f^k(\Delta_n^u(z''))}(f^k(z_2))\right)}$$

converge vers 1 lorsque $n$ tend vers l'infini (variation Hölder de l'espace tangent). De plus les points $z_2$ et $[z', z'']$ sont toujours dans la même carte, car ils sont sur la même variété stable locale. Ainsi la transformation de graphe, la continuité du déterminant et du log montrent que

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{\det\left(df_{|T_{f^k([z',z''])}f^k(W_{l'}^u(z''))}(f^k([z', z'']))\right)}{\det\left(df_{|T_{f^k(z_2)}f^k(\Delta_n^u(z''))}(f^k(z_2))\right)}$$

converge vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. En procédant de même avec $f^{-1}$, on montre finalement que $J_n((z', z''))$ converge presque partout vers

$$J(z', z'') \overset{déf}{=} \prod_{k=0}^{n} \frac{J^u(f^k(z'))}{J^u(f^k([z', z'']))} \prod_{k=0}^{n} \frac{J^s(f^{-k}(z''))}{J^s(f^{-k}([z', z'']))} \det_{\mathbb{R}^{u+s}} \left(T_{[z',z'']}W_{l'}^s(z''), T_{[z',z'']}W_{l'}^u(z')\right).$$

Ainsi

$$Leb_R(\Psi_{z,R}(B)) \geq \frac{A}{C(M)^2} \iint_B J \, d\Psi_{z,R_*} Leb_z^u \otimes Leb_z^s,$$

où $A$ est une constante. Ceci prouve que

$$\left(\Psi_{z,R_*} Leb_z^u \otimes Leb_z^s(\Psi_{z,R}(B)) > 0\right) \Longrightarrow \left(Leb_R(\Psi_{z,R}(B)) > 0\right).$$

Étape 2 : On montre que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à la mesure $\Psi_*(Leb_z^u \otimes Leb_z^s)$.

Supposons que $B$ soit tel que $\Psi_*(Leb_z^u \otimes Leb_z^s)(B) = 0$. Ceci s'écrit

$$\iint \mathbb{1}_B \, d\Psi_* Leb_z^u \otimes Leb_z^s = 0,$$

et est équivalent à

$$\iint \mathbb{1}_B \circ \Psi(z', z'') \, dz' dz'' = 0. \tag{2.35}$$

Du fait de l'absolue continuité locale du feuilletage instable, l'égalité (2.35) entraine que pour $Leb_z^u$ presque tout $z'$,

$$Leb_{z'}^s(W_{l'}^s(z') \cap B) = 0. \tag{2.36}$$

Dans la carte au-dessus de $x$, $(\Phi_x, B(0, l^{-1}(x)))$, on définit les horizontales (resp. les verticales) par $\Sigma^u(z^s) \overset{déf}{=} B^u(0, l^{-1}(x)) \times \{z^s\}$ (resp. $\Sigma^s(z^u) \overset{déf}{=} \{z^u\} \times B^s(0, l^{-1}(x))$).

On définit aussi le borélien $R^s$ comme $\bigcup_{w\in R} W^s_{l'}(w)$, et de même on définira le borélien $R^u$. Chaque horizontale $\Sigma^u(z^s)$ est un graphe de classe $C^{1+\alpha}$ de $B^u(0,l^{-1}(x))$ dans $B^s(0,l^{-1}(x))$, et on notera $Leb^u_{h,y^s}$ la mesure $Leb^u_{\Phi_x(\Sigma^u(y^s))\cap R^s}$. Compte-tenu de l'absolue continuité locale, (2.36) prouve que pour $y^s$ fixé, pour $Leb^u_{h,y^s}$-presque tout point $z'$ de $\Phi_x(\Sigma^u(y^s))$,

$$Leb^s_{z'}(W^s_{l'}(z')\cap B)=0. \tag{2.37}$$

On considère toujours que $y^s$ est fixé. On définit alors une application $\Theta$ sur $\Phi_x(\Sigma^u(z^s))\cap R^s\times W^s(z,R)$ par

$$\{\Theta(z',z'')\}=W^s_{l'}(z')\cap\Phi_x(\Sigma^u(z^s)).$$

La démonstration précédente s'adapte, et on prouve donc que la mesure $\Theta_*\left(Leb^u_{h,y^s}\otimes Leb^s_z\right)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Réciproquement, si $C$ est un borélien de mesure nulle pour $\Theta_*\left(Leb^u_{h,y^s}\otimes Leb^s_z\right)$, l'absolue continuité locale du feuilletage stable permet encore d'utiliser le théorème de Fubini, et pour $Leb^s_z$ presque tout point de $W^s(z,R)$, $y'^s$,

$$Leb^u_{h,y'^s}(C)=0. \tag{2.38}$$

Compte-tenu de l'absolue continuité du feuilletage en horizontales, l'égalité (2.38) entraine que pour $Leb^s_{v,z^u}$-presque tout $y'^s$,

$$Leb^u_{h,y'^s}(C)=0, \tag{2.39}$$

où $Leb^s_{v,z^u}$ désigne la mesure $Leb^s_{\Phi_x(\Sigma^s(z^u))\cap R^u}$. Comme la mesure $Leb$ est la mesure produit dans la carte au dessus de $x$, on a bien montré que $Leb_R(C)=0$.
Ainsi, les deux mesures $Leb$ et $\Theta_*\left(Leb^u_{h,y^s}\otimes Leb^s_z\right)$ sont équivalentes. On note $J$ le jacobien. Pour tout borélien $C$,

$$\begin{aligned} Leb(C) &= \int \mathbb{1}_C.J\,d\Theta_*\left(Leb^u_{h,y^s}\otimes Leb^s_z\right)\\ &= \iint \mathbb{1}_C\circ\Theta(z',z'').J\circ\Theta(z',z'')\,dLeb^u_{h,y^s}(z')dLeb^s_z(z'')\\ &= \int \frac{\int \mathbb{1}_C\circ\Theta(z',z'').J\circ\Theta(z',z'')dLeb^s_z(z'')}{\int J\circ\Theta(z',z'')dLeb^s_z(z'')}\int J\circ\Theta(z',z'')dLeb^s_z(z'')dLeb^u_{h,y^s}(z'). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Par unicité du système de mesures désintégrées, la relation (2.40) prouve que pour $Leb^u_{h,y^s}$-presque tout $z'$, la mesure désintégrée de Lebesgue, $LEB^{z'}_s$, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesque $Leb^s_{z'}$. La relation (2.36) implique alors que $LEB^{z'}_s(B)=0$ pour $Leb^u_{h,y^s}$-presque tout $z'$, et donc $Leb_R(B)=0$. Ceci finit la preuve de la proposition. $\neg$

# Chapitre 3

# Construction d'un sous-système

## 3.1 Recouvrement markovien

### 3.1.1 Du lemme de poursuite

Pour établir un lemme de poursuite, nous allons utiliser la proposition (2.1.9). Dans un premier temps nous raisonnerons par analyse, en étudiant ce que doit être une pseudo-orbite, ainsi qu'une orbite pistante. Ensuite nous ferons la synthèse en définissant clairement les pseudo-orbites, puis en énonçant un lemme de poursuite.

#### Analyse

On considère deux points $x$ et $y$ dans $\Lambda_r$, tels que $f(x)$ et $y$ soient suffisament proches. On suppose en outre que $l(f(x))$ et $l(y)$ sont comparables.

Dans la carte de Lyapunov au-dessus de $y$ (quitte à la restreindre à un $\Phi_y(B(0,\delta l^{-1}(y))))$, les variétés stable et instables locales $W^s_l(f(x))$ et $W^u_l(f(x))$ sont deux graphes respectivement de $B^s(0,l^{-1}(y))$ dans $B^u(0,l^{-1}(y))$ et $B^u(0,l^{-1}(y))$ dans $B^s(0,l^{-1}(y))$. De même les espaces tangents $T_{f(x)}W^s_l(f(x))$ et $T_{f(x)}W^u_l(f(x))$ sont deux graphes d'applications affines $\sigma^s_x$ et $\sigma^u_x$, respectivement de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^u$ et $\mathbb{R}^u$ dans $\mathbb{R}^s$, et de petites pente si $f(x)$ et $y$ sont suffisament proches (il y a continuité Hölder des espaces tangents). Nous écrirons

$$\begin{cases} \sigma^s_x(z) \overset{déf}{=} L^s_x(z - f^u(x)) + f^s(x) & \text{et } \|L^s_x\| \leq \varepsilon, \\ \sigma^u_x(z) \overset{déf}{=} L^u_x(z - f^s(x)) + f^u(x) & \text{et } \|L^u_x\| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

où $(f^u(x), f^s(x))$ désigne le point $\Phi^{-1}_y(f(x))$ dans $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$. L'application $df(x)$ vue dans les cartes $(d\Phi_x, \mathbb{R}^{u+s})$ et $(d\Phi_y, graph(\sigma^u_x) \oplus graph(\sigma^s_x))$ est une application affine $T$. Si $p_u$ et $p_s$ désignent respectivement les projections sur $\mathbb{R}^u \times \{0\}^s$ parallèlement à $\{0\}^u \times \mathbb{R}^s$ et sur $\{0\}^u \times \mathbb{R}^s$ parallèlement à $\mathbb{R}^u \times \{0\}^s$, on construit alors l'application $T' : \mathbb{R}^{u+s} \to \mathbb{R}^{u+s}$ de la manière suivante :

Si $v_u \in \mathbb{R}^u \times \{0\}^s$, alors $T'(v_u) \overset{déf}{=} p_u \circ T(v_u)$,

si $v_s \in \{0\}^u \times \mathbb{R}^s$ alors $T'(v_s) \overset{déf}{=} p_s \circ T(v_s)$,
$T'$ est affine sur $\mathbb{R}^{u+s}$.

On définit l'application $F$ comme étant $\Phi_y^{-1} \circ f \circ \Phi_x$. Lu dans la carte de Lyapunov, et comme $f(x)$ et $y$ d'une part, et $l(f(x))$ et $l(y)$ d'autre part sont proches, on aura encore $Lip(F-T) \leq 2\varepsilon$. De plus si $z_1$ et $z_2$ sont dans $B(0, l(x)^{-1}) \cap F^{-1}(B(0, l(y)^{-1}))$, et si $z_1 = v_1^u + v_1^s$ et $z_2 = v_2^u + v_2^s$, alors

$$\|F(z_1) - T'(z_1) - F(z_2) + T'(z_2)\| \leq (\varepsilon + \|L_x^u\| + \|L_x^s\|)\|z_1 - z_2\|,$$

ce qui entraine

$$Lip(F - T') \quad \leq \quad 4\varepsilon. \tag{3.1}$$

$T$ est affine, et si on note $T''$ sa partie linéaire, la majoration (3.1) montre que

$$Lip(F - T'') \leq 4\varepsilon, \tag{3.2}$$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \|T''(v_u)\| \geq e^{\lambda - 3\varepsilon}\|v_u\| \\ \|T''(v_s)\| \leq e^{-\lambda + 3\varepsilon}\|v_s\| \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Les propriétés (3.3) et (3.3) montrent qu'on peut alors utiliser la proposition (2.1.9) en remplaçant $\varepsilon$ par $4\varepsilon$.

Il faut maintenant préciser ce que $f(x)$ et $y$ proches signifie : Sur l'ensemble des points $x$ de $\Lambda_r(0)$ les applications $x \mapsto E^{u,s}(x)$ sont $\beta$-höldériennes. On choisit $C$ constante qui ne dépend que de $l_0$ telle que la constante de Hölder de ces deux applications soit plus petite que $1/C$. On choisit aussi $p$ entier tel que $p\beta \geq 1 + \beta$. On remarquera que $p \geq 3$. On note alors $\varepsilon_1(x)$ pour tout $x$ de $\Lambda_r$ la valeur

$$\varepsilon_1(x) \overset{déf}{=} \inf \left( (C\varepsilon)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{l^p(x)}, \frac{1}{l^3(x)} \right).$$

Le terme en $\frac{1}{l^3(x)}$ assure que dans les cartes de Lyapunov, les points sont assez proches.

Si $y$ est dans $\Lambda_r(n)$, dans la carte au-dessus de $y$, on va avoir

$$||\sigma_x^u|| \leq \frac{1}{C} e^{n\varepsilon} ||\Phi_y^{-1}(f(x))||^\beta \leq \frac{1}{C} e^{n\varepsilon(1+\beta)} d^\beta(f(x), y). \tag{3.4}$$

Si $d(y, f(x)) \leq \min(\varepsilon_1(f(x)), \varepsilon_1(y))$, la relation (3.4) montre que

$$||\sigma_x^u|| \leq \varepsilon$$

Ainsi, le terme en $\frac{1}{l^p(x)}$ assure que dans les cartes de Lyapunov, les variétés stables et instables (qui varient de façon Hölder) sont relativement “parallèles”.

Nous allons changer la définition de l'application $l$.

**Définition 3.1.1** *L'application $l$ sera désormais définie par $x \mapsto \sup(l_0, l(x))$.*

Si $x$ et $y$ sont deux points de $\Lambda_r$ tels que $d(f(x), y) \leq \varepsilon_1(y)$ et $e^{-\varepsilon} l(y) \leq l(f(x)) \leq e^\varepsilon l(y)$, alors $f(x) \in \Phi_y(B(0, l(y)^{-1}))$ et $\|L_x^u\| \leq \varepsilon$, ainsi que $\|L_x^s\| \leq \varepsilon$.

**synthèse**

Nous commençons par donner les définitions des pseudo-orbites et orbites pistantes.

