Formalisme thermodynamique pour des systèmes dynamiques hyperboliques.
Mesures de Gibbs et mesures optimisantes.

Renaud Leplaideur

Brest, le 31 octobre 2008

Plan de l'exposé :

I Rappels et Définitions

II Méthode de construction des mesures de Gibbs

III Applications au cas uniformément hyperbolique

IV Applications au cas non-uniformément hyperbolique

Plan de l'exposé :

Plan de l'exposé :

I Rappels et Définitions

II Méthode de construction des mesures de Gibbs

III Applications au cas uniformément hyperbolique

IV Applications au cas non-uniformément hyperbolique

Plan de l'exposé :

I Rappels et Définitions

II Méthode de construction des mesures de Gibbs

III Applications au cas uniformément hyperbolique

IV Applications au cas non-uniformément hyperbolique

Plan de l'exposé :

I. Rappels et définitions

Dans cet exposé, nous appellerons système dynamique la donnée d'un ensemble compact métrique X et d'une application continue f de X dans X. L'orbite d'un point x est l'ensemble des itérées $f^n(x)$, avec n dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$ lorsque f est inversible.

Définition

Soit (X, f) un système dynamique. Une mesure de probabilité μ est f-invariante (ou invariante par f) si pour tout borélien B, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$.
Une mesure de probabilité μ f-invariante est dite ergodique si les boréliens invariants ($B = f^{-1}(B)$) sont de mesure nulle ou pleine.

L'ensemble des mesures de probabilités f-invariantes sur X est noté $\mathcal{X}_1(f)$. C'est compact et convexe pour la topologie faible* ; les mesures extrémales sont les mesures ergodiques.

Dans cet exposé, nous appellerons système dynamique la donnée d'un ensemble compact métrique X et d'une application continue f de X dans X. L'orbite d'un point x est l'ensemble des itérées $f^n(x)$, avec n dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$ lorsque f est inversible.

Définition

Soit (X, f) un système dynamique. Une mesure de probabilité μ est f-invariante (ou invariante par f) si pour tout borélien B, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$.
Une mesure de probabilité μ f-invariante est dite ergodique si les boréliens invariants ($B = f^{-1}(B)$) sont de mesure nulle ou pleine.

L'ensemble des mesures de probabilités f-invariantes sur X est noté $\mathcal{X}_1(f)$. C'est compact et convexe pour la topologie faible*; les mesures extrémales sont les mesures ergodiques.

Dans cet exposé, nous appellerons système dynamique la donnée d'un ensemble compact métrique X et d'une application continue f de X dans X. L'orbite d'un point x est l'ensemble des itérées $f^n(x)$, avec n dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$ lorsque f est inversible.

Définition

Soit (X, f) un système dynamique. Une mesure de probabilité μ est f-invariante (ou invariante par f) si pour tout borélien B,
$\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$.
Une mesure de probabilité μ f-invariante est dite ergodique si les boréliens invariants ($B = f^{-1}(B)$) sont de mesure nulle ou pleine.

L'ensemble des mesures de probabilités f-invariantes sur X est noté $\mathcal{X}_1(f)$. C'est compact et convexe pour la topologie faible* ; les mesures extrémales sont les mesures ergodiques.

Théorème (Birkhoff voir [Bir31])

Soit (X, f) un système dynamique. Si μ est une probabilité f-invariante et ergodique, alors pour toute fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, et pour μ-presque tout point x,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi\circ f^k(x) = \int \phi \, d\mu. \quad (1)$$

Dorénavant $S_n(\phi)(x)$ désignera la somme de Birkhoff, $\phi(x) + \ldots + \phi\circ f^{n-1}(x)$.

Si μ est une mesure ergodique, l'ensemble *des points génériques* pour la mesure μ est défini par

$$G_\mu := \{x \in X,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0(X),\ \frac{1}{n} : \lim_{n\to+\infty} S_n(\phi)(x) = \int \phi \, d\mu\}.$$

Il vérifie $\mu(G_\mu) = 1$.

Théorème (Birkhoff voir [Bir31])

Soit (X, f) un système dynamique. Si μ est une probabilité f-invariante et ergodique, alors pour toute fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, et pour μ-presque tout point x,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi\circ f^k(x) = \int \phi\, d\mu. \qquad (1)$$

Dorénavant $S_n(\phi)(x)$ désignera la somme de Birkhoff, $\phi(x) + \ldots + \phi\circ f^{n-1}(x)$.

Si μ est une mesure ergodique, l'ensemble *des points génériques* pour la mesure μ est défini par

$$G_\mu := \{x \in X,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0(X),\ \frac{1}{n} : \lim_{n\to+\infty} S_n(\phi)(x) = \int \phi\, d\mu\}.$$

Il vérifie $\mu(G_\mu) = 1$.

Théorème (Birkhoff voir [Bir31])

Soit (X, f) un système dynamique. Si μ est une probabilité f-invariante et ergodique, alors pour toute fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, et pour μ-presque tout point x,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k(x) = \int \phi \, d\mu. \tag{1}$$

Dorénavant $S_n(\phi)(x)$ désignera la somme de Birkhoff, $\phi(x) + \ldots + \phi \circ f^{n-1}(x)$.
Si μ est une mesure ergodique, l'ensemble *des points génériques* pour la mesure μ est défini par

$$G_\mu := \{x \in X,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^0(X),\ \frac{1}{n} : \lim_{n\to+\infty} S_n(\phi)(x) = \int \phi \, d\mu\}.$$

Il vérifie $\mu(G_\mu) = 1$.

Si (X, f) est un système dynamique, un point x est dit *errant* s'il existe un voisinage $U \ni x$ tel que pour tout entier $n > 0$, on ait $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Un point qui n'est pas errant est dit *non-errant*.

L'ensemble des points non-errants contient les points périodiques et le support de toute mesure de probabilité f-invariante.

Si (X, f) est un système dynamique, un point x est dit *errant* s'il existe un voisinage $U \ni x$ tel que pour tout entier $n > 0$, on ait $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Un point qui n'est pas errant est dit *non-errant*.

L'ensemble des points non-errants contient les points périodiques et le support de toute mesure de probabilité f-invariante.

Soit A une matrice à p lignes et p colonnes dont les coefficients sont soit 0 soit 1.

Definition

Le sous-shift de type fini unilatère (resp. bilatère) sur un alphabet fini $\{0, \ldots, p-1\}$ associé à la matrice A est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) telles que pour tout n,

$$a_{x_n x_{n+1}} = 1.$$

La dynamique sur un sous-shift de type fini est celle du décalage σ : si $\underline{z} = (z_n)$, $\sigma(\underline{z})$ est la suite (z'_n) telle que pour tout n (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ selon si le sous-shift est unilère ou bilatère)

$$z'_n = z_{n+1}.$$

Soit A une matrice à p lignes et p colonnes dont les coefficients sont soit 0 soit 1.

Definition

Le sous-shift de type fini unilatère (resp. bilatère) sur un alphabet fini $\{0, \ldots, p-1\}$ associé à la matrice A est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) telles que pour tout n,

$$a_{x_n x_{n+1}} = 1.$$

La dynamique sur un sous-shift de type fini est celle du décalage σ : si $\underline{z} = (z_n)$, $\sigma(\underline{z})$ est la suite (z'_n) telle que pour tout n (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ selon si le sous-shift est unilère ou bilatère)

$$z'_n = z_{n+1}.$$

Soit A une matrice à p lignes et p colonnes dont les coefficients sont soit 0 soit 1.