**Définition 3.1.2** *Soit $\beta$ un réel strictement positif. On appelle $\beta$-pseudo orbite de $M$ toute suite de points $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $i$*

*(1) $x_i$ est un point de $\Lambda_r$,*

*(2) $e^{-\varepsilon}l(x_{i+1}) \leq l(f(x_i)) \leq e^{\varepsilon}l(x_{i+1})$,*

*(3) $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \beta.\varepsilon_1(x_{i+1})$ et $d(x_i, f^{-1}(x_{i+1})) \leq \beta.\varepsilon_1(x_i)$.*

**Définition 3.1.3** *On dira que l'orbite $(f^i(x))_{i\in\mathbb{Z}}$ $\delta$-piste la pseudo orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ si et seulement si pour tout $i$ $f^i(x) \in \Phi_(x_i)(B(0, \delta l(x_i)^{-2}))$.*

Nous avons alors :

**Proposition 3.1.4 (lemme de poursuite)** *Pour tout $\delta > 0$ il existe $\beta > 0$ et $r' \geq r$, tels que toute $\beta$-pseudo orbite soit $\delta$-pistée par une orbite d'un point de $\Lambda_{r'}$. De plus $r \leq r' \leq \frac{1}{(1+1/r)^{96/100}-1}$.*

*Démonstration* : Fixons nous un $1 \geq \delta > 0$. On choisit $\beta$ suffisament petit pour que $\delta \geq 4\beta \sum_{j=0}^{+\infty} e^{j(-\lambda+10\varepsilon)}$. On suppose aussi que $\beta$ est suffisament petit pour que tout graphe de pente plus petite que $1/2$ de $B^u(0, l(x_i)^{-1})$ dans $B^s(0, l(x_i)^{-1})$ s'envoie par $f$ sur un graphe de pente petite que $1/2$ de $B^u(0, l(x_{i+1})^{-1})$ dans $B^s(0, l(x_{i+1})^{-1})$ pour toute $\beta$-pseudo orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, ainsi que tout graphe de pente plus petite que $1/2$ de $B^s(0, l(x_{i+1})^{-1})$ dans $B^u(0, l(x_{i+1})^{-1})$ s'envoie par $f^{-1}$ sur un graphe de pente petite que $1/2$ de $B^s(0, l(x_i)^{-1})$ dans $B^u(0, l(x_i)^{-1})$.
Fixons nous une $\beta$-pseudo orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ; la proposition (2.1.9) et l'analyse faite précédemment prouvent que pour tout $i$, il existe deux graphes $w^u_{\underline{x},i}(\beta)$ et $w^s_{\underline{x},i}(\beta)$ respectivement de $B^u(0, \delta l(x_i)^{-1})$ dans $B^s(0, \delta l(x_i)^{-1})$ et de $B^s(0, \delta l(x_i)^{-1})$ dans $B^u(0, \delta l(x_i)^{-1})$ tels que

$$\Phi^{-1}_{x_{i+1}} \circ f \circ \Phi_{x_i}(w^u_{\underline{x},i}(\beta)) \supset w^u_{\underline{x},i+1}(\beta) \tag{3.5}$$

$$\text{et } \Phi^{-1}_{x_{i+1}} \circ f \circ \Phi_{x_i}(w^s_{\underline{x},i}(\beta)) \subset w^s_{\underline{x},i+1}(\beta). \tag{3.6}$$

Les propriétés de contractions/dilatations de ces graphes montrent que pour tout $i$, pour tout $z$ de $w^u_{\underline{x},i}(\beta)$ et pour tout $n \geq 0$, $f^{-n}(\Phi_{x_i}(z))$ est dans $\Phi_{x_{i-n}}(B(0, \delta l^{-1}(x_{i-n})))$, et pour tout $z$ de $w^s_{\underline{x},i}(\beta)$ $f^n(\Phi_{x_i}(z))$ est dans $\Phi_{x_{i+n}}(B(0, \delta l^{-1}(x_{i+n})))$. Par construction l'intersection des graphes $w^u_{\underline{x},i}(\beta)$ et $w^s_{\underline{x},i}(\beta)$ se fait en un unique point. Si on note

$$\{x\} \overset{déf}{=} \Phi_{x_0}(w^u_{\underline{x},i}(\beta) \cap w^s_{\underline{x},i}(\beta)),$$

l'orbite de $x$ $\delta$-piste la $\beta$-pseudo orbite puisque, d'après la proposition (2.1.9), pour tout $i$,

$$\|w^u_{\underline{x},i}(\beta) \cap (\{0\}^u \times \mathbb{R}^s)\|_s \leq \frac{\delta}{2l^2(x_i)} \ , \ \|w^s_{\underline{x},i}(\beta) \cap (\mathbb{R}^u \times \{0\}^s)\|_u \leq \frac{\delta}{2l^2(x_i)}.$$

il reste maintenant à prouver que le point $x$ est un point régulier. Le graphe $w^u_{\underline{x},i}(\beta)$ est invariant (au sens de (3.5)), et contractant lorsqu'on itère $f^{-1}$. Ceci prouve que pour tout $v$ dans $T\Phi_{x_0} w^u_{\underline{x},i}(\beta)(x)$ et pour tout $n$ positif

$$||df^{-n}(x).v|| \leq K_L\, l(x_0) e^{-(\lambda-2\varepsilon)n}.$$

Un même raisonnement, avec $f$, montrera que pour tout $v$ dans $T\Phi_{x_0} w^s_{\underline{x},i}(\beta)(x)$ et pour tout $n$ positif

$$||df^{n}(x).v|| \leq K_L\, l(x_0) e^{-(\lambda-2\varepsilon)n}.$$

Ceci montre qu'il y a une décomposition de l'espace tangent au-dessus de $x$, en une somme directe d'un espace contractant et d'un espace dilatant. Par ailleurs, le variation de l'angle entre ces espaces est de l'ordre de $d\Phi_{x_1}^{-1} \circ d\Phi_{x_0}$ et est donc majorée par $K\, e^{\varepsilon}$. Ceci prouve que $x$ est un point régulier, et il appartient à $\Lambda_{r'}$, tel que $\lambda \geq \lambda' \geq \lambda - 4\varepsilon$. Comme $\varepsilon < \lambda/100$, on obtient l'encadrement de $r'$ annoncé, et la proposition est démontrée. $\neg$

*Remarque* : L'appartenance des points pistants à l'ensemble des points réguliers, avec un coefficient très proche de celui d'origine, montre que les estimations faites pour les points de $\Lambda_r$ seront valables à $4\varepsilon$ près, en particulier les variations Hölder des feuilletages et des jacobiens.

### 3.1.2 Aux rectangles de Markov

Nous allons maintenant utiliser les pseudo-orbites pour construire un ensemble de rectangles qui auront une propriété de Markov. En particulier cet ensemble sera un recouvrement de $\Lambda_r$, ce qui assurera qu'il est de mesure de Lebesgue positive.

Nous savons que $\Lambda_r = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_r(n)$. De plus pour tout entier $n$ $f^n(\Lambda_r(0)) \subset \Lambda_r(0) \cup \ldots \cup \Lambda_r(n)$. Par ailleurs $f$ et $f^{-1}$ sont deux $C^{1+\alpha}$-difféomorphismes sur la variété compacte $M$ et sont donc lipschitziens de constantes respectives $C(f)$ et $C(f^{-1})$.

On se fixe un $\delta > 0$ et on lui associe un $\beta$ comme dans le lemme de poursuite. on suppose que $\delta$ est fixé suffisament petit pour que

$$\delta \leq \frac{K_H}{200\, K_L}.$$

Pour recouvrir $\Lambda_r$ on va être amené à comparer les valeurs de $\varepsilon_1(x)$ et de $\varepsilon_1(f(x))$. Dans $\varepsilon_1$ nous avons introduit un terme en $1/l^p(x)$ pour tenir compte des variations Hölder des feuilletages. Comme $l$ est à variation lente, $l^p$ est à variations contrôlées par $e^{p\varepsilon}$. Si $x$ est un point de $\Lambda_r$ on notera alors

$$\varepsilon_2(x) \overset{déf}{=} \inf\left(e^{-p\varepsilon}\frac{\beta}{2C(f)}\varepsilon_1(x), e^{-p\varepsilon}\frac{\beta}{2C(f^{-1})}\varepsilon_1(x), \frac{\beta}{2}\varepsilon_1(x)\right).$$

**Lemme 3.1.5** *Il existe un recouvrement dénombrable de $\Lambda_r$ par des boules $B(x_i, \varepsilon_2(x_i))$ où chaque $x_i$ est dans $\Lambda_r$. De plus, pour tout $n$, le nombre de boules ayant un centre dans un même $\Lambda_r(n)$ est fini.*

*Démonstration* : Nous allons construire un recouvrement $\Lambda_r(n)$ pour chaque $n$ qui vérifiera les propriétés recquises. Dans $\Lambda_r(n)$ on prend un réseau $\varepsilon_2$-séparé maximal. Ce réseau est fini car $\Lambda_r(n)$ est relativement compact, et il existe deux constantes $C_1(n)$ et $C_2(n)$ telles que $C_1(n) \leq \varepsilon_2(x_i) \leq C_2(n)$. L'ensemble des boules $B(x, \varepsilon_2(x))$ recouvre $\Lambda_r(n)$ car le réseau est supposé maximal. On prend alors une réunion dénombrable d'ensembles finis, ce qui donne un ensemble dénombrable $\neg$

*Notation* : on notera $P_\delta = \{p^i\}$ l'ensemble des centres de ces boules.

Nous savons qu'a toute $\beta$-pseudo orbite de points de $P_\delta$ il existe une unique orbite qui la $\delta$-piste. Cette orbite est celle d'un point régulier, mais qui est dans un $\Lambda_{r'}$ avec $r' \geq r$. Nous allons voir une sorte de réciproque.

**Lemme 3.1.6** *Pour tout point $x$ de $\Lambda_r$ il existe une $\beta$-pseudo orbite $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de points de $P_\delta$, $\delta$-pistée par l'orbite de $x$.*

*Démonstration* : On prend donc $x$ dans $\Lambda_r$. Il existe un $n_0$ tel que $x \in \Lambda_r(n_0)$. On trouve alors $p^0 \in P_\delta \cap \Lambda_r(n_0)$ tel que $x \in B(x_0, \varepsilon_2(x_0))$. De même $f(x) \in \Lambda_r(n_1)$, et il existe $p^1 \in P_\delta \cap \Lambda_r(n_1)$ tel que $f(x) \in B(x_1, \varepsilon_2(x_1))$. Comme $n_1 \in \{n_0 - 1, n_0, n_0 + 1\}$ nous avons $e^{-\varepsilon} l(p^0) \leq l(p^1) \leq e^{\varepsilon} l(p^0)$. Par définition du $\beta$, $x \in \Phi_{p^0}(B(0, \delta l(p^0)^{-2}))$ et $f(x) \in \Phi_{p^1}(B(0, \delta l(p^1)^{-2}))$. De plus l'inégalité triangulaire montre que $d(f(p^0), p^1) \leq \beta\varepsilon_1(p^1)$ et $d(f^{-1}(p^1), p^0) \leq \beta\varepsilon_1(p^0)$. On pose alors $x_0 = p^0$ et $x_1 = p^1$. Ce raisonnement peut être fait pour tout $f^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et on peut ainsi trouver une $\beta$-pseudo orbite, $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, qui est $\delta$-pistée par l'orbite de $x$. $\neg$

**Définition 3.1.7** *On appellera $\Sigma_\delta$ le sous-ensemble de $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ formé par toutes les $\beta$-pseudo orbites de $P_\delta$. On appellera $\Theta_\delta$ la projection naturelle de $\Sigma_\delta$ sur $\Lambda_{r'}$, qui a une pseudo-orbite associe l'unique orbite qui la $\delta$-piste.*

Par abus de langage, un mot fini de $\Sigma_\delta$ sera aussi appelé code. Si $p^j \in P_\delta$ on notera $C[p^j]$ l'ensemble des pseudo-orbites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $y_0 = p^j$, et $T_j \overset{déf}{=} \Theta_\delta(C[p^j])$ sera l'ensemble des points de $\Lambda_r$ dont l'orbite $\delta$-piste une pseudo-orbite de $C[p^j]$.

**Lemme 3.1.8** *L'application $\Theta_\delta$ est continue pour la topologie produit de $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$.*

*Démonstration* : On rappelle tout d'abord ce qu'est la topologie produit sur $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$. Si $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et un élément de $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, ainsi que $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, alors

$$d(\underline{x}, \underline{y}) \overset{déf}{=} \sup\{\frac{1}{2^{|i|}} \text{ , } i \text{ tels que } \; y_i \neq x_i\}.$$

Chaque cylindre $C[p^j]$ est alors un ouvert pour la topologie induite par cette métrique.

Fixons nous un point $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, avec $x_0 = p^j$, et posons $x = \Theta_\delta(\underline{x})$. Si $y \in T_j$ est tel que les morceaux d'orbites $(f^n(x))_{n\in[-N,N]}$ et $(f^n(y))_{n\in[-N,N]}$ $\delta$-pistent la même pseudo-orbite , cela signifie que $d(x,y) \leq l(p^j)\delta K e^{-N(\lambda-3\varepsilon)}$, où $K$ est la constante de Lipschitz de $\Phi_{p^j}$. Ainsi, pour tout $\rho > 0$, si $N$ est tel que $l(p^j)\delta K e^{-N(\lambda-3\varepsilon)} \leq \rho$ et si $\underline{y}$ est une pseudo-orbite telle que $d(\underline{x},\underline{y}) \leq 1/2^N$, alors $d(x, \Theta_\delta(\underline{y}) \leq \rho$, et donc $\Theta_\delta$ est continue. $\neg$

Nous allons maintenant voir que les propriétés des $T_j$ sont similaires à celles des rectangles markoviens du cas Axiom-A.

On se fixe un ensemble $T_j$. Si $y$ est dans $T_j$, il existe une pseudo-orbite $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ telle que $y = \Theta_\delta(\underline{y})$, et $y_0 = p^j$. Les deux morceaux pseudo-orbites $\underline{y}^- = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_-}$ et $\underline{y}^+ = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ définissent dans la carte au-dessus de $p^j$ deux graphes $w^u_{\underline{y}^-,0}(\beta)$ et $w^s_{\underline{y}^+,0}(\beta)$. Par ailleurs $y$ est dans $\Lambda_{r'}$, et l'invariance des graphes montrent que $\Phi_{p^j}(w^u_{\underline{y}^-,0}(\beta)) \subset W^u(y)$ et $\Phi_{p^j}(w^s_{\underline{y}^+,0}(\beta)) \subset W^s(y)$. De plus $\Phi_{p^j}(w^u_{\underline{y}^-,0}(\beta))$ et $\Phi_{p^j}(w^s_{\underline{y}^+,0}(\beta))$ sont connexes et contiennent $y$. La composante connexe de $W^u(y) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$ est connexe par arc, et est donc nécessairement $\Phi_{p^j}(w^u_{\underline{y}^-,0}(\beta))$, ainsi que la composante connexe de $W^s(y) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$ est nécessairement $\Phi_{p^j}(w^u_{\underline{y}^-,0}(\beta))$. Ceci prouve que $y$ est dans le voisinage parallélisant de $x$, $VP(r', p^j)$.

**Définition 3.1.9** *Si $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une pseudo orbite dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, on appelle variété stable locale en $\underline{y}$, et on la note $W^s_{loc}(\underline{y})$, l'ensemble*

$$W^s_{loc}(\underline{y}) \stackrel{déf}{=} \{\underline{z} = (z_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in (P_\delta)^{\mathbb{Z}},\ \forall i \geq 0 z_i = y_i\}.$$

*On appellera aussi variété instable locale en $\underline{y}$, l'ensemble*

$$W^u_{loc}(\underline{y}) \stackrel{déf}{=} \{\underline{z} = (z_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in (P_\delta)^{\mathbb{Z}},\ \forall i \leq 0 z_i = y_i\}.$$

La discussion précédente se synthétise de la manière suivante.