Definition

Le sous-shift de type fini unilatère (resp. bilatère) sur un alphabet fini $\{0, \ldots, p-1\}$ associé à la matrice A est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) telles que pour tout n,

$$a_{x_n x_{n+1}} = 1.$$

La dynamique sur un sous-shift de type fini est celle du décalage σ : si $\underline{z} = (z_n)$, $\sigma(\underline{z})$ est la suite (z'_n) telle que pour tout n (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ selon si le sous-shift est unilère ou bilatère)

$$z'_n = z_{n+1}.$$

Soient M une variété riemannienne, compacte, lisse et de dimension finie et $f : M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme.

Définition

On dit que f est un Axiom-A s'il vérifie les hypothèses suivantes :

(1) *l'ensemble Ω des points non-errants est l'adhérence des points périodiques de f.*

(2) *Ω est hyperbolique, c'est à dire que pour tout x de Ω, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xM telle que :*

  (i) $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;

  (ii) $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ *et* $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$;

  (iii) *il existe un réel λ dans $]0, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :*

$$\|Df_x^n(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^s(x),$$
$$\|Df_x^{-n}(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^u(x) ;$$

  (iv) *les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont continues ;*

(3) *f restreinte à Ω est mélangeante.*

Soient M une variété riemannienne, compacte, lisse et de dimension finie et $f : M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme.

Définition

On dit que f est un Axiom-A s'il vérifie les hypothèses suivantes :

(1) *l'ensemble Ω des points non-errants est l'adhérence des points périodiques de f.*

(2) *Ω est hyperbolique, c'est à dire que pour tout x de Ω, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xM telle que :*

  (i) *$T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;*

  (ii) *$Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ et $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$;*

  (iii) *il existe un réel λ dans $]0, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :*

$$\|Df_x^n(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^s(x),$$
$$\|Df_x^{-n}(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^u(x) ;$$

  (iv) *les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont continues ;*

(3) *f restreinte à Ω est mélangeante.*

Soient M une variété riemannienne, compacte, lisse et de dimension finie et $f \ : \ M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme.

Définition

On dit que f est un Axiom-A s'il vérifie les hypothèses suivantes :

(1) *l'ensemble Ω des points non-errants est l'adhérence des points périodiques de f.*

(2) *Ω est hyperbolique, c'est à dire que pour tout x de Ω, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xM telle que :*

- (i) $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;
- (ii) $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ *et* $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$;
- (iii) *il existe un réel λ dans $]0, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :*

$$\|Df_x^n(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^s(x),$$
$$\|Df_x^{-n}(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^u(x) ;$$

- (iv) *les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont continues ;*

(3) *f restreinte à Ω est mélangeante.*

Soient M une variété riemannienne, compacte, lisse et de dimension finie et $f : M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme.

Définition

On dit que f est un Axiom-A s'il vérifie les hypothèses suivantes :

(1) *l'ensemble Ω des points non-errants est l'adhérence des points périodiques de f.*

(2) *Ω est hyperbolique, c'est à dire que pour tout x de Ω, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xM telle que :*

- (i) $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;
- (ii) $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ *et* $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$;
- (iii) *il existe un réel λ dans $]0, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :*

$$\|Df_x^n(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^s(x),$$
$$\|Df_x^{-n}(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\| \text{ pour tout } v \in E^u(x) ;$$

- (iv) *les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont continues ;*

(3) *f restreinte à Ω est mélangeante.*

Théorème (Bowen [Bow75])

Soit (M, f) *un Axiom-A. Soit* Λ *l'ensemble des points non-errant. Il existe un sous-shift de type fini mélangeant,* (Σ, s) *et une surjection höldérienne* $\Theta : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ *tels que*

$$\Theta \circ \sigma = f \circ \Theta.$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\} ;$$

$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

$$T_xW^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_xW^s(x) = E^s(x).$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\} ;$$

$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

$$T_x W^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_x W^s(x) = E^s(x).$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$

$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\} ;$$

$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

$$T_x W^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_x W^s(x) = E^s(x).$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} \,;$$

$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} \,;$$

$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\} \,;$$

$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

$$T_x W^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_x W^s(x) = E^s(x).$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$
$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\} ;$$
$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \le \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\} ;$$
$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \le \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

$$T_xW^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_xW^s(x) = E^s(x).$$

Pour un système (uniformément) hyperbolique, on définit les feuilles stables et instables, globales et locales, associées à un point x de la manière suivante :

$$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\}\,;$$
$$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\}\,;$$
$$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}\,;$$
$$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dans le cas d'un Axiom-A, $W^u(x)$ et $W^s(x)$ sont des variétés immergées. Pour chaque x dans Ω, on a

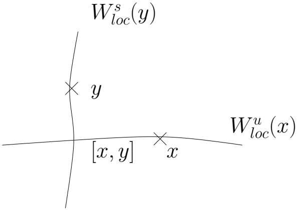
$$T_xW^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_xW^s(x) = E^s(x).$$

Les feuilles stables et instables locales constituent un *système de coordonnées canoniques locales* :

pour ε suffisament petit il existe $\rho > 0$ tel que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste en un singleton dès que l'on a $d(x, y) \leq \rho$. On note ce point $[y, x]$. Il est non-errant

Les feuilles stables et instables locales constituent un *système de coordonnées canoniques locales* :
pour ε suffisament petit il existe $\rho > 0$ tel que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste en un singleton dès que l'on a $d(x, y) \leq \rho$. On note ce point $[y, x]$. Il est non-errant

Les feuilles stables et instables locales constituent un *système de coordonnées canoniques locales* :
pour ε suffisament petit il existe $\rho > 0$ tel que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste en un singleton dès que l'on a $d(x, y) \leq \rho$. On note ce point $[y, x]$. Il est non-errant

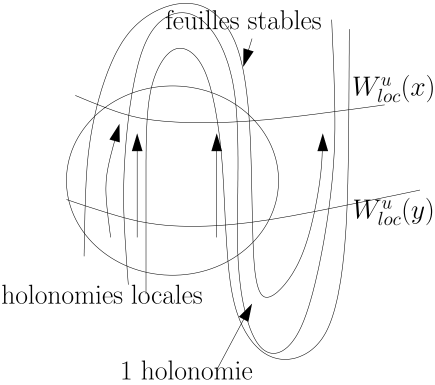


Les *holonomies stables* sont des projections qui vont d'une feuille instable locale vers une autre feuille instable locale.

Il n'y a cependant pas un moyen canonique de passer d'une feuille à une autre : pour tout point z de $W^u_{loc}(y)$, la feuille stable globale $W^s(z)$ intersecte la feuille instable locale $W^u_{loc}(x)$ une infinité de fois. Chaque intersection peut être l'image de z par une holonomie.

Les *holonomies stables* sont des projections qui vont d'une feuille instable locale vers une autre feuille instable locale.
Il n'y a cependant pas un moyen canonique de passer d'une feuille à une autre : pour tout point z de $W^u_{loc}(y)$, la feuille stable globale $W^s(z)$ intersecte la feuille instable locale $W^u_{loc}(x)$ une infinité de fois. Chaque intersection peut être l'image de z par une holonomie.

Les *holonomies stables* sont des projections qui vont d'une feuille instable locale vers une autre feuille instable locale.
Il n'y a cependant pas un moyen canonique de passer d'une feuille à une autre : pour tout point z de $W^u_{loc}(y)$, la feuille stable globale $W^s(z)$ intersecte la feuille instable locale $W^u_{loc}(x)$ une infinité de fois. Chaque intersection peut être l'image de z par une holonomie.



Définition (mesure d'équilibre)

Soit ϕ *une fonction continue de* M *dans* $\mathbb{R}$. *La quantité* $\mathcal{P}(\phi) := \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$ *s'appelle la pression du système associée à* ϕ. *La mesure* μ *est une mesure d'équilibre associée à* ϕ *si on a* $h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$.

Définition (mesure de Gibbs)

Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$. *Une mesure* μ *est dite mesure de Gibbs pour le potentiel* ϕ *s'il existe deux constantes* $P(\phi)$ *et* $C_{\phi,\varepsilon}$ *telles que, pour tout* x *on ait*

$$e^{-C_{\phi,\varepsilon}} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x) - nP(\phi)}} \leq e^{C_{\phi,\varepsilon}}. \tag{2}$$

Définition (mesure d'équilibre)

Soit ϕ *une fonction continue de* M *dans* $\mathbb{R}$*. La quantité* $\mathcal{P}(\phi) := \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$ *s'appelle la pression du système associée à* ϕ*. La mesure* μ *est une mesure d'équilibre associée à* ϕ *si on a* $h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$.

Définition (mesure de Gibbs)

Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$*. Une mesure* μ *est dite mesure de Gibbs pour le potentiel* ϕ *s'il existe deux constantes* $P(\phi)$ *et* $C_{\phi,\varepsilon}$ *telles que, pour tout* x *on ait*

$$e^{-C_{\phi,\varepsilon}} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x) - nP(\phi)}} \leq e^{C_{\phi,\varepsilon}}. \tag{2}$$

Définition (mesure d'équilibre)

Soit ϕ une fonction continue de M dans $\mathbb{R}$. La quantité $\mathcal{P}(\phi) := \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$ *s'appelle la pression du système associée à ϕ. La mesure μ est une mesure d'équilibre associée à ϕ si on a* $h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$.

Définition (mesure de Gibbs)

Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$. Une mesure μ est dite mesure de Gibbs pour le potentiel ϕ s'il existe deux constantes $P(\phi)$ et $C_{\phi,\varepsilon}$ telles que, pour tout x on ait

$$e^{-C_{\phi,\varepsilon}} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x) - nP(\phi)}} \leq e^{C_{\phi,\varepsilon}}. \tag{2}$$

Définition (mesure d'équilibre)

Soit ϕ *une fonction continue de* M *dans* $\mathbb{R}$. *La quantité* $\mathcal{P}(\phi) := \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$ *s'appelle la pression du système associée à* ϕ. *La mesure* μ *est une mesure d'équilibre associée à* ϕ *si on a* $h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \right\}$.

Définition (mesure de Gibbs)

Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$. *Une mesure* μ *est dite mesure de Gibbs pour le potentiel* ϕ *s'il existe deux constantes* $P(\phi)$ *et* $C_{\phi,\varepsilon}$ *telles que, pour tout* x *on ait*

$$e^{-C_{\phi,\varepsilon}} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x)-nP(\phi)}} \leq e^{C_{\phi,\varepsilon}}. \tag{2}$$

Théorème (voir [Bow75])

Soit (M, f) un Axiom-A. Soit ϕ un potentiel höldérien. Il existe une unique mesure d'équilibre pour (M, f) associée à ϕ. Cette mesure est également l'unique mesure de Gibbs μ_ϕ associée à ϕ, et le réel $P(\phi)$ est la pression $\mathcal{P}(\phi)$.

Il faut bien séparer les notions de mesure d'équilibre et de mesure de Gibbs, même si dans le cas uniformément hyperbolique elles coïncident. En effet, ceci n'est pas nécessairement le cas pour d'autres systèmes.

Théorème (voir [Bow75])

Soit (M, f) un Axiom-A. Soit ϕ un potentiel höldérien. Il existe une unique mesure d'équilibre pour (M, f) associée à ϕ. Cette mesure est également l'unique mesure de Gibbs μ_ϕ associée à ϕ, et le réel $P(\phi)$ est la pression $\mathcal{P}(\phi)$.

Il faut bien séparer les notions de mesure d'équilibre et de mesure de Gibbs, même si dans le cas uniformément hyperbolique elles coïncident. En effet, ceci n'est pas nécessairement le cas pour d'autres systèmes.

Théorème (voir [Bow75])

Soit (M, f) un Axiom-A. Soit ϕ un potentiel höldérien. Il existe une unique mesure d'équilibre pour (M, f) associée à ϕ. Cette mesure est également l'unique mesure de Gibbs μ_ϕ associée à ϕ, et le réel $P(\phi)$ est la pression $\mathcal{P}(\phi)$.

Il faut bien séparer les notions de mesure d'équilibre et de mesure de Gibbs, même si dans le cas uniformément hyperbolique elles coïncident. En effet, ceci n'est pas nécessairement le cas pour d'autres systèmes.

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

Quelques motivations pour construire les/des mesures de Gibbs/ mesures d'équilibre :

1. Réduire l'étude à un sous-ensemble $\mathcal{M}_1(f)$.
2. Des mesures particulièrement porteuses d'informations dans les cas $\phi \equiv 0$ et $\phi \equiv -\log J^u$ (et si la pression est nulle).
3. Mesures maximisantes.
4. Dimension de Hausdorff instable.
5. Rigidité instable-stable ; unique ergodicité du flot horocyclique.
6. Grandes déviations

II. Méthode de construction des mesures de Gibbs

On considère un système uniformément hyperbolique, (Λ, f)

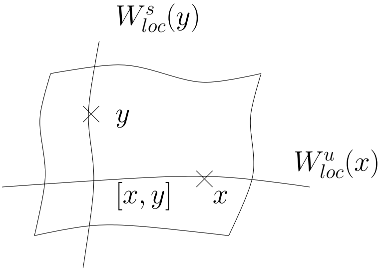
Définition

Un ensemble fermé R est dit rectangle si pour tout x et pour tout y dans R, $W^u_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y)$ est un singleton noté $[x, y]$ qui est encore dans R.

On considère un système uniformément hyperbolique, (Λ, f)

Définition

Un ensemble fermé R est dit rectangle si pour tout x et pour tout y dans R, $W^u_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y)$ est un singleton noté $[x, y]$ qui est encore dans R.