**Proposition 3.1.10** *Soit $y$ un point de $T_j$ ; $y$ est alors un point de $VP(r', p^j)$, et si on écrit $y = \Theta_\delta(\underline{y})$, avec $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ et $y_0 = p^j$, alors la composante connexe de $W^u(y) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$ est exactement $\Theta_\delta(W^u_{loc}(\underline{y}))$.*

Comme corollaire à cette proposition, nous précisons la définition des variétés stables locales dans un $T_j$.

**Définition 3.1.11** *Si $x \in T_j$, on note $W^u(y, T_j)$ l'intersection de $T$ avec la composante connexe de $W^u(y) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$. De même on note $W^s(y, T_j)$, l'intersection de $T$ avec la composante connexe de $W^s(y) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$.*

Nous allons voir maintenant les propriétés du type Markov des ensembles $T_j$.

**Proposition 3.1.12** *Les $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ forment un recouvrement en rectangles de $\Lambda_r$, c'est à dire que*

*(i)* $\Lambda_r \subset \bigcup_j T_j$ ;

*(ii) si $x$ et $y$ sont dans $T_j$ alors $W^u(x,T_j)$ et $W^s(y,T_j)$ s'intersectent en un unique point $z$, et $z \in T_j$ ;*

*Démonstration* : L'ensemble $\mathcal{T}$ des $T_j$ forme évidemment un recouvrement de $\Lambda_r$, comme le montre le lemme 3.1.6. Fixons nous dans $T_j$ deux points $x$ et $y$ ; on trouve deux codes $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\underline{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ tels que $x = \Theta_\delta(\underline{x})$ et $y = \Theta_\delta(\underline{y})$. La composante connexe de $W^u(x)\cap\Phi_{p^j}(B(0,l^{-1}(p^j)))$ qui contient $x$ est exactement $\Theta_\delta(W^u_{loc}(\underline{x}))$, et est l'image par $\Phi_{p^j}$ d'un graphe de pente petite de $B^u(0,l^{-1}(p^j))$ dans $B^s(0,l^{-1}(p^j))$. De même, la composante connexe de $W^s(y)\cap\Phi_{p^j}(B(0,l^{-1}(p^j)))$ qui contient $y$ est exactement $\Theta_\delta(W^s_{loc}(\underline{y}))$, et est l'image par $\Phi_{p^j}$ d'un graphe de pente petite de $B^s(0,l^{-1}(p^j))$ dans $B^u(0,l^{-1}(p^j))$. Ces deux graphes s'intersectent en un point $z$ ; leurs propriétés d'invariance montrent que l'orbite de $z$ $\delta$-piste la pseudo-orbite $\underline{z} = (z_{n_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\begin{cases} z_{n_i} = y_{n_i} \text{ pour tout } & i \geq 0 \\ z_{n_i} = y'_{n_i} \text{ pour tout } & i \leq 0. \end{cases}$$

$\underline{z}$ est dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, et donc $z$ est dans $T_j$ car $z_0 = p^j$. $\neg$

*Remarque* : Si $x$ et $y$ sont dans le rectangle $T_j$ on notera $[x,y] \overset{déf}{=} W^u(x,T_j)\cap W^s(x,T_j)$. L'application $(x,y)\mapsto[x,y]$ est continue sur $T_j\times T_j$, puisque image par $\Theta_\delta$ (qui est continue) de l'application similaire dans $C[p^j]$ (qui est un ouvert), qui elle est continue dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$.

A cette étape de la construction, le recouvrement n'est pas markovien. Tout comme dans la construction de Bowen (voir [4]), il vérifie quand même une propriété de Markov, lorsqu'on se restreint aux intersections, autorisées par les codes dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, entre l'image d'un rectangle et un autre rectangle.

**Proposition 3.1.13** *Les rectangles sont markoviens : Soient $T_j$ et $T_i$ deux rectangles, respectivement codés dans $P_\delta$ par les lettres $p^j$ et $p^i$. On suppose qu'il existe $\underline{x}\in(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ tel que $x_0 = p^j$ et $x_1 = p^i$. Alors si $x \overset{déf}{=} \Theta_\delta(\underline{x})$, on a $x\in T_j$, $f(x)\in T_i$, $f(W^u(x,T_j))\supset W^u(f(x),T_i)$ et $f(W^s(x,T_j))\subset W^s(f(x),T_i)$.*

*Démonstration* : En inversant $f$ et $f^{-1}$ on remarque qu'il suffit de démontrer juste une des deux inclusions. A $x$ on associe la pseudo-orbite $\underline{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, telle que $x_0 = p^j$, $x_1 = p^i$ et $\Theta_\delta(\underline{x}) = x$. L'ensemble $\Theta_\delta(W^s_{loc}(\underline{x}))$ est la composante connexe de $W^s(x)\cap\Phi_{p^j}(B(0,l^{-1}(p^j)))$ qui contient $x$ et est l'image par $\Phi_{p^j}$ du graphe $w^s_{\underline{x},0}(\beta)$ de $B^s(0,l^{-1}(p^j))$ dans $B^u(0,l^{-1}(p^j))$. L'invariance de ce graphe montre que

$$\Phi_{p^i}^{-1}\circ f\circ\Phi_{p^j}(w^s_{\underline{x},0}(\beta)) \subset w^s_{\underline{x},1}(\beta)),$$

et donc si $\sigma$ désigne le shift sur $\Sigma_\delta$,

$$f\left(\Theta_\delta(W^s_{loc}(\underline{x}))\right) \subset \Theta_\delta(W^s_{loc}(\sigma(\underline{x}))). \tag{3.7}$$

Si $z$ est dans $W^s(x, T_j)$, il existe une pseudo-orbite $\underline{z} = (z_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ telle que $z_0 = p^j$, et $z_i = x_i$ pour tout $i \geq 0$. Ceci prouve que $f(z)$ est dans $T_i$ et (3.7) prouve que $f(z)$ appartient à la composante connexe de $W^u(f(x)) \cap \Phi_{p^i}(B(0, l^{-1}(p^i)))$ qui contient $f(x)$. Ainsi

$$f(W^s(x, R_j)) \subset W^s(f(x), R_i). \quad \neg$$

Le fait que le recouvrement soit dénombrable et non pas fini est un sérieux obstacle à la construction d'une partition markovienne. Nous avons cependant le résultat important suivant.

**Lemme 3.1.14** *Presque tout point de $\Lambda_r$, au sens de la mesure de Lebesgue, n'appartient qu'à un nombre fini de rectangles du recouvrement précédent.*

*Démonstration* : On choisit un point $x$ de $\Lambda_r$ tel que pour tout entier $p \geq m(x)$, et pour tout $y$ dans $\Lambda_r$, $B(y, K\,e^{-p\varepsilon}l_0) \cap W^u_{loc}(x) = \emptyset$, et $B(y, K\,e^{-p\varepsilon}l_0) \cap W^s_{loc}(x) = \emptyset$. Ceci prouve donc que $x$ ne peut appartenir qu'à un nombre fini de rectangle. $\neg$
Les résultats précédents peuvent se formaliser de la manière suivante :

**Proposition 3.1.15** *Pour tout $\delta'$ on peut trouver un recouvrement de $\Lambda_r$ par des rectangles markoviens, inclus dans $\Lambda_{r'}$, de diamètre plus petit que $\delta'$, et tel que presque tout point de $\Lambda_r$ n'appartient qu'à un nombre fini de rectangles.*

*Démonstration* : il suffit de remarquer que le diamètre de $T_j$ est plus petit que $2K\delta$.

### 3.1.3 Et leurs différentes mesures de Lebesgue

L'hypothèse de conservativité permet d'assurer que dans un rectangle de mesure de Lebesgue positive, presque tout point revient une infinité de fois par itération de $f$. Afin de construire une mesure $\sigma$-SRB, nous allons définir un sous-système sur un bout de variété instable. Il convient alors de vérifier que la mesure de Lebesgue désintégrée le long des feuilletages stable et instable dans un rectangle, est encore la mesure de Lebesgue $Leb^s_x$ ou $Leb^u_x$. Plus précisément le but de cette section est de prouver que sur un rectangle de $\mathcal{T}$, la mesure de Lebesgue et la mesure locale $Leb^u_x \otimes leb^s_x$ sont équivalentes.

Si $p^j$ est un point de $P_\delta$, les points de $T_j$ sont inclus dans $VP(r', p^j)$, et la proposition 2.2.14 s'applique.

**Proposition 3.1.16** *Soit $T_j$ un rectangle de mesure de Lebesgue positive. Soit $x$ un point fixé de $T_j$, et $\Psi_{x,T_j}$ l'application de $W^u(x, T_j) \times W^s(x, T_j)$ dans $T_j$ définie par $\Psi_{x,T_j}((z^u, z^s)) = [z^u, z^s]$. Alors $\Psi_{x,T_j}$ est un homéomorphisme. De plus, si $Leb^u_{x,T_j}$ et $Leb^s_{x,T_j}$ désignent respectivement les mesures de Lebesgue des sous-variétés plongées $W^u(x)$ et $W^s(x)$ restreintes et renormalisées à $W^u(x, T_j)$ et $W^s(x, T_j)$, alors $\Psi_{x,T_j*} Leb^u_{x,T_j} \otimes Leb^s_{x,T_j}$ est équivalente à $Leb_{T_j}$.*

## 3.2 Le système réduit $(F, g_f)$

### 3.2.1 Construction d'un bon rectangle

Le recouvrement construit précédemment ne vérifie pas nécessairement la propriété de Markov en général. Si $T_j$ est un rectangle de mesure de Lebesgue positive, l'hypothèse $(H_2)$ de conservativité montre que presque tout point $x$ de $T_j$ revient une infinité de fois dans $T_j$ par itération de l'application $f$. Si $n$ est tel que $f^n(x) \in T_j$ nous n'avons pas forcément

$$\begin{cases} f^n\left(W^u(x, T_j)\right) \supset W^u(f^n(x), T_j) \\ f^n\left(W^s(x, T_j)\right) \subset W^s(f^n(x), T_j). \end{cases}$$

La propriété de Markov est néanmoins utile pour avoir d'une part de la régularité sur l'opérateur de Perron-Frobenius, et d'autre part pour pouvoir “épaissir” le système via l'extension naturelle. Il convient donc de définir avec soin le sous-système qui aura cette propriété. Le but de cette section est de construire un bon rectangle possédant une propriété de type Markov.

On recouvre $\Lambda_r$ par des rectangles comme dans la partie précédente ; on note $\mathcal{T}$ ce recouvrement.

**Définition 3.2.1** *Si $T_j$ est un des rectangles de $\mathcal{T}$, et si $T_j = \Theta_\delta(C[p^j])$, avec $p^j \in X_\delta$, on dira que $T_j$ est d'ordre $n$ si et seulement si $p^j \in \Lambda_r(n)$. Si $m$ est un entier, on notera $\mathcal{T}_m$ l'ensemble des rectangles de $\mathcal{T}$ d'ordre strictement plus petit que $m$, et $\mathcal{T}^m$, l'ensemble des rectangles de $\mathcal{T}$ d'ordre plus grand que $m$.*

Nous allons voir la proposition clef de la démonstration du théorème. Il s'agit de construire un rectangle ayant une vraie propriété de Markov, et qui soit de mesure de Lebesgue positive. Pour se faire, nous découperons les rectangles déjà construits $T_j$ en morceaux comme dans [4].

Si $T_j$ est un rectangle de $\mathcal{T}$, et si $T_i \in \mathcal{T}$ est tel que $T_j \cap T_i \neq \emptyset$ on pose :

$$\begin{aligned} T_{ji}^1 &= \{x \in T_j, W^u(x, T_j) \cap T_i = \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_i = \emptyset\}; \\ T_{ji}^2 &= \{x \in T_j, W^u(x, T_j) \cap T_i \neq \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_i = \emptyset\}; \\ T_{ji}^3 &= \{x \in T, W^u(x, T_j) \cap T_i \neq \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_i \neq \emptyset\}; \\ T_{ji}^4 &= \{x \in T_j, W^u(x, T_j) \cap T_i = \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_i \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

**Définition 3.2.2** *On appelle famille maximale de rectangles la donnée d'un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et d'un nombre fini de rectangles de $\mathcal{T}_m$, $\mathcal{F} = \{T_0, \ldots, T_k\}$, tels que*

*(i) Leb* $\left( \bigcap_{T_l \in \mathcal{T}^m} \bigcap_{i=0}^{k} T_{il}^1 \right) > 0$ ;

*(ii) pour tout* $T_j \notin \mathcal{F}$ *dans* $\mathcal{T}_m$, *Leb* $\left( \bigcap_{T_l \in \mathcal{T}^m} \bigcap_{i=0}^{k} T_{il}^1 \cap T_{jl}^1 \right) = 0.$

**Proposition 3.2.3** *Il existe des familles maximales de rectangles.*

*Démonstration* : $\mathcal{T}$ recouvre l'ensemble $\Lambda_r$ qui est de mesure de Lebesgue positive. De plus, chaque rectangle $T_j$ de $\mathcal{T}$ contient l'ensemble $U_j \stackrel{déf}{=} B(p^j, \varepsilon_2(p^j)) \cap \Lambda_r(n_j)$, où $n_j$ est l'ordre de $p^j$. Comme $\mathcal{T}$ est un ensemble dénombrable, il existe un rectangle $T_0$, d'ordre minimal, tel que $Leb(T_0) > 0$ et $Leb(U_0) > 0$. L'hypothèse de non intersection brutale implique qu'il existe un entier $m$, et un ensemble $S \subset U_0$, tels que $Leb_{T_0}(S) > 0$, pour tout rectangle $T_l$ dans $\mathcal{T}^m$, et pour tout $x$ de $S$,

$$W_l^u(x) \cap T_l = \emptyset = W_l^s(x) \cap T_l.$$

Ceci entraine en particulier, que pour tout $T_l$ dans $\mathcal{T}^m$, $S \subset T_{0l}^1$. Intéressons nous maintenant aux rectangles dans $\mathcal{T}_m$. Il n'y en a qu'un nombre fini, et nous pouvons découper $T_0$ comme dans [4].