Définition

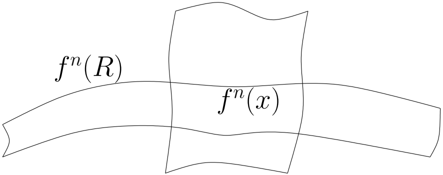
Un rectangle R est dit markovien si pour tout x dans $R \cap f^{-n}(R)$ avec $n > 0$ on a

$$W^u_{loc}(f^n(x)) \cap R \subset f^n(W^u(x) \cap R), \text{ et } f^n(W^s(x) \cap R) \subset W^s_{loc}(f^n(x)) \cap R.$$

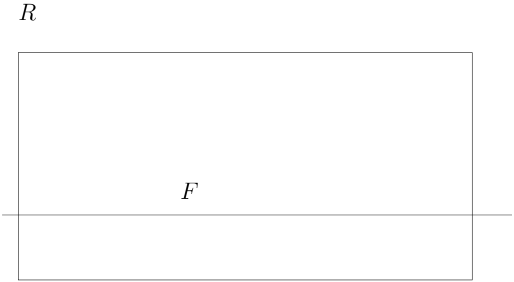
Définition

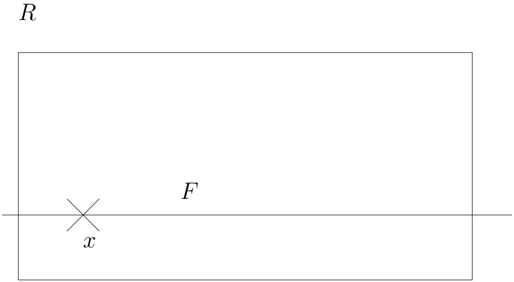
Un rectangle R est dit markovien si pour tout x dans $R \cap f^{-n}(R)$ avec $n > 0$ on a

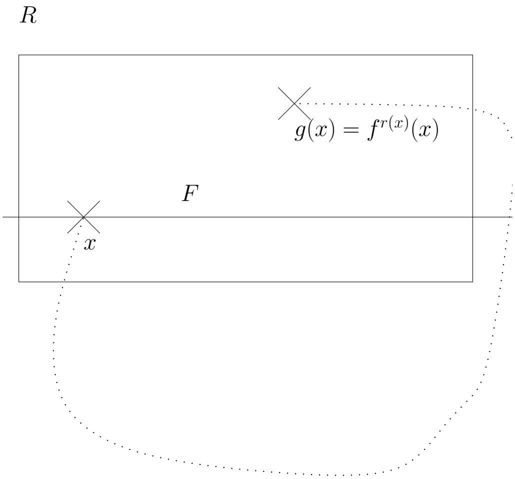
$$W^u_{loc}(f^n(x)) \cap R \subset f^n(W^u(x) \cap R), \text{ et } f^n(W^s(x) \cap R) \subset W^s_{loc}(f^n(x)) \cap R.$$

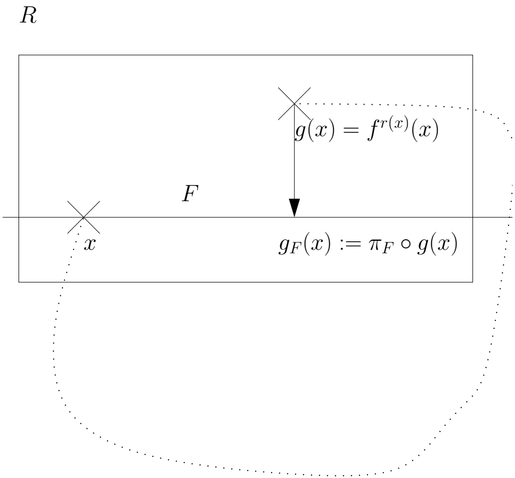


R


R
F


R
F
x


R
$g(x) = f^{r(x)}(x)$
F
x


R
$g(x) = f^{r(x)}(x)$
F
x
$g_F(x) := \pi_F \circ g(x)$

L'application g_F est une application dilatante de F dans F. Elle n'est pas définie partout mais les 2 points importants sont

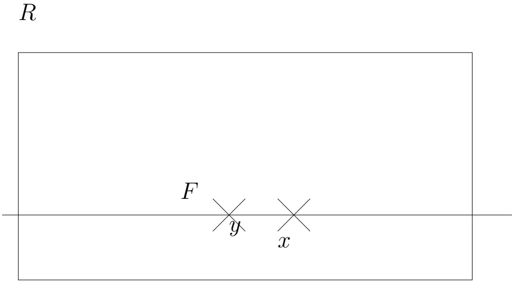
1. les branches inverses sont parfaitement définies sur F,
2. tous les points ont *la même infinité* de préimages.

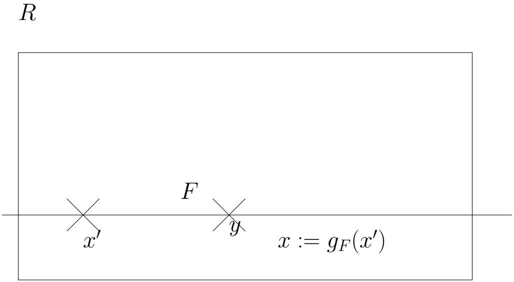
L'application g_F est une application dilatante de F dans F. Elle n'est pas définie partout mais les 2 points importants sont

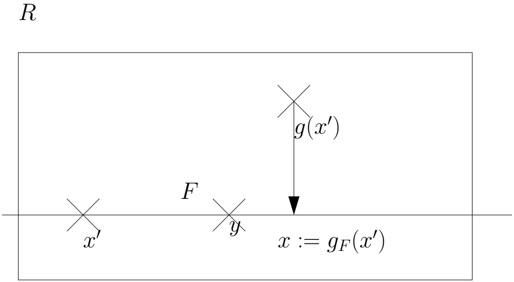
1. les branches inverses sont parfaitement définies sur F,
2. tous les points ont *la même infinité* de préimages.

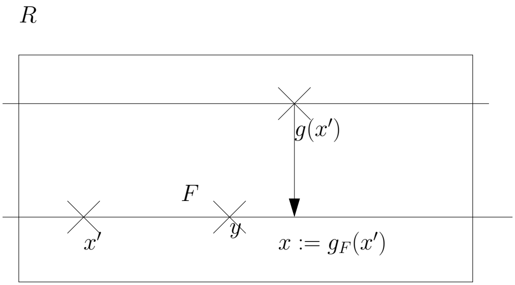
L'application g_F est une application dilatante de F dans F. Elle n'est pas définie partout mais les 2 points importants sont

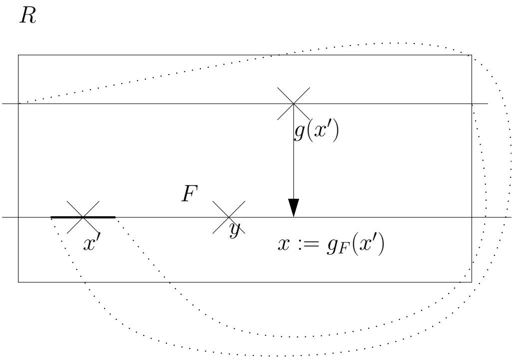
1. les branches inverses sont parfaitement définies sur F,
2. tous les points ont *la même infinité* de préimages.

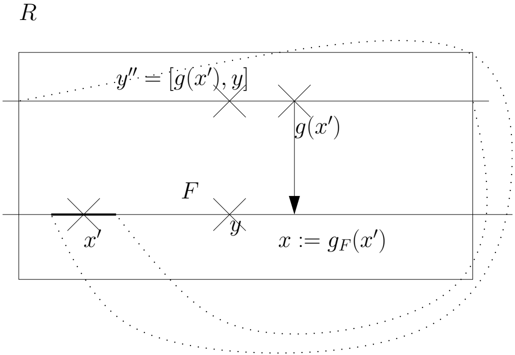

R
F
y
x

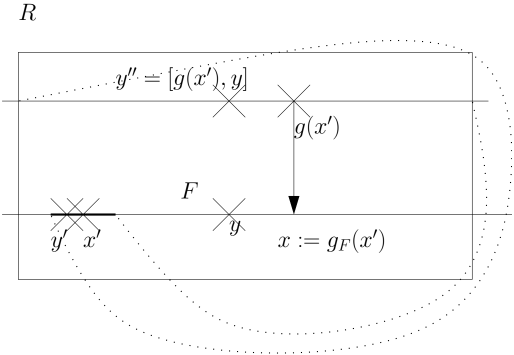

R
F
x'
y
$x := g_F(x')$


R
$g(x')$
F
x'
y
$x := g_F(x')$


R
$g(x')$
F
x'
y
$x := g_F(x')$


R
$g(x')$
F
x'
y
$x := g_F(x')$


R
$y'' = [g(x'), y]$
$g(x')$
F
x'
y
$x := g_F(x')$



R
$y'' = [g(x'), y]$
$g(x')$
F
y'
x'
y
$x := g_F(x')$

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose $\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y)) - \phi \circ f^k(g_F(y))$.