Si $x$ est dans $T_0$, on note

$$T(x) = \bigcap \{T_{0l}^i,\ T_0 \cap T_l \neq \emptyset, T_l \in \mathcal{T}_m,\ x \in T_{0l}^i,\ i \in \{1,2,3,4\}\}.$$

Cet ensemble de rectangles $\{T(x), x \in T_0\}$, forme un recouvrement fini en rectangles (l'intersection d'un nombre fini de rectangle est encore un rectangle) de $T_0$. On notera $\{T_0', \dots, T_p'\}$ ces rectangles. Comme ils sont en nombre fini, il existe un indice $j$, tel que $Leb(T_j' \cap S) > 0$. Supposons que $T_0'$ vérifie cette propriété. Il s'écrit $\cap_{l \in I} T_{0l}^i$ $(i = i(l))$, ce qui signifie que $T_0'$ est inclus dans l'ensemble fini des rectangles $T_l$, tels que $i(l) = 3$ ; il n'y en a qu'un nombre fini, et $T_0$ est l'un d'eux ; on les notera $\mathcal{F}_0 \stackrel{déf}{=} \{T_0, \dots, T_k\}$, et on appellera $\mathcal{F}_0$ la famille génératrice de $T_0'$. Soient $T_l \in \mathcal{T}$ dans $\mathcal{T}^m$, $x \in T_0' \cap S$, et $j$ tel que $T_0' \subset T_j$ (*ie* $T_j \in \mathcal{F}_0$) ; $x$ est dans $T_j$ et donc dans $\Phi_{p^j}(B(0, \delta l^{-2}(p^j))) \subset B(p^j, K\delta l^{-2}(p^j))$. De plus, $x$ est dans $S \subset U_0$, et $T_0$ est d'ordre minimal, ce qui implique que $l(x) \leq l(p^j)$. Ainsi, par définition de $\delta$,

$$\frac{2K_L\delta}{l^2(p^j)} \leq \frac{K_H}{100 l^2(x)},$$

ce qui montre que

$$T_j \subset \Phi_x(B(0, K_H l^{-1}(x))). \tag{3.8}$$

La relation (3.8) prouve que $W^u(x, T_j)$ est inclu dans $W_{l,K_H}^u(x)$, et que $W^s(x, T_j)$ est inclu dans $W_{l,K_H}^s(x)$. Alors, nécessairement, $x \in T_{jl}^1$. Comme $T_0' \cap S$ est de mesure positive, ceci montre que le $(i)$ de la définition 3.2.2 est vrai.

Construisons maintenant une famille maximale de rectangles. l'ensemble des rectangles dans $\mathcal{T}_m$ est fini. De plus, il existe des rectangles $T_j'$ tels que la famille génératrice $\mathcal{F}_j$ vérifie la condition $(i)$ de la définition 3.2.2. Ceci prouve qu'on peut trouver une famille $\mathcal{F} = \{T_0, \ldots, T_k\}$ de rectangles de $\mathcal{T}_m$, telle que $\mathcal{F}$ vérifie la condition $(i)$ et $card(\mathcal{F})$ soit maximal parmi cet ensemble de familles qui vérifie $(i)$. Cette famille $\mathcal{F}$ est nécessairement une famille maximale de rectangles de $\mathcal{T}$. $\neg$

**Définition 3.2.4** *Soit $(m, \mathcal{F} = \{T_0, \ldots, T_k\})$ une famille maximale de rectangles de $\mathcal{T}_m$. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $\bigcap_{j=0}^{k} T_j$ par, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si pour tout entier $j \in [0, k]$, pour tout $T_l$ dans $\mathcal{T}$,*

$$T_l \cap T_j \neq \emptyset \Longrightarrow \left(x \in T^i_{jl} \iff y \in T^i_{jl}\right).$$

*Si $R'$ est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ dans $\bigcap_{j=0}^{k} T_j$, et si $x$ est dans $R'$, on note $W^u(x, R')$ l'intersection de $R'$ avec la composante connexe de $W^u(x) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{k} \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))\right)$ qui contient $x$. On notera de même $W^s(x, R')$.*

La définition des ensembles $W^s(x, R')$ et $W^u(x, R')$ n'est pas très pratique. Nous allons voir une propriété plus parlante.

**Lemme 3.2.5** *Soit $(m, \mathcal{F} = \{T_0, \ldots, T_k\})$ une famille maximale de rectangles de $\mathcal{T}_m$. Soit $R'$ est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ dans $\bigcap_{j=0}^{k} T_j$. Alors pour tout $x$ dans $R'$, $W^s(x, R') \subset \bigcap_{j=0}^{k} W^s(x, T_j)$.*

*Démonstration* : Par construction, $W^s(x, T_j)$ est l'intersection de $T_j$ avec la composante connexe de $W^u(x) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $x$. $R'$ est dans tous les rectangles $T_j$, et donc l'intersection de $R'$ avec la composante connexe de $W^u(x) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{k} \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))\right)$ qui contient $x$ est contenu, pour tous les $j \in [0, k]$, dans l'intersection de $T_j$ avec la composante connexe de $W^u(x) \cap \Phi_{p^j}(B(0, l^{-1}(p^j)))$ qui contient $x$. Ceci prouve que $W^s(x, R') \subset \bigcap_{j=0}^{k} W^s(x, T_j)$. $\neg$

Nous allons maintenant voir la proposition clef de cette section.

**Proposition 3.2.6** *Il existe un borélien $R'$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

*1 $R'$ est un rectangle de mesure de Lebesgue positive ;*

*2 Il existe une famille maximale de rectangles de $\mathcal{T}_m$, $(m, \mathcal{F} = \{T_0, \ldots, T_k\})$, telle que*

*(i) $R'$ soit une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$ dans $\bigcap_{j=0}^{k} T_j$ ;*

*(ii) Si $T_l \notin \{T_0, \ldots, T_k\}$, alors $R' \cap T_l = \emptyset$.*

*(iii) Pour tout entier $j \in [0,k]$, pour tout $T_l$ dans $\mathcal{T}^m$,*

$$W^u(x,T_k) \cap T_l = W^s(x,T_k) \cap T_l = \emptyset.$$

*3 Si $x$ est un point de $R'$ et si $f^n(x)$ appartient aussi à $R$, alors*

$$f^n(W^s(x,R')) \subset W^s(f^n(x),R') \quad \textit{et} \quad f^n(W^u(x,R')) \supset W^s(f^n(x),R').$$

*Démonstration* : on commence par prendre une famille maximale de rectangles de $\mathcal{T}_m$, $(m, \mathcal{F} = \{T_0,\ldots,T_k\})$. Par hypothèse $Leb\left(\bigcap_{T_l\in\mathcal{T}^m}\bigcap_{i=0}^{k} T^1_{il}\right) > 0$. Comme l'ensemble $\mathcal{T}_m$ est fini, parmis toutes les classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$, il en existe au moins une, $R'$, telle que $Leb(R') > 0$ et $R' \subset \bigcap_{T_l\in\mathcal{T}^m}\bigcap_{i=0}^{k} T^1_{il}$. De plus $\{\bigcap_{T_l\in\mathcal{T}^m}\bigcap_{i=0}^{k} T^1_{il}\}$ est un rectangle comme intersection dénombrable de rectangles, et la finitude de $\mathcal{T}_m$ implique que $R'$ est un rectangle. Ceci prouve *1*. Par construction $R' \subset \bigcap_{j=0}^{k} T_j$ (*2 (i)*), et l'hypothèse de maximalité de $\mathcal{F}$ entraine *2 (ii)*. La construction de $R'$ entraine également *2 (iii)*.

Il reste à vérifier le point *3*.

On choisit donc $x$ dans $R'$ tel que $f^n(x)$ soit aussi dans $R'$. Nous allons prouver que $f^n(W^s(x,R')) \subset W^s(f^n(x),R')$.

On commence par montrer que $W^s(x,R') \subset \bigcap_{j=0}^k W^s(x,T_j)$.

Soit $y$ dans $W^s(x,R')$. Tout comme les points $x$ et $f^n(x)$, le point $y$ appartient exactement aux rectangles $\{T_0,\ldots,T_k\}$. Nous allons montrer que $f^n(y)$ n'est aussi élément que des rectangles $\{T_0,\ldots,T_k\}$. Soit $\underline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (P_\delta)^{\mathbb{Z}}$ tel que $\Theta_\delta(\underline{y}) = y$. Comme $y$ est dans $R'$, nécessairement $y_0$ est l'une des lettres $\{p^0,\ldots,p^k\}$. Supposons qu'on ait $y_0 = p^0$. Comme $W^s(x,R') \subset W^s(x,T_0) \subset \Theta_\delta(W^s_{loc}(\underline{y}))$, la proposition 3.1.13 montre qu'il existe $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, tels que $x_i = y_i$ pour tout $i \geq 0$, et $\Theta_\delta(\underline{x}) = x$. Ainsi $y_n$ est nécessairement l'une des lettres $\{p^0,\ldots,p^k\}$. Réciproquement, si $p^j$ est fixé, il existe $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, tel que $x_n = p^j$ et $\Theta_\delta(\underline{x}) = x$. Nécessairement $x_0$ est l'une des lettres $\{p^0,\ldots,p^k\}$, et comme $y \in W^s(x,R') \subset \bigcap_{j=0}^k W^s(x,T_j)$, toujours par la proposition 3.1.13, il existe $\underline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, tel que $\Theta_\delta(\underline{y}) = y$ et $y_i = x_i$ pour tout $i \geq 0$. Ceci prouve que $f^n(y)$ n'est élément que des rectangles $\{T_0,\ldots,T_k\}$.

Prenons $T_l$ un rectangle tel que $W^u(f^n(y),T_j) \cap T_l \neq \emptyset$ pour un certain $j \in [0,k]$. On prend un point $f^n(z)$ dans $W^u(f^n(y),T_j) \cap T_l$ ($f$ est un difféomorphisme). Il existe un rectangle $T_q \in \mathcal{T}$ et un code $\underline{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, tels que $\Theta_\delta(\underline{z}) = z$, $z_0 = p^q$ et $z^n = p^l$. Comme $f^n(z)$ est dans $W^u(f^n(y),T_j)$, il existe un rectangle $T_i \in \mathcal{T}$, $i \in [0,k]$ et un code $\underline{z'} = (z'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $(P_\delta)^{\mathbb{Z}}$, tels que $\Theta_\delta(\underline{z'}) = z$, $z'_0 = p^i$ et $z^n = p^j$. Ceci montre que $W^u(y,T_i) \cap T_q$ contient $\{z\}$, et donc $W^u(y,T_i) \cap T_q \neq \emptyset$. Comme $y$ est dans $R'$, $W^u(x,T_i) \cap T_q \neq \emptyset$, et $z' = W^s(z,T_q) \cap W^u(x,T_i)$ existe. Alors

$f^n(z')$ est à la fois dans $T_l$ et dans $T_i$, ce qui prouve que $W^u(f^n(x), T_j) \cap T_l \neq \emptyset$. Ainsi

$$f^n(y) \in T^i_{jl} \iff f^n(x) \in T^i_{jl},$$

ce qui prouve que $f^n(y)$ appartient à $R'$.

Pour prouver que $f^n(W^u(x, R')) \supset W^u(f^n(x), R')$, il suffit de faire comme précédemment en inversant $f$ et $f^{-1}$. Ceci finit la preuve de la proposition. ¬

### 3.2.2 Détermination du système réduit

Comme dans le cas uniformément hyperbolique, nous allons définir sur $R'$ une transformation reliée à $f$. Le système est conservatif, et donc Lebesgue presque tout point $x$ de $R'$ revient une infinité de fois dans $R'$ par itération de $f$ et par itération de $f^{-1}$. On note $R$ l'ensemble de ces points. Sur $R$ on définit l'application temps de premier retour par

$$r(x) \stackrel{déf}{=} \inf\{k \in \mathbb{N}^*, f^n(x) \in R\},$$

puis la suite des temps de retour par

$$\begin{cases} r^1(x) & = r(x), \\ r^{n+1}(x) & = r(f^{r^n(x)}(x)) + r^n(x). \end{cases}$$

**Lemme 3.2.7** *L'ensemble $R$ est un rectangle de mesure de Lebesgue positive.*

*Démonstration* : Par définition, $Leb(R') = Leb(R)$. De plus, les propriété du type Markov du rectangle $R'$ entrainent que si $x$ revient une infinité de fois dans $R'$ par itération de $f$, alors tous les points de $W^s(x, R')$ reviennent une infinité de fois dans $R'$ par itération de $f$, et pour tout $y \in W^s(x, R')$, pour tout $n$, $r^n(x) = r^n(y)$. De même si $x$ revient une infinité de fois dans $R'$ par itération de $f^{-1}$, tous les points de $W^u(x, R')$ reviennent une infinité de fois dans $R'$ par itération de $f^{-1}$. Ainsi si $x$ et $y$ sont dans $R$, $[x, y]$ est bien défini dans $R'$ et vaut $W^s(x, R') \cap W^u(x, R')$. De plus $[x, y]$ est dans $R$. ¬

**Définition 3.2.8** *Soit $x$ dans $R$. On note $W^u(x, R) \stackrel{déf}{=} R \cap W^u(x, R')$. On notera encore $[x, y] \stackrel{déf}{=} W^s(x, R) \cap W^u(y, R)$ pour tout $(x, y) \in R^2$.*

**Lemme 3.2.9** *Le rectangle $R$ vérifie la propriété de Markov : si $x \in R$ et si $f^n(x) \in R$, alors*

$$f^n(W^u(x, R)) \supset W^u(f^n(x), R) \text{ et } f^n(W^s(x, R)) \subset W^s(f^n(x), R).$$

*Démonstration* : C'est une conséquence directe de la propriété de Markov de $R'$, et de l'invariance de $R$ par $f$ : si $y$ est dans $R$ et $f^n(y) \in R'$, alors $f^n(y)$ est encore dans $R$. ¬

**Définition 3.2.10** *On se fixe un point $x_0$ dans $R$. Dans toute la suite $F$ désignera $W^u(x, R)$.*

On définit une application premier retour dans $R$, $g$, par $g(x) = f^{r(x)}(x)$, et une application $g_F$ de $F$ dans lui-même par $g_F(x) = \pi_F \circ g(x)$, où $\pi_F$ est l'holonomie stable dans $R$ sur $F$ (c'est à dire l'application $[., F]$). Comme $Leb(R)$ est strictement positive, la proposition 3.1.16 montre que $Leb^u(F) > 0$, où $Leb^u$ est la mesure riemannienne sur $W^u(x_0)$. On notera donc $Leb_F$ la mesure de Lebesgue, $Leb^u$, renormalisée à $F$.

**Définition 3.2.11** *Si $n \in \mathbb{N}^*$, et si $x \in F$, on note $C_n(x)$, et on l'appelle cylindre d'ordre $n$ contenant $x$, l'ensemble*

$$C_n(x) \overset{déf}{=} F \cap f^{-r^n(x)} \left( W^u(f^{r^n(x)}(x), R) \right).$$

**Proposition 3.2.12** *Les cylindres d'ordre $n$ forment une partition de $F$, et sont les images de $F$ par les branches inverses de $g_F^n$.*

*Démonstration* : Il est clair que pour tout $n$, et pour tout $x$, $g_F^n(C_n(x)) = F$. De plus la propriété de Markov de $R$ prouve que deux cylindres de même ordre $n$ et de $n$-ième temps de retours ($r^n(x)$ et $r^n(y)$ pour n'importe quel $x$ dans le premier cylindre, et n'importe quel $y$ dans le second) différents sont disjoints. Par ailleurs, deux cylindres de même ordre et de même $n$-ième temps de retours sont images réciproques de deux feuilles instables disjointes de $R$ ; les cylindres forment une partition. $\neg$

Nous rappelons quelques notations déjà introduites dans le cas uniforme.

**Définition 3.2.13** *Si $x$ est un point de $F$, et si $n$ est un entier, on note $Ant_n(x)$ les préimages par $g_F^n$ de $x$. On notera aussi $Ant(n, x)$ les points, $y$, de $Ant_1(x) = Ant(x)$ tels que $\pi_F \circ f^n(y) = x$.*

On rappelle que chaque cylindre d'ordre $n$ contient exactement un élément de $Ant_n(x)$, pour tout $x$ de $F$.

# Chapitre 4

# Existence d'une Mesure $\sigma$-SRB

## 4.1 Construction sur $(F, g_F)$

### 4.1.1 Étude du jacobien de $g_F$

Nous allons définir sur $L^1(Leb_F)$ un opérateur du type opérateur de Perron-Frobénius. Pour cela nous définissons d'abord le potentiel.

Nous rappelons en premier lieu que si $x$ est régulier, le terme $J^u(x)$ désigne le jacobien de l'application $df_x : E^u(x) \to E^u(f(x))$. La proposition (2.2.11) montre alors que l'application $\pi_F$ a pour jacobien

$$J(x) = \frac{\prod_{n=0}^{+\infty} J^u(f^n(x))}{\prod_{n=0}^{+\infty} J^u(f^n(\pi_F(x)))}.$$

De plus si $x \in F$, alors $f^{r(x)} : C_1(x) \to W^u(f^{r(x)}, R)$ a pour jacobien $(J^u)^{r(x)}(w) \overset{déf}{=} \prod_{n=0}^{r(x)-1} J^u(f^n(w))$, tous les points $w$ de $C_1(x)$ vérifiant $r^1(w) = r(x)$ par construction du cylindre $C_1(x)$.

**Définition 4.1.1** *Pour tout $x$ de $F$ nous noterons*

$$J(x) = \left(\prod_{n=0}^{r(x)-1} J^u(f^n(x))\right) \times \left(\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{J^u(f^{r(x)+n}(x))}{J^u(f^n(g_F(x)))}\right).$$

*$J$ désigne le jacobien de $g_F$.*

On posera alors

$$J^n(x) \overset{déf}{=} \prod_{k=0}^{n-1} J(g_F^k(x)),$$

si $x$ est dans $F$.

*Remarque* : Ici nous faisons la démarche inverse de celle de la partie I. Nous montrons que le jacobien entre deux feuilles instables vaut $\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{J^u(f^{r(x)+n}(x))}{J^u(f^n(g_F(x)))}\right)$, alors que précédemment nous nous donnions une application $\omega$, et nous avions montré que $e^{-\omega}$ était le jacobien entre deux feuilles instables.

Tout comme dans le cas Axiom-A un point clef est d'établir une majoration uniforme de la variation $-\log J^n$ sur chaque cylindre d'ordre $n$. Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 4.1.2** *Il existe une constante universelle $\kappa$ sur $F$ telle que pour tout entier $n$, pour tout couple $(x,y)$ d'un même cylindre d'ordre $n$ de $F$, alors*

$$|\log J^n(x)-\log J^n(y)|\le\kappa.$$

*Démonstration* : La majoration se fait en coupant le Jacobien en deux et en majorant chaque terme. Le premier terme estime la variation le long des orbites (par itération de $f$) pour les temps plus petits que $r^n\stackrel{déf}{=}r^n(x)=r^n(y)$, et le second terme estime les variations conséquentes à la dérive introduite par $\pi_F$ pour les temps supérieurs à $r^n$. Tous les points de $R$ sont, d'une part réguliers, et dans un même $\Lambda_{r'}$, avec $r'$ proche de $r$, et d'autre part dans un même rectangle du recouvrement initial $\mathcal{T}$. La proposition (2.2.6) montre alors que $z\mapsto -\log J^u(z)$ est d'une manière globale $\beta$-höldérienne, la constante de Hölder étant à variation lente le long de l'orbite, (car proportionnelle à la fonction $l$ dans les cartes de Lyapunov). Si on se restreint à une feuille instable $W^u_{l'}(x)$, ou à une feuille instable dans $R$, $W^u(x,R)$, l'application est alors $\alpha$-Hölder. Ainsi, il existe une constante universelle telle que si $x$ et $y$ sont dans le même cylindre d'ordre 1, alors

$$|\log(J^u)^{r(x)}(x)-\log(J^u)^{r(x)}(y)| \quad\le\quad \sum_{k=0}^{r(x)-1} C\,l(x^{R_1})e^{k\varepsilon}d^{\alpha}(f^k(x),f^k(y)). \tag{4.1}$$

Par ailleurs pour tout $k<r(x)$, $d(f^k(x),f^k(y))\le e^{-(\lambda'-2\varepsilon)(r(x)-k)}d(f^{r(x)}(x),f^{r(x)}(y))$, et donc (4.1) montre qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que

$$|\log(J^u)^{r(x)-1}(x)-\log(J^u)^{r(x)-1}(y)| \quad\le\quad \kappa. \tag{4.2}$$

Nous allons utiliser un argument similaire pour montrer qu'il existe une constante universelle $\kappa'$ telle que pour tout $x$ de $R$

$$\left|\log\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{J^u(f^{r(x)+n}(x))}{J^u(f^n(g_F(x)))}\right)\right| \quad\le\quad \kappa'. \tag{4.3}$$

Par construction de $R$, les points $g(x)=f^{r(x)}(x)$ et $g_F(x)=\pi_F\circ f^{r(x)}(x)$ sont dans une même feuille stable locale $W^(g(x),T_j)$, et ils se rapprochent donc exponentiellement vite. La variation Hölder du jacobien instable prouve alors que

$$\left|\log J^u(f^{r(x)+k}(x)) - \log J^u(f^k \circ g_F(x))\right| \leq C\, l(p^0) e^{k\varepsilon} d^\beta(f^{r(x)}(x), g_F(x)) e^{-(\lambda'-2\varepsilon)k\beta},$$

ce qui prouve bien (4.3).

Les deux majorations (4.2) et (4.3) montrent la proposition dans le cas $n = 1$. Pour $n > 1$, on remarque que

$$J^n(x) = \left(\prod_{k=0}^{r^n(x)-1} J^u(f^k(x))\right) \times \left(\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{J^u(f^{r^n(x)+k}(x))}{J^u(f^k(g_F^n(x)))}\right).$$

On considère deux points $x$ et $y$ dans un même cylindres $C_n(x)$ d'ordre $n$. Alors $f^k(x)$ et $f^k(y)$ sont dans une même feuille instable locale pour tous les $k \leq r^n(x)$. La variation $\alpha$-Hölder du jacobien instable sur les feuilles instables locales, et donc sur les $W^u(g^k(x), R)$, pour $k < n$, montre qu'il existe $\kappa$ telle que

$$|\log(J^u)^{r^n(x)-1}(x) - \log(J^u)^{r^n(x)-1}(y)| \;\; \leq \;\; \kappa \sum_{j=0}^{r^n(x)-1} e^{-(\lambda'-2\varepsilon)j\alpha}, \qquad (4.4)$$

en majorant $d(g_F^n(x), g_F^n(y))$ par le diamètre de $F$. La majoration du second terme s'obtient exactement comme celle de (4.3). $\neg$

### 4.1.2 L'opérateur de Perron-Frobenius

Nous allons définir un opérateur $\mathcal{L}$ sur $L^1(Leb_F)$ qui vérifiera

$$\int \mathcal{L}(\varphi).\psi \, dLeb_F = \int \varphi.\psi \circ g_F \, dLeb_F,$$

pour tout $\varphi \in L^1(Leb_F)$ et $\psi \in L^\infty(Leb_F)$.

**Définition 4.1.3** *On définit l'opérateur sur $L^1(Leb_F)$, par*

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) = \sum_{y \in Ant(x)} e^{-\log J(y)} \varphi(y).$$

Cet opérateur, qui est du type opérateur de Perron-Frobenius vérifie plusieurs propriétés.

**Proposition 4.1.4** *(i) Pour tout $\varphi \in L^1(Leb_F)$ et $\psi \in L^\infty(Leb_F)$,*

$$\int \mathcal{L}(\varphi).\psi \, dLeb_F = \int \varphi.\psi \circ g_F \, dLeb_F.$$

*(ii) L'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire et est une contraction de $L^1$ ; en particulier il est continu.*
*(iii) pour toute fonction $\varphi$, $\int \mathcal{L}(\varphi)\, dLeb_F(x) = \int \varphi\, dLeb_F$.*
*(iv) $\mathcal{L}(\varphi) = \varphi$ si et seulement si la mesure $\mu$ définie par $d\mu(x) = \varphi(x)\, dLeb_F(x)$ est $g_F$-invariante.*

*Démonstration* : Prenons $\varphi$ dans $L^1$ et $\psi$ dans $L^\infty$.

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\psi\circ g_F(x)\, dLeb_F(x) &= \sum_{C \text{ d'ordre } 1} \int_C \varphi(x)\psi\circ g_F(x)\, dLeb_F(x)\\ &= \sum_{C \text{ d'ordre } 1} \int \mathbb{1}_C(x)\varphi(x)\psi\circ g_F(x)\, dLeb_F(x) \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Comme la mesure de Lebesgue est une mesure conforme pour la transformation $g_F$, la relation (4.5) entraine

$$\int \varphi(x)\psi\circ g_F(x)\, dLeb_F(x) = \sum_{C \text{ d'ordre } 1} \int \mathbb{1}_C(g_F^{-1}(x))\varphi(g_F^{-1}(x))\psi(x)e^{-\log J(g_F^{-1}(x))}\, dLeb_F(x), \tag{4.6}$$

où $g_F^{-1}(x)$ désigne l'unique antécédent de $x$ par $g_F$ qui se trouve dans le cylindre d'ordre 1, $C$. L'égalité (4.6) et le théorème de convergence monotone prouvent alors que

$$\int \mathcal{L}(\varphi).\psi\, dLeb_F = \int \varphi.\psi\circ g_F\, dLeb_F. \tag{4.7}$$

En remplaçant $\psi$ par 1 dans (4.7), on prouve *(iii)*. *(ii)* se prouve en remplaçant $\psi$ par $signe(\mathcal{L})(x)\times 1$. On montre ainsi que $\mathcal{L}$ est une contraction et est donc continue. Sa linéarité est directement une conséquence de sa définition. *(iv)* se prouve comme dans le cas Axiom-A. $\neg$

Nous allons chercher un point fixe de l'opérateur pour construire une mesure invariante et absolument continue avec Lebesgue. Dans ce but, nous montrons un résultat intermédiaire.

**Lemme 4.1.5** *La famille $\{\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)\}$ est uniformément bornée dans $L^\infty$.*

*Démonstration* : On se fixe un entier $n$, et on prend $x \in F$ tel que $\mathcal{L}(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{z\in Ant(x)} e^{-\log J(z)}$. Si $y$ est un point de $F$ tel que $\mathcal{L}(\mathbb{1}_F)(y) = \sum_{z\in Ant(y)} e^{-\log J(z)}$, la proposition (4.1.2) montre que

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(y)e^{-\kappa} \le \mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(x) \le \mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(y)e^{\kappa},$$

ce qui prouve que

$$0 \le \mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(x) \le e^{\kappa}\int \mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(y)\, dy,$$

et donc que $||\mathcal{L}^n(\mathbb{1})||_\infty \le e^\kappa$ pour tout $n$. $\neg$

**Proposition 4.1.6** *Il existe une fonction $\varphi_0$ dans $L^\infty$ fixée par $\mathcal{L}$.*

*Démonstration* : On considère la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}^k(\mathbb{1}_F)\}_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite de la boule de rayon $e^\kappa$ dans $L^\infty$, et comme la boule unité $B_\infty$ est compacte pour la topologie faible de $(L^\infty, L^1)$, on peut en extraire une sous-suite $\{\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge pour le topologie faible. Notons $\varphi_0$ cette limite. Montrons que $\varphi$ est invariante par $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}(\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)) \quad = \quad \frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F) + \frac{1}{n_k}(\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F) - \mathbb{1}_F) \tag{4.8}$$

Le second terme de droite dans (4.8) est une fonction de $L^\infty(Leb_F)$, et le théorème de convergence dominé de Lebesgue prouve qu'il tend vers 0 pour la topologie faible de $(L^\infty, L^1)$. En passant alors à la limite dans l'égalité (4.8), on constate que $\mathcal{L}(\varphi_0) = \varphi_0$. $\neg$

### 4.1.3 La mesure invariante

La proposition (4.1.6) montre l'existence d'un point fixe dans $L^\infty$. dans toute la suite $\mu$ désignera la mesure définie par

$$d\mu(x) \stackrel{déf}{=} \varphi_0(x)\,.dLeb_F(x).$$

Nous donnons maintenant les principales propriétés de cette mesure.

**Proposition 4.1.7** *La mesure $\mu$ est une mesure borélienne de probabilité, $g_F$-invariante, mélangeante et équivalente à la mesure de Lebesgue.*

Le reste de cette partie sera consacré à la démonstration de cette proposition et à l'énoncé d'un corollaire.