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_Z : \mathcal{T} \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) & \\ y & \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')} \mathcal{T}(y'), \end{array}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose

$$\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y)) - \phi \circ f^k(g_F(y)).$$

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_Z : \mathcal{T} \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) & \\ y \quad \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \displaystyle\sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')} \mathcal{T}(y'), \end{array}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose

$$\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi\circ f^k(g(y)) - \phi\circ f^k(g_F(y)).$$

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z : \mathcal{T} \mapsto\ & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) \\ y \quad \mapsto\ & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')}\mathcal{T}(y'), \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose

$$\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y)) - \phi \circ f^k(g_F(y)).$$

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_Z : \mathcal{T} \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) & \\ y \quad \mapsto & \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \displaystyle\sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')} \mathcal{T}(y'), \end{array}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose

$$\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y)) - \phi \circ f^k(g_F(y)).$$

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z : \mathcal{T} &\mapsto \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) \\ y &\mapsto \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y')-r(y')Z+\omega(y')}\mathcal{T}(y'),\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

Definition (Opérateur de Transfert)

Soient ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F. On pose

$$\omega(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y)) - \phi \circ f^k(g_F(y)).$$

Soit Z un réel.

On définit l'opérateur de transfert $\mathcal{L}_Z$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z : \mathcal{T} &\mapsto \mathcal{L}_Z(\mathcal{T}) \\ y &\mapsto \mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')} \mathcal{T}(y'), \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$.

L'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit sur les fonctions continues, donc l'opérateur adjoint $\mathcal{L}_Z^*$ agit sur les mesures définies sur F.

Si Z est assez grand, il existe une unique mesure de probabilité τ_Z vérifiant

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z \; \tau_Z.$$

Il existe alors une unique fonction höldérienne H_Z telle que

$$\int H_Z d\tau_Z = 1, \; \mathcal{L}_Z(H_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z \; H_Z.$$

La mesure définie par $d\nu_Z := H_Z d\tau_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour le système (F, g_F) associée au potentiel $y \mapsto S_{r(y)}(\phi)(y) + \omega(y) - Z.r(y)$. L'exponentiel de sa pression est $\lambda_Z := \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z$.

L'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit sur les fonctions continues, donc l'opérateur adjoint $\mathcal{L}_Z^*$ agit sur les mesures définies sur F.
Si Z est assez grand, il existe une unique mesure de probabilité τ_Z vérifiant

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z\ \tau_Z.$$

Il existe alors une unique fonction höldérienne H_Z telle que

$$\int H_Z d\tau_Z = 1,\ \mathcal{L}_Z(H_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z\ H_Z.$$

La mesure définie par $d\nu_Z := H_Z d\tau_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour le système (F, g_F) associée au potentiel $y \mapsto S_{r(y)}(\phi)(y) + \omega(y) - Z.r(y)$. L'exponentiel de sa pression est $\lambda_Z := \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z$.

L'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit sur les fonctions continues, donc l'opérateur adjoint $\mathcal{L}_Z^*$ agit sur les mesures définies sur F.
Si Z est assez grand, il existe une unique mesure de probabilité τ_Z vérifiant

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z\ \tau_Z.$$

Il existe alors une unique fonction höldérienne H_Z telle que

$$\int H_Z d\tau_Z = 1,\ \mathcal{L}_Z(H_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z\ H_Z.$$

La mesure définie par $d\nu_Z := H_Z d\tau_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour le système (F, g_F) associée au potentiel $y \mapsto S_{r(y)}(\phi)(y) + \omega(y) - Z.r(y)$. L'exponentiel de sa pression est $\lambda_Z := \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z$.

L'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit sur les fonctions continues, donc l'opérateur adjoint $\mathcal{L}_Z^*$ agit sur les mesures définies sur F.
Si Z est assez grand, il existe une unique mesure de probabilité τ_Z vérifiant

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z \; \tau_Z.$$

Il existe alors une unique fonction höldérienne H_Z telle que

$$\int H_Z d\tau_Z = 1, \; \mathcal{L}_Z(H_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z \; H_Z.$$

La mesure définie par $d\nu_Z := H_Z d\tau_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour le système (F, g_F) associée au potentiel $y \mapsto S_{r(y)}(\phi)(y) + \omega(y) - Z.r(y)$. L'exponentiel de sa pression est $\lambda_Z := \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)d\tau_Z$.

L'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit sur les fonctions continues, donc l'opérateur adjoint $\mathcal{L}_Z^*$ agit sur les mesures définies sur F.
Si Z est assez grand, il existe une unique mesure de probabilité τ_Z vérifiant

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z \ \tau_Z.$$

Il existe alors une unique fonction höldérienne H_Z telle que

$$\int H_Z d\tau_Z = 1,\ \mathcal{L}_Z(H_Z) = \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z \ H_Z.$$

La mesure définie par $d\nu_Z := H_Z d\tau_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour le système (F, g_F) associée au potentiel $y \mapsto S_{r(y)}(\phi)(y) + \omega(y) - Z.r(y)$. L'exponentiel de sa pression est $\lambda_Z := \int \mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F) d\tau_Z$.

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$.
La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.
Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$. La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.

Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$. La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.

Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$. La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.
Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$. La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.
Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Toujours sous la condition Z *assez grand* , l'extension naturelle du système (F, g_F, ν_Z) admet une représentation géométrique donnée par $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$. La mesure $\widehat{\nu}_Z$ est l'unique mesure d'équilibre pour (R, g) associée au potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$.
Si de plus $\int r\, d\tau_Z < +\infty$, on peut déplier la mesure $\widehat{\nu}_Z$: il existe une unique mesure de probabilité f-invariante m_Z telle que

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Proposition (voir [Lep06])

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre associée au potentiel[a] $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

[a] peut-être sensée que pour la dynamique symbolique

Soit x un point de F. On peut écrire $\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x)$ sous la forme

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{x',\ r(x')=n,\ g_F(x')=x} e^{S_n(\phi)(x')+\omega(x')}\right) e^{-nZ}.$$

C'est une série qui converge dès lors que Z est assez grand.

Lemme

Il existe un réel Z_c tel que pour tout x de F la série $\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x)$ converge pour tout $Z > Z_c$ et diverge pour tout $Z < Z_c$.

Moralement, $\displaystyle\int r\, d\tau_Z \sim \mathcal{L}_Z(r)(x) = -\frac{\partial}{\partial Z}(\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x))$.

Comme une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence la condition $Z > Z_c$ donne aussi $\displaystyle\int r\, d\tau_Z < +\infty$.

Soit x un point de F. On peut écrire $\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x)$ sous la forme

$$\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{x',\ r(x')=n,\ g_F(x')=x} e^{S_n(\phi)(x')+\omega(x')}\right)e^{-nZ}.$$

C'est une série qui converge dès lors que Z est assez grand.