#### Preuve que $\mu$ est une probabilité

Si $\{\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\varphi_0$, on note

$$\varphi^{n_k} \stackrel{déf}{=} \frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}).$$

Comme $\int \varphi^{n_k}\,dLeb_F = 1$, et $||\varphi^{n_k}||_\infty \leq e^\kappa$ pour tout $k$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\int \varphi_0\,dLeb_F = \lim_{k\to+\infty}\int \varphi^{n_k}\,dLeb_F = 1,$$

et $\mu$ est bien une mesure borélienne de probabilité. $\neg$

**Preuve que $\mu$ est $g_F$-invariante**

C'est une conséquence des propriétés de l'opérateur $\mathcal{L}$ et de la convergence faible de la suite. On commence par remarquer que puisque $\{\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie faible, les suites $\{\frac{1}{n_k+1}\sum_{p=1}^{n_k}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{k\in\mathbb{N}}$, et $\{\frac{1}{n_k-1}\sum_{p=0}^{n_k-2}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergent aussi pour la topologie faible, puisque $\sup_n ||\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)||_\infty \leq e^\kappa$. Par conséquent pour toute fonction $\psi$ dans $L^1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int \psi\, d\mu &= \int \psi(x)\,\varphi_0(x) dLeb_F(x) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\int \psi(x)\,\varphi^{n_k}(x) dLeb_F(x) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-1}\int \psi(x)\mathcal{L}^p(\mathbb{1})(x) dLeb_F(x) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{p=0}^{n_k-2}\int \psi\circ g_F(x)\mathcal{L}^p(\mathbb{1})(x) dLeb_F(x) + \frac{1}{n_k}\int \psi(x)\, dLeb_F(x).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Comme $\psi$ est dans $L^1$, que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, et compte tenu de la remarque faite précédemment, l'égalité (4.9) devient :

$$\int \psi\, d\mu = \int \psi\circ g_F\, d\mu. \tag{4.10}$$

$\neg$

**Preuve que $\mu$ est mélangeante**

Il faut utiliser le théorème des martingales. On appelle $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par les cylindres d'ordre $n$ de $F$. La suite $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de tribu, qui converge vers la tribu grossière $\mathcal{E}$. Le théorème des martingales assure que pour toute fonction $\psi$ dans $L^1$, $\mathbb{E}[\psi|\mathcal{B}_n]$ converge presque surement vers $\psi$. Si $n$ est un entier et si $x$ est dans $F$ on appelle frère d'ordre $n$ du point $x$ tout $y$ de $F$ tel que $g_F^n(y) = g_F^n(x)$. On notera alors $\mathcal{T}_n$ la tribu des boréliens $B$ tels que si $x\in B$, alors tous les frères d'ordre $n$ de $x$ sont aussi dans $B$. On note enfin $\mathcal{T}_\infty$ la tribu $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_n$. Cette tribu n'est pas quelconque vis à vis de la mesure de Lebesgue :

**Lemme 4.1.8** *La mesure de Lebesgue est exacte, ce qui signifie que $\mathcal{T}_\infty$ est la tribu triviale $(\emptyset, F)$ (pour Lebesgue).*

*Démonstration* : On se fixe un borélien $B$ de $\mathcal{T}_\infty$ de mesure de Lebesgue positive. Le théorème des martingales assure que pour presque tout point $x$ de $F$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{Leb_F(C_n[x])}\int_{C_n[x]}\mathbb{1}_B\, dLeb_F = \mathbb{1}_B(x).$$

On choisit un tel $x$ dans $F \cap B$, et on se fixe un $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N$ à partir duquel

$$\frac{1}{Leb_F(C_n[x])} \int_{C_n[x]} \mathbb{1}_B \, dLeb_F \geq 1 - \varepsilon,$$

pour tout $n \geq N$. Si $y$ est une frère de $x$ d'ordre $n$, il existe un homéomorphisme naturel entre les deux cylindres $C_n[x]$ et $C_n[y]$. De plus, la mesure de Lebesgue est conforme, et la proposition (4.1.2) entraine alors que

$$\frac{1}{Leb_F(C_n[y])} \int_{C_n[y]} \mathbb{1}_B \, dLeb_F \geq (1 - \varepsilon) e^{-4\kappa}, \tag{4.11}$$

pour tout entier $n \geq N$. Les cylindres engendrent la tribu des boréliens de $F$, et (4.11) montre que nécessairement $Leb_F(B) \geq (1 - \varepsilon)e^{-4\kappa}$ pour tout borélien de mesure strictement positive dans $\mathcal{T}_\infty$. Puisque la mesure de Lebesgue n'est pas atomique, $\mathcal{T}_\infty$ est la tribu triviale. $\neg$

Si $\psi$ et $\varphi$ sont deux fonctions mesurables de $L^\infty$, telles que $\int \psi \, dLeb_F = \int \varphi \, dLeb_F = 0$, alors

$$\int \varphi.\psi \circ g_F^n \, dLeb_F \quad = \quad \int \mathbb{E}\left[\varphi | \mathcal{T}_n\right] \psi \circ g_F^n \, dLeb_F$$

par définition de $\mathbb{E}[.|\mathcal{T}_n]$. Ainsi, pour tout $n$

$$\left| \int \varphi.\psi \circ g_F^n \, dLeb_F \right| \quad \leq \quad \int \left| \mathbb{E}\left[\varphi | \mathcal{T}_n\right] \right| \, dLeb_F ||\psi||_\infty. \tag{4.12}$$

Si $n \to +\infty$, le théorème des martingales montre que $\mathbb{E}\left[\varphi | \mathcal{T}_n\right]$ converge dans $L^1$ et presque surement vers $\int \varphi \, dLeb_F = 0$. Alors (4.12) prouve que

$$\lim_{n \to +\infty} \int \varphi.\psi \circ g_F^n \, dLeb_F \quad = \quad 0 \tag{4.13}$$

et comme $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, (4.13) montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int \varphi.\psi \circ g_F^n \, d\mu \quad = \quad 0 \tag{4.14}$$

Ceci étant valable pour tout couple de fonctions d'intégrales nulles, le mélange de la mesure $\mu$ est acquis. $\neg$

**Corollaire 4.1.9** *La mesure $\mu$ est ergodique pour le système $(f, g_F)$*

**preuve que $\mu$ et $Leb_F$ sont équivalentes**

Notons $\mathcal{O}$ le borélien où $\varphi_0$ s'annule. Comme $\varphi_0$ est $\mathcal{L}$ invariante si $x$ appartient à $\mathcal{O}$ alors $Ant(x) \subset \mathcal{O}$. Cela prouve que $\mathcal{A}(x) \overset{déf}{=} \cup_{n=0}^{\infty} Ant_n(x)$ est inclu dans $\mathcal{O}$, pour tout $x$ de $\mathcal{O}$, et donc que $g_F^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Comme $\mu$ est ergodique, $\mathcal{O} = \emptyset$ ou $\mathcal{O} = F$ modulo $\mu$. Si $\mathcal{O} = F$, alors

$$1 = \mu(\mathcal{O}) = \int \mathbb{1}_{\mathcal{O}}(x)\varphi_0(x)dx = 0,$$

ce qui est absurde. Donc $\mu(\mathcal{O}) = 0$ est $\mu$ et $Leb_F$ sont équivalentes. $\neg$

**Corollaire 4.1.10** *L'opérateur $\mathcal{L}$ admet un unique point fixe $\varphi_0$. De plus la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_0$ pour la topologie faible de $(L^\infty, L^1)$.*

*Démonstration* : Si $\varphi_1$ est un autre point fixe de $\mathcal{L}$ alors la mesure (renormalisée) $\mu_1$ définie par $d\mu_1(x) = \varphi_1(x)dx$ est aussi une mesure de probabilité $g_F$-invariante et ergodique (du fait de la propriété d'exactitude de $Leb_F$). Les deux fonctions $\varphi_0$ et $\varphi_1$ sont $Leb_F$-presque partout inversibles, et donc les deux mesures $\mu$ et $\mu_1$ sont ergodiques et équivalentes (car toutes les deux équivalentes à $Leb_F$). Nécessairement ces deux mesures sont égales, et donc $\varphi_0 = \varphi_1$.

Démontrons le second point : La suite $\{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille relativement compacte de $L^\infty$ pour la topologie faible qui ne peut avoir qu'une unique valeur d'adhérence. Elle est donc convergente. $\neg$

*Remarque* : Le corollaire (4.1.10) signifie qu'il existe une unique mesure $g_F$-invariante absolument continue par rapport à Lebesgue.

Dans le cas Axiom-A nous avions une fonction continue strictement positive sur un compact. Nous pouvions alors affirmer qu'elle était “loin” de 0. Ici ce n'est plus le cas et nous devons donc établir un résultat intermédiaire.

**Proposition 4.1.11** *Il existe un ensemble $\Delta$ de $Leb_F$-mesure pleine tel que la fonction $\varphi_0$ soit minorée par une constante strictement positive sur $\Delta$. De plus*

$$\lim_{n\to+\infty}\{\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(y)}, (x,y) \in \Delta^2, y \in C_n(x)\} = 1.$$

*Démonstration* : Soit $\psi \in L^1$ une fonction strictement positive sur $F \setminus \mathcal{O}$. Par définition, la suite $(\varphi^n\psi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1$ vers $\varphi_0\psi$. Il existe donc une sous-suite $(\varphi^{n_k}\psi)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque surement vers $\varphi_0\psi$ ; on appelle $\Delta_\psi$ cet ensemble où la convergence est presque sure, et quitte à lui retirer un sous-ensemble $Leb_F$-négligeable, on suppose que $\Delta_\psi \subset F \setminus \mathcal{O}$. Si $x$ est dans $\Delta_\psi$, et si $y$ est dans $F$, la proposition (4.1.2) montre qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que pour tout entier $n$,

$$e^{-\kappa} \leq \frac{\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(x)}{\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)(y)} \leq e^{\kappa},$$

ce qui entraine que

$$e^{-\kappa}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(x) \quad \leq \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(y) \quad \leq e^{\kappa}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(x) \tag{4.15}$$

L'encadrement (4.15) prouve alors que pour tout $k$

$$e^{-\kappa}\varphi^{n_k}(x)\int \psi(y)\,dLeb_F(y) \quad \leq \int \varphi^{n_k}(y)\psi(y)\,dLeb_F(y) \quad \leq e^{\kappa}\varphi^{n_k}(x)\int \psi(y)\,dLeb_F(y). \tag{4.16}$$

et en passant à la limite, (4.16) prouve que pour tout $x$ dans $\Delta_\psi$,

$$e^{-\kappa}\varphi_0(x) \quad \leq \frac{\int \psi(y)\,d\mu(y)}{\int \psi(y)\,dLeb_F(y)} \quad \leq e^{\kappa}\varphi_0(x).$$

Si pour $\psi$ on prend la fonction $\mathbb{1}_F$, le dernier encadrement prouve que pour tout $x$ dans $\Delta \overset{déf}{=} \Delta_{\mathbb{1}_F}$,

$$e^{-\kappa} \quad \leq \varphi_0(x) \quad \leq e^{\kappa},$$

ce qui montre la première partie de la proposition.

Fixons nous un entier $n$, et deux points de $\Delta$, $x$ et $y$, dans le même cylindre d'ordre $n$. Fixons un entier $p$, regardons $x_p$ dans $Ant_p(x)$ et $y_p$ dans $Ant_p(y)$ et dans le même cylindre d'ordre $n+p$. Les deux points $x$ et $y$ étant très proches, les points $x_p$ et $y_p$ sont encore plus proches, et les variations des jacobiens le long des orbites seront petites si on ne considère que des temps majorés par $r^p(x_p)$ : comme dans la démonstration de la proposition (4.1.2) la propriété $\alpha$-Hölder de $-\log J$ sur les feuilles instables locales montre que

$$\left|\log(J^u)^{r^p(x_p)-1}(x_p) - \log(J^u)^{r^p(x_p)-1}(y_p)\right| \quad \leq \quad \kappa\, d^\alpha(x,y). \tag{4.17}$$

Cependant, du fait de la dérive introduite par $\pi_F$, les points $f^p(x_p)$ et $x$ ne sont pas nécessairement proche. Par contraction le long des feuilles stables, si on itère $r \overset{déf}{=} [r^n(x)/2]$ fois l'application $f$, les points deviennent alors très proches. Les propriétés de continuité höldérienne des feuilletages nous permettent d'obtenir les majorations

$$\left|\log\left(\prod_{k=0}^{r}\frac{J^u(f^{p+k}(x_p))}{J^u(f^k(x))}\right) - \log\left(\prod_{k=0}^{r}\frac{J^u(f^{p+k}(y_p))}{J^u(f^k(y))}\right)\right| \leq \quad \kappa\, d^\alpha(f^r(x), f^r(y)) \\ + \kappa\, d^\alpha(f^{r+r^p(x_p)}(x_p), f^{r+r^p(x_p)}(y_p)) \tag{4.18}$$

$$\left|\log\left(\prod_{k=r}^{+\infty}\frac{J^u(f^{p+k}(x_p))}{J^u(f^k(x))}\right)\right| \leq \kappa\, d^\beta(f^r(x), f^r(x_p)), \tag{4.19}$$

$$\text{et} \quad \left|\log\left(\prod_{k=r}^{+\infty}\frac{J^u(f^{p+k}(y_p))}{J^u(f^k(y))}\right)\right| \leq \kappa\, d^\beta(f^r(y), f^r(y_p)), \tag{4.20}$$

où $\kappa$ est une constante universelle. Les distances $d(f^r(x), f^r(x_p))$, $d(f^{r+r^p(x_p)}(x_p), f^{r+r^p(x_p)}(y_p))$, $d(f^r(x), f^r(y))$, et $d(f^r(y), f^r(y_p))$ sont toutes de l'ordre de $diam(R)e^{-r(\lambda'-10\varepsilon)}$ ; de plus $r \geq n/2-1$, et donc, les majorations (4.17), (4.18), (4.19), et (4.20) montrent qu'il existe deux constantes universelles, $C$ et $\kappa$, avec $C > 0$ et $0 < \kappa < 1$, telles que

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(x)\, C\, e^{-\kappa^n} \quad \leq \mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(y) \quad \leq \mathcal{L}^p(\mathbb{1}_F)(x) C\, e^{\kappa^n} \tag{4.21}$$

pour tout entier $p$. Comme $x$ et $y$ sont dans $\Delta$, les deux suites $(\varphi^{n_k}(x))_k$ et $(\varphi^{n_k}(y))_k$ convergent vers $\varphi_0(x)$ et $\varphi_0(y)$, ce qui montre que

$$C\, e^{-\kappa^n} \leq \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(y)} \leq C\, e^{\kappa^n}.$$

Ceci finit la preuve de la proposition. ¬

## 4.2 Extensions et démonstration du théorème

### 4.2.1 Extension naturelle $(F, g_F)$

Comme dans le cas des mesures d'équilibre pour les Axiom-A nous allons "épaissir" la mesure $\mu$. Dans un premier temps, nous allons trouver une représentation géométrique de l'extension naturelle de $(F, g_F)$, et ensuite nous montrerons que les mesures désintégrées sur les fibres sont toutes équivalentes.

#### L'extension naturelle

Pour trouver une représentation géométrique de l'extension naturelle de $(F, g_F)$, nous allons utiliser des théorèmes de théorie de la mesure. Ces théorèmes sont les même que dans le cas uniformément hyperbolique, et nous renvoyons le lecteur à [18] pour les démonstrations.