Lemme

Il existe un réel Z_c tel que pour tout x de F la série $\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x)$ converge pour tout $Z > Z_c$ et diverge pour tout $Z < Z_c$.

Moralement, $\displaystyle\int r\, d\tau_Z \sim \mathcal{L}_Z(r)(x) = -\frac{\partial}{\partial Z}(\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x))$.

Comme une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence la condition $Z > Z_c$ donne aussi $\displaystyle\int r\, d\tau_Z < +\infty$.

Soit x un point de F. On peut écrire $\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x)$ sous la forme

$$\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{x',\ r(x')=n,\ g_F(x')=x} e^{S_n(\phi)(x')+\omega(x')}\right)e^{-nZ}.$$

C'est une série qui converge dès lors que Z est assez grand.

Lemme

Il existe un réel Z_c tel que pour tout x de F la série $\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x)$ converge pour tout $Z > Z_c$ et diverge pour tout $Z < Z_c$.

Moralement, $\displaystyle\int r\, d\tau_Z \sim \mathcal{L}_Z(r)(x) = -\frac{\partial}{\partial Z}\left(\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x)\right).$

Comme une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence la condition $Z > Z_c$ donne aussi $\displaystyle\int r\, d\tau_Z < +\infty$.

Soit x un point de F. On peut écrire $\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x)$ sous la forme

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{x',\ r(x')=n,\ g_F(x')=x} e^{S_n(\phi)(x')+\omega(x')} \right) e^{-nZ}.$$

C'est une série qui converge dès lors que Z est assez grand.

Lemme

Il existe un réel Z_c tel que pour tout x de F la série $\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x)$ converge pour tout $Z > Z_c$ et diverge pour tout $Z < Z_c$.

Moralement, $\displaystyle\int r\, d\tau_Z \sim \mathcal{L}_Z(r)(x) = -\frac{\partial}{\partial Z}\left(\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x)\right)$.
Comme une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence la condition $Z > Z_c$ donne aussi $\displaystyle\int r\, d\tau_Z < +\infty$.

On considère l'ensemble de Ω_R des points dont l'orbite évite R. C'est un ensemble f-invariant appelé système troué (le trou étant R).

Proposition (voir [CL05])

Soit $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R)$ la pression du système troué associée au potentiel ϕ. Alors on a

$$Z_c = \mathcal{P}(\phi, \Omega_R).$$

On considère l'ensemble de Ω_R des points dont l'orbite évite R. C'est un ensemble f-invariant appelé système troué (le trou étant R).

Proposition (voir [CL05])

Soit $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R)$ la pression du système troué associée au potentiel ϕ. Alors on a

$$Z_c = \mathcal{P}(\phi, \Omega_R).$$

On a évidemment $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) \leq \mathcal{P}(\phi)$.

Question

A-t-on $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$?

Théorème

Si on a $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$ alors pour $Z = \mathcal{P}(\phi)$ on a l'égalité $\lambda_Z = 1$ et la mesure dépliée $m_{\mathcal{P}(\phi)}$ est la/une mesure d'équilibre associée à ϕ.

On a évidemment $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) \leq \mathcal{P}(\phi)$.

Question

A-t-on $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$?

Théorème

Si on a $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$ alors pour $Z = \mathcal{P}(\phi)$ on a l'égalité $\lambda_Z = 1$ et la mesure dépliée $m_{\mathcal{P}(\phi)}$ est la/une mesure d'équilibre associée à ϕ.

On a évidemment $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) \leq \mathcal{P}(\phi)$.

Question

A-t-on $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$?

Théorème

Si on a $\mathcal{P}(\phi, \Omega_R) < \mathcal{P}(\phi)$ alors pour $Z = \mathcal{P}(\phi)$ on a l'égalité $\lambda_Z = 1$ et la mesure dépliée $m_{\mathcal{P}(\phi)}$ est la/une mesure d'équilibre associée à ϕ.

III. Applications au cas uniformément hyperbolique

Mesures maximisantes

Définition

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant et* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *continue. Une mesure* μ σ*-invariante est dite maximisante pour* ϕ *si*

$$\int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \ \sigma-inv} \int \phi \, d\nu,$$

Théorème (Leplaideur, [Lep05])

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant,* ψ *une application Hölder,* ϕ *une application localement constante.*
Alors l'unique mesure de Gibbs associée à $\psi + \beta\phi$*,* $\mu_{\psi+\beta\phi}$*, converge lorsque* β *tend vers* $+\infty$ *vers une mesure* μ*. De plus, celle-ci vérifie*

1. $\displaystyle\int \phi \, d\mu = \max_{\nu} \int \phi \, d\nu.$
2. μ *est une mesure de pression maximale pour* ψ *parmi les mesures maximisantes pour* ϕ*.*

Définition

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant et* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *continue. Une mesure* μ σ*-invariante est dite maximisante pour* ϕ *si*

$$\int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \ \sigma-inv} \int \phi \, d\nu,$$

Théorème (Leplaideur, [Lep05])

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant,* ψ *une application Hölder,* ϕ *une application localement constante.*

Alors l'unique mesure de Gibbs associée à $\psi + \beta\phi$*,* $\mu_{\psi+\beta\phi}$*, converge lorsque* β *tend vers* $+\infty$ *vers une mesure* μ*. De plus, celle-ci vérifie*

1. $\displaystyle\int \phi \, d\mu = \max_{\nu} \int \phi \, d\nu.$
2. μ *est une mesure de pression maximale pour* ψ *parmi les mesures maximisantes pour* ϕ*.*

Définition

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant et* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *continue. Une mesure* μ σ*-invariante est dite maximisante pour* ϕ *si*

$$\int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \ \sigma-inv} \int \phi \, d\nu,$$

Théorème (Leplaideur, [Lep05])

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant,* ψ *une application Hölder,* ϕ *une application localement constante. Alors l'unique mesure de Gibbs associée à* $\psi + \beta\phi$, $\mu_{\psi+\beta\phi}$, *converge lorsque* β *tend vers* $+\infty$ *vers une mesure* μ. *De plus, celle-ci vérifie*

1. $\displaystyle\int \phi \, d\mu = \max_{\nu} \int \phi \, d\nu.$
2. μ *est une mesure de pression maximale pour* ψ *parmi les mesures maximisantes pour* ϕ.

Définition

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant et* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *continue. Une mesure* μ σ*-invariante est dite maximisante pour* ϕ *si*

$$\int \phi \, d\mu = \sup_{\nu \ \sigma-inv} \int \phi \, d\nu,$$

Théorème (Leplaideur, [Lep05])

Soient (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant,* ψ *une application Hölder,* ϕ *une application localement constante.*
Alors l'unique mesure de Gibbs associée à $\psi + \beta\phi$*,* $\mu_{\psi+\beta\phi}$*, converge lorsque* β *tend vers* $+\infty$ *vers une mesure* μ*. De plus, celle-ci vérifie*

1. $\displaystyle\int \phi \, d\mu = \max_{\nu} \int \phi \, d\nu.$
2. μ *est une mesure de pression maximale pour* ψ *parmi les mesures maximisantes pour* ϕ*.*

On sait (voir [CLT01, LT03, Bou01, Jen01]) qu'il existe un sous-shift de type fini $\mathbb{K}_\phi$ tel qu'une mesure maximise ϕ si et seulement si son support est dans ce compact $\mathbb{K}_\phi$.

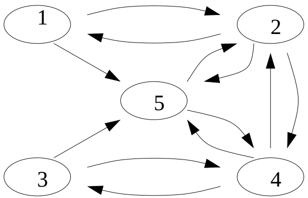
Il n'y a aucunes raisons pour lesquelles $\mathbb{K}_\phi$ serait mélangeant. La question est donc de savoir quelles sont les composantes irréductibles qui "récoltent" la masse à la limite et en quelle proportion.

Une question duale est de savoir si toute mesure à support dans $\mathbb{K}_\phi$ peut être atteinte comme limite de mesures de Gibbs à température 0 et si non, lesquelles le sont et pourquoi.

On sait (voir [CLT01, LT03, Bou01, Jen01]) qu'il existe un sous-shift de type fini $\mathbb{K}_\phi$ tel qu'une mesure maximise ϕ si et seulement si son support est dans ce compact $\mathbb{K}_\phi$.
Il n'y a aucunes raisons pour lesquelles $\mathbb{K}_\phi$ serait mélangeant. La question est donc de savoir quelles sont les composantes irréductibles qui "récoltent" la masse à la limite et en quelle proportion.
Une question duale est de savoir si toute mesure à support dans $\mathbb{K}_\phi$ peut être atteinte comme limite de mesures de Gibbs à température 0 et si non, lesquelles le sont et pourquoi.

On sait (voir [CLT01, LT03, Bou01, Jen01]) qu'il existe un sous-shift de type fini $\mathbb{K}_\phi$ tel qu'une mesure maximise ϕ si et seulement si son support est dans ce compact $\mathbb{K}_\phi$.
Il n'y a aucunes raisons pour lesquelles $\mathbb{K}_\phi$ serait mélangeant. La question est donc de savoir quelles sont les composantes irréductibles qui "récoltent" la masse à la limite et en quelle proportion.
Une question duale est de savoir si toute mesure à support dans $\mathbb{K}_\phi$ peut être atteinte comme limite de mesures de Gibbs à température 0 et si non, lesquelles le sont et pourquoi.

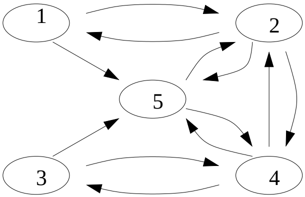
Le théorème précise donc quelle est la mesure limite. À ψ fixée, il montre que toutes les composantes de pression maximale pour ψ ne se comportent pas toutes de façon identique : seules les composantes les plus "éloignées" des autres récoltent de la masse à la limite.



Considérons la fonction $\phi := \mathbb{1}_{\boxed{1}} + \mathbb{1}_{\boxed{3}}$.

L'ensemble $\mathbb{K}_\phi$ est l'union des deux orbites périodiques $\ldots 121212 \ldots$ et $\ldots 343434 \ldots$. La valeur maximal de $\int \phi \, d\mu$ vaut $\frac{1}{2}$ et est obtenue par les mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{1}} + \delta_{\boxed{2}})$ et $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{3}} + \delta_{\boxed{4}})$.

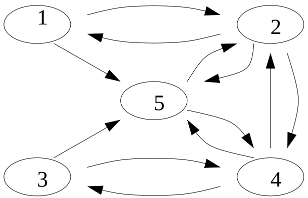
L'éloignement mesure le "coût" pour qu'une orbite quitte une composante maximisante en rejoigne une autre puis revient dans la première.



Considérons la fonction $\phi := \mathbb{1}_{\boxed{1}} + \mathbb{1}_{\boxed{3}}$.

L'ensemble $\mathbb{K}_\phi$ est l'union des deux orbites périodiques $\dots 121212 \dots$ et $\dots 343434 \dots$. La valeur maximal de $\int \phi \, d\mu$ vaut $\frac{1}{2}$ et est obtenue par les mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{1}} + \delta_{\boxed{2}})$ et $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{3}} + \delta_{\boxed{4}})$.

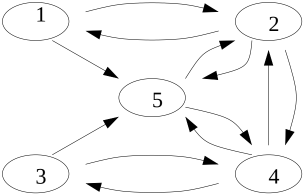
L'éloignement mesure le "coût" pour qu'une orbite quitte une composante maximisante en rejoigne une autre puis revient dans la première.



Considérons la fonction $\phi := \mathbb{1}_{\boxed{1}} + \mathbb{1}_{\boxed{3}}$.

L'ensemble $\mathbb{K}_\phi$ est l'union des deux orbites périodiques $\ldots 121212 \ldots$ et $\ldots 343434 \ldots$. La valeur maximal de $\int \phi \, d\mu$ vaut $\frac{1}{2}$ et est obtenue par les mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{1}} + \delta_{\boxed{2}})$ et $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{3}} + \delta_{\boxed{4}})$.

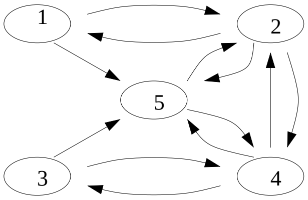
L'éloignement mesure le "coût" pour qu'une orbite quitte une composante maximisante en rejoigne une autre puis revient dans la première.



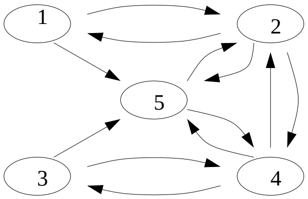
Considérons la fonction $\phi := \mathbb{1}_{\boxed{1}} + \mathbb{1}_{\boxed{3}}$.

L'ensemble $\mathbb{K}_\phi$ est l'union des deux orbites périodiques $\ldots 121212 \ldots$ et $\ldots 343434 \ldots$. La valeur maximal de $\int \phi \, d\mu$ vaut $\frac{1}{2}$ et est obtenue par les mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{1}} + \delta_{\boxed{2}})$ et $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{3}} + \delta_{\boxed{4}})$.

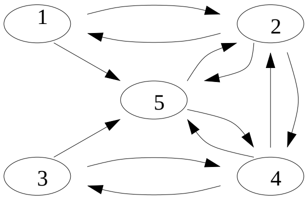
L'éloignement mesure le "coût" pour qu'une orbite quitte une composante maximisante en rejoigne une autre puis revient dans la première.



Par exemple l'orbite $\dots 43434352121212154343 \dots$ quitte la composante $\dots 343434 \dots$ et rejoint la composante $\dots 121212 \dots$ puis revient dans la composante $\dots 343434 \dots$. Elle emprunte un chemin donné par l'orbite périodique obtenue par la répétition du mot 352154. L'intégrale de ϕ pour la mesure invariante de support cette orbite périodique vaut $\frac{2}{6}$. Le coût de cette transition entre les deux composantes irréductibles est $\frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.



Par exemple l'orbite $\dots 4343435212121215434343\dots$ quitte la composante $\dots 343434\dots$ et rejoint la composante $\dots 121212\dots$ puis revient dans la composante $\dots 343434\dots$. Elle emprunte un chemin donné par l'orbite périodique obtenue par la répétition du mot 352154. L'intégrale de ϕ pour la mesure invariante de support cette orbite périodique vaut $\frac{2}{6}$.
Le coût de cette transition entre les deux composantes irréductibles est $\frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.



Par exemple l'orbite $\dots 4343435212121215434343 \dots$ quitte la composante $\dots 343434 \dots$ et rejoint la composante $\dots 121212 \dots$ puis revient dans la composante $\dots 343434 \dots$. Elle emprunte un chemin donné par l'orbite périodique obtenue par la répétition du mot 352154. L'intégrale de ϕ pour la mesure invariante de support cette orbite périodique vaut $\frac{2}{6}$.
Le coût de cette transition entre les deux composantes irréductibles est $\frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$.