**Définition 4.2.1** *On appelle bloc de $R$ tout borélien $B$ de $R$, tel que $B = \pi_F^{-1}(\pi_F(B))$. L'ensemble $\{g^n(B), B \text{ bloc}, n \in \mathbb{N}\}$ sera appelé $\mathcal{S}$.*

**Lemme 4.2.2** *L'ensemble $\mathcal{S}$ est une algèbre de Boole.*

*Démonstration* : $R$ et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{S}$. De plus, si $B$ est un bloc, on peut définir $g^{-1}(B)$, qui est encore un bloc, du fait de la propriété de Markov du rectangle. Si $g^n(B_1)$ et $g^m(B_2)$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$, et si $n \leq m$, en composant par $g^{-m}$ on se ramène au cas de deux blocs. Leur intersection et leur réunion sont bien des blocs. Cela prouve qu'une intersection finie ou une réunion finie d'images de blocs est encore une image de bloc. ¬

On définit sur l'algèbre $\mathcal{S}$ une fonction additive d'ensemble , $\widehat{\mu}$, de la manière suivante :

Si $B$ est un bloc on pose $\widehat{\mu}(B) \stackrel{déf}{=} \mu(\pi_F(B))$. Sinon, on choisit le plus petit $n$ tel que $g^{-n}(B)$ soit un bloc, et on pose $\widehat{\mu}(B) \stackrel{déf}{=} \mu(\pi_F(g^{-n}(B)))$. On remarque que si $B$ est un bloc, alors $\widehat{\mu}(g^{-1}(B)) = \widehat{\mu}(B)$ par $g_F$ invariance de $\mu$. Si $B_1$ et $B_2$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$ disjoints, quitte à composer par un certain $g^{-n}$ on peut supposer qu'ils sont deux blocs disjoints. Alors $\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) = \widehat{\mu}(B_1) + \widehat{\mu}(B_2)$, puisque $\mu$ est une mesure.

**Définition 4.2.3** *On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments $B$ de $\mathcal{S}$ tels que $\pi_F(B)$ soit un compact de $F$ qui n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre 1, chaque intersection étant elle-même compacte.*

**Lemme 4.2.4** *l'ensemble $\mathcal{C}$ est une sous-classe compacte de $\mathcal{S}$, qui a la propriété d'approximation : pour tout $B$ dans $\mathcal{S}$*

$$\widehat{\mu}(B) = \sup\{\widehat{\mu}(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\}.$$

*Démonstration* : Vérifions d'abord que $\mathcal{C}$ est un sous-classe compacte. On choisit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcap_{n\geq 0} C_n = \emptyset$. Ainsi, sur $F$, la suite $(\pi_F(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de compacts, telle que $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n) = \emptyset$. Pour tout $N$, $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n)$ est un compact comme intersection de compacts, et le théorème des fermés emboités prouve que $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n)$ ne peut être vide si pour tout $N$, $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n) \neq \emptyset$. L'hypothèse $\bigcap_{n\geq 0} \pi_F(C_n) = \emptyset$ prouve alors qu'il existe $N$ tel que $\bigcap_{n=0}^{N} \pi_F(C_n) = \emptyset$, et donc $\bigcap_{n=0}^{N} C_n = \emptyset$. $\mathcal{C}$ est bien une classe compacte.

Il faut maintenant prouver que $\mathcal{C}$ a la propriété d'approximation. Si $B$ est un bloc de $R$, par définition de $\widehat{\mu}$, $\widehat{\mu}(B) = \mu(\pi_F(B))$. La mesure $\mu$ est régulière, et donc

$$\mu(\pi_F(B)) = \sup\{\mu(C),\ C \subset \pi_F(B),\ C \text{ compact}\}. \tag{4.22}$$

La relation (4.22) prouve que

$$\widehat{\mu}(B) = \sup\{\widehat{\mu}(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\},$$

mais on peut améliorer ce résultat : si $n$ est un entier, et si $\varepsilon$ est fixé positif, par croissance de la famille de partitions en cylindres, on peut trouver $C$ compact de $F$ inclu dans $\pi_F(B)$, tel que $C$ n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre $n$, chaque intersection étant elle-même compacte, et

$$\mu(\pi_F(B) \setminus C) < \varepsilon.$$

Ceci montre que si $n$ est un entier fixé,

$$\widehat{\mu}(B) = \sup\{\widehat{\mu}(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}_n\},$$

où $\mathcal{C}_n$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $\pi_F(C)$ soit un compact de $F$ qui n'intersecte qu'avec un nombre fini de cylindres d'ordre $n$, chaque intersection étant elle-même compacte. De plus, si $C \in \mathcal{C}_n$, $g^{n-1}(C)$ est un élément de $\mathcal{C}$. Si on prend $B$ dans $\mathcal{S}$, il existe un bloc $B'$ et un entier $n$ tels que $B = g^n(B')$. Le bloc $B'$ est approximable par les éléments de $\mathcal{C}_{n+1}$, et donc $B$ est approximable par des éléments de $\mathcal{C}$. Ainsi

$$\widehat{\mu}(B) = \sup\{\widehat{\mu}(C),\ C \subset B,\ C \in \mathcal{C}\}. \quad \neg$$

**Proposition 4.2.5** *Il existe une mesure $\widehat{\mu}$ sur $R$ telle que le système $(R, g, \widehat{\mu})$ soit l'extension naturelle du système $(F, g_F, \mu)$.*

*Démonstration* : Le lemme 4.2.4 montre que $\widehat{\mu}$ vérifie la propriété de décroissance séquentielle, c'est à dire que, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{S}$, telle que $\cap_n B_n = \emptyset$, alors $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(B_n) = 0$. Le théorème de Carathéodory montre que $\widehat{\mu}$ s'étend en une mesure de probabilité sur la tribu engendrée par $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$. Il faut prouver que $\mathcal{Q}$ est la tribu des boréliens de $R$. Si $B$ est un fermé de $R$, on prend $x$ dans $B$. Pour tout entier $n$, $g^{-n}(x) \in \pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B))$ et donc $x \in g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B))\right)$. Réciproquement si pour tout $n$, $x \in g^n\left(\pi_F^{-1}(\pi_F \circ g^{-n}(B))\right)$, alors pour tout $n$ il existe un point $x_n$ de $B$ tel que $\pi_F(g^{-n}(x)) = \pi_F(g^{-n}(x_n))$. Par conséquent $g^{-n}(x_n) \in W^s(g^{-n}(x), R)$ pour tout $n$, ce qui montre que $(d(x, x_n)) < diam(R) e^{-(\lambda'-3\varepsilon)n}$. $B$ s'écrit comme étant $B' \cap R$ où $B'$ est un fermé de $\Omega$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $B'$ qui converge vers $x$, et donc $x \in B'$. De plus, pour tout entier $n$, $g^{-n}(x)$ est défini, et donc $x \in B' \cap R$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{Q}$. Ainsi $\mathcal{Q}$ est la tribu des boréliens de $R$. La mesure $\widehat{\mu}$ est borélienne, de probabilité, et $g$-invariante par construction. L'unicité de l'extension naturelle montre que $(R, g, \widehat{\mu})$ est isomorphe à l'extension naturelle de $(F, g_F, \mu)$, ce qui achève la preuve de la proposition. $\neg$

### L'équivalence des mesures désintégrées

**Définition 4.2.6** *Si $x$ est un point de $R$ on note $\eta^s(x)$ l'ensemble $[x, R]$ et ensuite $g^n\eta^s(x)$ l'élément $g^n(\eta^s(g^{-n}(x)))$.*

La partition en fibre $\eta^s$ est une partition mesurable (voir [22]) et décroissante de $R$ qui admet un unique système de mesures conditionnelles qui sera noté $\{\widehat{\mu}^s_x\}$. Par ailleurs la partition en cylindres est génératrice – au sens de le dynamique de $(F, g_F)$– et chaque fibre $\pi_F^{-1}(x)$ ne comporte qu'un nombre dénombrable (exactement le cardinal de $g_F^{-1}(x)$) d'images de fibres par $g$. La proposition 3.1.2 de la partie I ainsi que son corollaire s'appliquent, et pour presque tout $x$ de $R$ et pour tout $n$,

$$\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta(x)) = \frac{\varphi_0(\pi_F(y))}{J^n(\pi_F(y))\varphi_0(\pi_F(x))},$$

où $g^n(y) = x$. Nous allons maintenant prouver l'équivalence des mesures désintégrées.

**Proposition 4.2.7** *Les mesures conditionnelles $\{\widehat{\mu}^s_x\}$ sont presque toutes équivalentes modulo l'holonomie instable sur $R$. Si $x$ et $y$ sont tels que $\widehat{\mu}^s_x$ et $\widehat{\mu}^s_y$ sont équivalentes,* *et si $z_x$ désigne un point de $\eta^s(x)$ et $z_y$ le point obtenu par holonomie instable sur $\eta^s(y)$, alors*

$$\frac{d\widehat{\mu}^s_x(z_x)}{d\widehat{\mu}^s_y(z_y)} = \frac{\varphi_0\circ\pi_F(z_x)}{\varphi_0\circ\pi_F(z_y)}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{J^u(f^{-n}(z_y))}{J^u(f^{-n}(z_x))}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{J^u(f^n(z_y))}{J^u(f^n(\pi_F(z_y)))}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{J^u(f^n(\pi_F(z_x)))}{J^u(f^n(z_x))}$$

*Démonstration* : Comme la partition $\eta^s$ est génératrice, vue sur chaque fibre $\bigvee_{n\geq 0} g^n\eta^s$ génère la mesure conditionnelle sur cette fibre. Pour montrer l'équivalence des mesures conditionnelles, il suffit de trouver une constante universelle $\kappa$ et un ensemble $\Gamma\subset R$ de mesure pleine tels que

$$\forall (x,y)\in\Gamma^2, \forall n\in\mathbb{N} \qquad \frac{1}{\kappa}\leq\frac{\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta^s(z_x))}{\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta^s(z_y))}\leq \kappa \tag{4.23}$$

où $g^n\eta^s(z_x)$ et $g^n\eta^s(z_y)$ désignent tous les éléments de $g^n\eta^s$ qui sont respectivement dans $\eta^s(x)$ et $\eta^s(y)$ et qui se correspondent par holonomie instable.

*Étape 1*. Construction de $\Gamma$.

Nous allons donner une suite (finie) de conditions, chacune d'entre elles étant vraie $\widehat{\mu}$-presque partout. Ensuite nous définirons clairement l'ensemble $\Gamma$.

On commence par noter $\Gamma'$ l'ensemble des points $x$ tels que pour tout $x$ de $\Gamma'$ et pour tout entier $n$, $\pi_F(g^{-n}(x))\notin\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est de $\mu$-mesure nulle sur $F$, $\Gamma'$ est de mesure pleine sur $R$.

Quitte à restreindre cet ensemble, on peut supposer que pour tout $x$ dans $\Gamma'$ et pour tout entier $n$,

$$\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta(x)) = \frac{\varphi_0(\pi_F(g^{-n}(x)))}{J^n(\pi_F(g^{-n}(x)))\varphi_0(\pi_F(x))}.$$

Comme $\Gamma'$ est de mesure pleine, pour $\mu$-presque tout $x$ de $F\cap\Gamma'$, $\widehat{\mu}^s_x(\Gamma')=1$, et $\mathcal{L}^n(\varphi_0)(x)=\varphi_0(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Notons $\Gamma''$ cet ensemble sur $F$, et fixons $x$ dans $\Gamma''$ ; $\widehat{\mu}^s_x(\Gamma')=1$, et pour tout $z_x$ dans $\eta^s(x)\cap\Gamma'$ et pour tout entier $n$,

$$\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta^s(z_x)) \quad = \quad \frac{\varphi_0(\pi_F(g^{-n}(z_x)))}{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_x)))\varphi_0(x)}.$$

Pour un tel $x$, le nombre d'éléments $g^n\eta^s(z_x)$ différents est exactement le nombre de préimages $card(Ant_n(x))$, et réciproquement, chaque $y\in Ant_n(x)$ définit un et un seul $g^n\eta^s(g^n(y))$. Si pour $y\in Ant_n(x)$ on n'a pas

$$\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta^s(g^n(y))) \quad = \quad \frac{\varphi_0(y)}{J^n(y)\varphi_0(x)}, \tag{4.24}$$

alors tout $g^n\eta^s(g^n(y))$ est inclus dans $W^s(x,R)\setminus(\Gamma'\cap W^s(x,R))$ qui est un ensemble de $\widehat{\mu}^s_x$-mesure nulle. Si $I$ désigne l'ensemble des $y\in Ant_n(x)$ tels que (4.24) est vraie, on doit avoir

$$\sum_{y\in I}\widehat{\mu}^s_x(g^n\eta^s(g^n(y))) \quad = \quad 1. \tag{4.25}$$

Par ailleurs, l'hypothèse $\mathcal{L}^n(\varphi_0)(x) = \varphi_0(x)$ montre alors que

$$\sum_{y \in I} \widehat{\mu}_x^s(g^n \eta^s(g^n(y))) \quad < \quad 1, \tag{4.26}$$

si $I$ n'est pas exactement égal à $Ant_n(x)$. Les relations (4.25) et (4.26) montrent alors, que si on pose $\Gamma \overset{déf}{=} \pi_F^{-1}(\Gamma'')$, pour tout $x$ de $\Gamma$, et pour tout $z_x \in W^s(x,R)$,

$$\widehat{\mu}_x^s(g^n \eta^s(z_x)) \quad = \quad \frac{\varphi_0(\pi_F(g^{-n}(z_x)))}{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_x)))\varphi_0(x)}.$$

<u>*Étape 2*</u>. Démonstration de (4.23).
On choisit alors $x$ et $y$ dans $\Gamma$, un entier $n$, et deux points $z_x$ et $z_y$, respectivement dans $\eta^s(x) \cap \Gamma'$ et $\eta^s(y) \cap \Gamma'$ qui se correspondent par holonomie instable. On note alors $z_x^n$ et $z_y^n$ les deux préimages de $z_x$ et $z_y$ par $g^n$, et $z_{x,F}^n \overset{déf}{=} \pi_F(z_x^n)$ et $z_{y,F}^n \overset{déf}{=} \pi_F(z_y^n)$, ainsi que $z_{x,F} \overset{déf}{=} \pi_F(z_x)$ et $z_{y,F} \overset{déf}{=} \pi_F(z_y)$. Les deux points $z_{x,F}^n$ et $z_{y,F}^n$ sont alors dans un même cylindre d'ordre $n$ et la proposition 4.1.2 montre qu'il existe une constante universelle $\kappa$ telle que

$$|\log J^n(z_{x,F}^n) - \log J^n(z_{y,F}^n)| \leq \kappa.$$

Par ailleurs, la proposition 4.1.11 assure que les deux termes $\varphi_0(z_{x,F}^n)/\varphi_0(z_{y,F}^n)$ et $\varphi_0(z_{x,F})/\varphi_0(z_{y,F})$ sont uniformément bornés par une constante universelle. Ceci montre donc qu'il existe $\kappa$, constante universelle, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{\kappa} \leq \frac{\widehat{\mu}_x^s(g^n \eta^s(z_x))}{\widehat{\mu}_y^s(g^n \eta^s(z_y))} \leq \kappa.$$

On en déduit alors que les deux mesures $\widehat{\mu}_x^s$ et $\widehat{\mu}_y^s$ sont équivalentes modulo l'holonomie instable.

<u>*Étape 3*</u>. Identification du jacobien.
Avec les notations précédentes nous avons la valeur explicite du rapport :

$$\frac{\widehat{\mu}_x^s(g^n \eta^s(z_x))}{\widehat{\mu}_x^s(g^n \eta^s(z_y))} = \frac{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_y)))}{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_x)))} \frac{\varphi_0 \circ \pi_F(z_x)}{\varphi_0 \circ \pi_F(z_y)} \frac{\varphi_0 \circ \pi_F(g^{-n}(z_y))}{\varphi_0 \circ \pi_F(g^{-n}(z_x))}.$$

La proposition 4.1.11 montre en fait que le terme $\varphi_0 \circ \pi_F(g^{-n}(z_y))/\varphi_0 \circ \pi_F(g^{-n}(z_x))$ converge vers 1 quand $n$ tend vers l'infini. Par ailleurs nous avons

$$\frac{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_y)))}{J^n(\pi_F(g^{-n}(z_x)))} = \frac{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(z_y)))}{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(z_x)))} \frac{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n}(z_y)))}{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n}(z_x)))},$$

où $n/2$ désigne en fait la partie entière de $n/2$ (à un près en fonction de la parité de $n$).

La contraction le long du feuilletage stable par itération positive de $f$, la contraction le long du feuilletage instable par itération négative de $f$, et la proposition 4.1.2 montrent qu'il existe une constante universelle $C$ telle que

$$\exp\left(-C\, d^\beta(z_y,y)e^{-\frac{n\beta}{2}(\lambda'-2\varepsilon)}\right) \le \frac{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(z_y)))}{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(y)))} \le \exp\left(C\, d^\beta(z_y,y)e^{-\frac{n\beta}{2}(\lambda'-2\varepsilon)}\right)$$

$$\exp\left(-C\, d^\beta(z_x,x)e^{-\frac{n\beta}{2}(\lambda'-2\varepsilon)}\right) \le \frac{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(z_x)))}{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(x)))} \le \exp\left(C\, d^\beta(z_x,x)e^{-\frac{n\beta}{2}(\lambda'-2\varepsilon)}\right)$$

$$\exp\left(-C\, d^{2\alpha}(y,x)e^{-\frac{n\alpha}{2}\lambda}\right) \le \frac{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(x)))}{J^{n/2}(\pi_F(g^{-n/2}(y)))} \le \exp\left(C\, d^{2\alpha}(y,x)e^{-\frac{n\alpha}{2}\lambda}\right).$$

Ceci prouve que le terme $J^n(\pi_F(g^{-n}(y)))/J^n(\pi_F(g^{-n}(x)))$ converge vers

$$\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{J^u(f^{-n}(z_y))}{J^u(f^{-n}(z_x))}\right)\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{J^u(f^n(z_y))}{J^u(f^n(\pi_F(z_y)))}\right)\left(\prod_{n=0}^{+\infty}\frac{J^u(f^n(\pi_F(z_x)))}{J^u(f^n(z_x))}\right),$$

et la proposition est ainsi démontrée. $\neg$

### 4.2.2 Extension inductive et preuve du théorème

#### Définition d'un bon système

Nous allons définir un système $(\Omega,f)$ qui induit le système $(R,g)$. On note

$$\Omega=\bigcup_{n=0}^{+\infty}f^n(R).$$

Si $x$ est un point de $\Omega$, il existe un entier $n$ tel que $f^n(x)\in R$. Par définition de $R$, $f^n(x)$ revient une infinité de fois dans $R$ par itération de $f$ et par itération de $f^{-1}$. On pose alors,

$$n_-(x)=\inf\{n\in\mathbb{N},\ f^{-n}(x)\in R,\ r(x)>n\}.$$

Si $n_+(x)$ vaut $r(f^{-n}(x))-n$, $n_+(x)$ est le plus petit entier tel que $f^{n_+(x)}(x)\in R$.

**Lemme 4.2.8** *L'ensemble $\Omega$ est $f$-invariant, et $f$ définit une bijection bimesurable de $\Omega$.*

*Démonstration* : On a bien $f(\Omega)\subset\Omega$. De plus, $f_{|\Omega}$ est injective et mesurable, car $f$ est difféomorphisme. Si $x$ est dans $R$, il existe $y$ dans $R$ tel que $g(y)=x$. Donc $r(y)>1$, et $f^{-1}(x)$ est dans $f^{r(y)-1}(R)$. $f^{-1}$ est bien définie sur $\Omega$, et y est mesurable comme restriction à un borélien d'une fonction continue. $\neg$

**Proposition 4.2.9** *Il existe une mesure borélienne, $\sigma$-finie, $f$-invariante, $\nu$, telle que le système $(\Omega,f,\nu)$ induit le système $(R,g,\widehat{\mu})$.*

*Démonstration* Si $B$ est un borélien de $M$ on définit $B_n$ par la relation :

$$x \in B_n \Longleftrightarrow n \text{ est le plus petit entier positif tel que} f^{-n}(x) \in R \text{ et } r(f^{-n}(x)) > n.$$

Cette définition montre que si $n$ et $m$ sont deux entiers disjoints, alors $B_n \cap B_m = \emptyset$.

Pour étendre la mesure $\widehat{\mu}$ de $R$ à toute la variété $M$, nous allons la définir comme fonction ensembliste sur les boréliens. On pose

$$\nu(B) \stackrel{déf}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\mu}(f^{-n}(B_n)). \tag{4.27}$$

Y.N. Dowker montre dans [8] que la relation (4.27) définit une mesure borélienne $\sigma$-finie et $f$-invariante. $\neg$

**Lemme 4.2.10** *La mesure $\nu$ ainsi construite est ergodique.*

*Démonstration* : On choisit un borélien $B$ $f$-invariant, que l'on écrit $B = \sqcup B_n$. Par $f$-invariance, $f^{-k}(B) \cap R \subset B_0$ pour tout entier $k$, ce qui entraine que $g^{-1}(B_0) \subset B_0$. Par ergodicité de $\widehat{\mu}$, on doit avoir $B_0 \in \{\emptyset, R\}$. Supposons que $\widehat{\mu}(B_0) = 0$. On pose $D \stackrel{déf}{=} f^{-1}(B_0)$, et on écrit aussi $D = \sqcup D_n$. Par $f$-invariance on doit avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = f^{-1}(B_{n+1}) \cup D_n,$$

ce qui prouve que pour tout $n$, $B_n = \emptyset$ (au sens de la mesure). Ainsi $B = \emptyset$.
Si on suppose maintenant que $\widehat{\mu}(B_0) = 1$, et prenons un borélien $C$ tel que $C \cap B = \emptyset$. Par $f$-invariance de $B$ et pour tout $n$ , $f^{-n}(C)$ ne peut intersecter $B$, sinon on aurait $f^{-n}(C \cap B) \neq \emptyset$. On écrit alors $C = \sqcup C_n$, et pour tout $n$, $\widehat{\mu}(f^{-n}(C)) = 0$, puisque $\widehat{\mu}(B_0) = 1$. $C$ est réunion dénombrable de boréliens négligeables, il est donc de mesure nulle. $\neg$

### désintégration de $\nu$

Nous allons définir deux partitions mesurables de $\Omega$.

**Définition 4.2.11** *Si $x$ est un point de $\Omega$, on note*

$$\eta^s(x) \stackrel{déf}{=} f^{n_-}(\eta^s(f^{-n_-}(x))),$$
$$\eta^u(x) \stackrel{déf}{=} f^{-n_+}(W^u(f^{n_+}(x), R)).$$

On remarquera que ce sont deux partitions (propriétés markoviennes des rectangles) mesurables (voir [22]) respectivement décroissantes et croissantes. Elles-ne sont pas subordonnées aux feuilletages stable et instable au sens de [15], mais chaque élément des partitions est inclu dans le feuilletage associé. Il faut étudier l'existence et l'unicité des systèmes de mesures conditionnelles à ces deux partitions, car leur existence n'a été établie que dans le cas de la mesure finie.

**Proposition 4.2.12** *Il existe deux uniques systèmes de mesures $\{\nu_x^s\}_{x\in\mathcal{M}}$, et $\{\nu_x^u\}_{x\in\mathcal{M}}$ tels que pour $\nu$-presque tout $x$ supp$(\nu_x^s) \subset \eta^s(x)$ (resp. supp$(\nu_x^u) \subset \eta^u(x)$), $\nu_x^s$ et $\nu_x^u$ soient de probabilité, et tout borélien $A$ de mesure $\nu$ finie est $\eta^s$- et $\eta^u$-mesurable et vérifie*

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int \nu_x^s(A)\, d\nu(x),\\ \nu(A) &= \int \nu_x^u(A)\, d\nu(x).\end{aligned}$$

*Démonstration* : L'existence et l'unicité de deux tels systèmes est acquise si on se restreint à $R$, ce sont les mesures $\widehat{\mu}^s$ et $\widehat{\mu}^u$. Par symétrie il suffit de prouver la proposition pour le système $\{\nu_x^s\}_{x\in\mathcal{M}}$. Fixons $A$ borélien de mesure finie. On note $A = \sqcup A_n$. Si un tel système existe on doit avoir

$$\begin{aligned}\nu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{\mu}(f^{-n}(A_n))\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \widehat{\mu}_x^s(f^{-n}(A_n))\, d\mu(x) \qquad (4.28)\\ \text{par ailleurs } \nu(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \nu_x^s(A_n)\, d\nu(x)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \nu_{f^n(x)}^s(A_n)\, d\mu(x). \qquad (4.29)\end{aligned}$$

Les relations (4.28) et (4.29) sont vraies pour tout borélien de mesure fini, et donc on doit nécessairement avoir

$$\nu_y^s = f^{n*}\widehat{\mu}_{f^{-n}(y)}^s,$$

pour tout $y$ tel que $n_-(y) = n$. Cela prouve l'existence et l'unicité du système de mesures $\{\nu_x^s\}_{x\in\mathcal{M}}$. En échangeant $f$ et $f^{-1}$ on montre l'existence et l'unicité du système de mesures $\{\nu_x^u\}_{x\in\mathcal{M}}$. $\neg$

### Démonstration du théorème

Sur $\Omega$ les mesures conditionnelles $\nu_x^u$ s'obtiennent en poussant les mesures $\widehat{\mu}_x^u$ sur $R$. Il suffit donc de vérifier l'équivalence sur $R$.

Dans $R$ les mesures $\widehat{\mu}_x^s$ sont $\widehat{\mu}$-presque partout équivalentes modulo les holonomies instables. Ceci prouve que la mesure $\widehat{\mu}$ est équivalente à la mesure produit

$$\widehat{\mu}_{x_0}^s \otimes \mu$$

où $x_0$ est un point de $\Gamma$ dans $R$. Ainsi les mesures $\widehat{\mu}_x^u$ sont presque partout équivalentes modulo les holonomies stables, et donc équivalentes à $\mu$, qui est elle même équivalente à $Leb^u_F$. La partition $\eta^u$ est donc une partition mesurable Lebesgue-subordonnée au feuilletage instable, et $\nu^u_x$ est absolument continue par rapport à $Leb^u_{W^u_{loc}(x)}$. De plus $\nu$ a par construction une structure locale produit. $\neg$

# Bibliographie


[1] M. Babillot and F. Ledrappier. Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers. Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique.

[2] L. Barreira, Y. Pesin, and J. Schmeling. Dimension of hyperbolic measures – A proof of the Eckmann-Ruelle conjecture. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 1996.

[3] R. Bowen. Some Systems with Unique Equilibrium States. *Mathematical Systems Theory*, 8(3) :193–202, 1974.

[4] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture notes in Math.* Springer-Verlag, 1975.

[5] R. Bowen and B. Marcus. Unique Ergodicity for Horocycle Foliations. *Israel Journal of Mathematics*, 26(1) :43–67, 1977.

[6] A. Broise, F. Dal'bo, and M. Peigné. Méthode de opérateurs de transferts : Transformations dilatantes de l'intervalle et dénombrement de géodésiques fermées.

[7] P. Collet, A. Galves, and A. Lopes. Maximum Likelihood and Minimum Identification of Grammars. *Random Comput. Dyn.*, 3(4) :241–250, 1995.

[8] Yael Naim Dowker. Finite and $\sigma$-finite invariant measures. *Annals of Mathematics*, 54(3) :595–608, 1951.

[9] Nicolai T.A. Haydn. Canonical product structure of equilibrium states. *Random and computational dynamics*, 2(1) :79–96, 1994.

[10] N.T.A. Haydn and D. Ruelle. Equivalence of Gibbs and Equilibrium States for Homeomorphisms Satisfying Expansiveness and Specification. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(1) :177–201, 1992.

[11] M. Herman. Construction de difféomorphismes ergodiques. notes non publiées.

[12] M.W. Hirsch and C.C. Pugh. Stable manifolds and hyperbolic sets. *Société Mathématique de France*, 1990.

[13] C.T. Ionescu Tulcea and G. Marinescu. Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. *Annals of Mathematics*, 52(1) :140–147, July 1950.

[14] Y. Katznelson. Smooth mappings of the circle without sigma-finite invariant measures. *Symp. Math*, 22, 1977.

[15] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms Part I : Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Annals of Mathematics*, 122 :509–539, 1985.

[16] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms Part II : Relations between entropy,exponents and dimension. *Annals of Mathematics*, 122 :540–574, 1985.

[17] Ricardo Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.

[18] Jacques Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson & Cie, 1964.

[19] V.I. Oseledec. Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov Characteristics numbers for dynamical systemes. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19 :197–221, 1968.

[20] Ya. B. Pesin. Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. *Russian math. Surveys*, 32(4) :55–114, 1977.

[21] C. Pugh and M. Shub. Ergodic Attractors. *American Mathematical Society*, 32(1), 1989.

[22] V.A. Rohlin. On the fundamental ideas of measure theory. *A.M.S.Translation*, 10 :1–52, 1962.

[23] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third edition. Mc Graw-Hill Book Company, 1987.

[24] D. Ruelle. Thermodynamic formalism for maps satisfying positive expansiveness and specification. *nonlinearity*, 5 :1223–1236, 1992.

[25] Lai-Sang Young. Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems. In *Proceedings of the NATO ASI*, 1995.