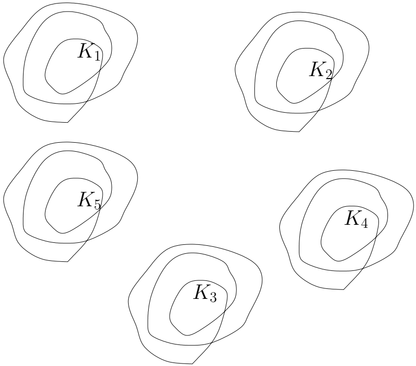
Le coût global de transition entre les deux composantes irréductibles consiste à prendre le minimum des coût de transitions des orbites périodiques qui joignent les deux composantes.

Dans le cas général, le coût de transition entre deux composantes irréductibles se calcul de façon plus compliquée mais quantifie la meilleur manière de relier les deux composantes.

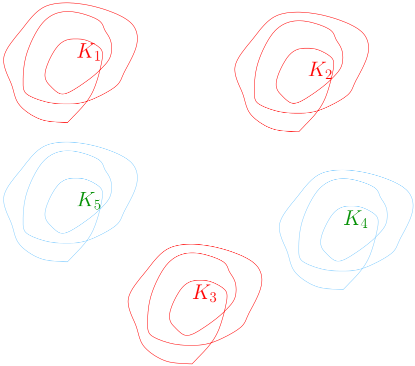
L'*éloignement d'une composante* est alors le plus petit coût de transition de cette composante vers n'importe quelle autre composante.

Le coût global de transition entre les deux composantes irréductibles consiste à prendre le minimum des coût de transitions des orbites périodiques qui joignent les deux composantes.
Dans le cas général, le coût de transition entre deux composantes irréductibles se calcul de façon plus compliquée mais quantifie la meilleur manière de relier les deux composantes.
L'*éloignement d'une composante* est alors le plus petit coût de transition de cette composante vers n'importe quelle autre composante.

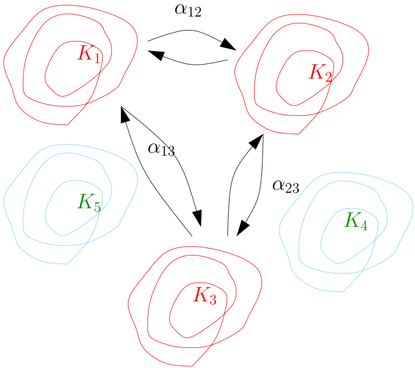
Le coût global de transition entre les deux composantes irréductibles consiste à prendre le minimum des coût de transitions des orbites périodiques qui joignent les deux composantes.
Dans le cas général, le coût de transition entre deux composantes irréductibles se calcul de façon plus compliquée mais quantifie la meilleur manière de relier les deux composantes.
L'*éloignement d'une composante* est alors le plus petit coût de transition de cette composante vers n'importe quelle autre composante.



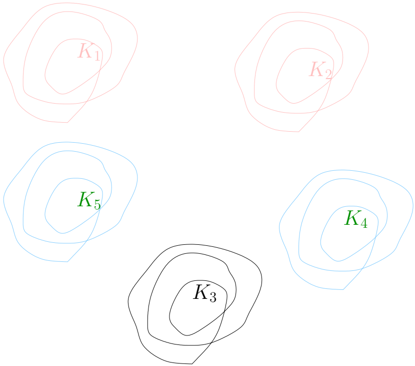
K_1
K_2
K_5
K_4
K_3



K_1
K_2
K_5
K_4
K_3



$$\alpha_{12} < \alpha_{23} \leq \alpha_{13}$$



$$\alpha_{12} < \alpha_{23} \leq \alpha_{13}$$

Cas $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.
La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.
On a $\lim_{Z\to+\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.
À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

Cas $\phi = 1\!\!1_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(1\!\!1_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.
La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z 1\!\!1_R$.
On a $\lim_{Z\to+\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.
À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $1\!\!1_R$.

Cas $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.

La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

On a $\lim_{Z\to+\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.

À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

Cas $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.
La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.
On a $\lim_{Z\to+\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.
À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

Cas $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.
La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.
On a $\lim_{Z \to +\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.
À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

Cas $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle).

$$\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)} \right) e^{-nZ},$$

et donc le rayon spectral $\lambda_Z \to 0$ si $Z \to +\infty$.
La mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.
On a $\lim_{Z\to+\infty} -\log \lambda_Z = +\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log \lambda_Z$ au lieu de β.
À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence (relative) dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

Grandes déviations des temps de retours

On considère un système dynamique uniformément hyperbolique (M, f) et une mesure f-invariante μ. Soit A un ensemble de μ-mesure strictement positive. Il s'agit de donner une estimation asymptotique de la mesure des points x pour lesquels le n-ième temps de retour dans un ensemble A, $r_A^n(x)$, est loin de sa valeur moyenne $\dfrac{n}{\mu(A)}$.

Cela consiste à trouver une fonction de taux Φ_A telle que pour tout $u > \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \geq u \right\} = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u < \dfrac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \leq u \right\} = \Phi_A(u).$$

On considère un système dynamique uniformément hyperbolique (M, f) et une mesure f-invariante μ. Soit A un ensemble de μ-mesure strictement positive. Il s'agit de donner une estimation asymptotique de la mesure des points x pour lesquels le n-ième temps de retour dans un ensemble A, $r_A^n(x)$, est loin de sa valeur moyenne $\dfrac{n}{\mu(A)}$.

Cela consiste à trouver une fonction de taux Φ_A telle que pour tout $u > \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \geq u \right\} = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u < \dfrac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \leq u \right\} = \Phi_A(u).$$

On considère un système dynamique uniformément hyperbolique (M, f) et une mesure f-invariante μ. Soit A un ensemble de μ-mesure strictement positive. Il s'agit de donner une estimation asymptotique de la mesure des points x pour lesquels le n-ième temps de retour dans un ensemble A, $r_A^n(x)$, est loin de sa valeur moyenne $\dfrac{n}{\mu(A)}$.

Cela consiste à trouver une fonction de taux Φ_A telle que pour tout $u > \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \geq u \right\} = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u < \dfrac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \leq u \right\} = \Phi_A(u).$$

On considère un système dynamique uniformément hyperbolique (M, f) et une mesure f-invariante μ. Soit A un ensemble de μ-mesure strictement positive. Il s'agit de donner une estimation asymptotique de la mesure des points x pour lesquels le n-ième temps de retour dans un ensemble A, $r_A^n(x)$, est loin de sa valeur moyenne $\dfrac{n}{\mu(A)}$.

Cela consiste à trouver une fonction de taux Φ_A telle que pour tout $u > \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \geq u \right\} = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u < \dfrac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \leq u \right\} = \Phi_A(u).$$

Définition

Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que la suite des temps de retour dans l'ensemble A vérifie le principe de grandes déviations.

Dans un cas plus restrictif, si une telle fonction existe mais si les égalités sont uniquement valables pour u dans un intervalle $]\underline{u}, \overline{u}[$ *où* $\underline{u} < \frac{1}{\mu(A)} < \overline{u}$*, on dit que la suite des temps de retour vérifie le principe des grandes déviations près de la moyenne.*

Définition

Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que la suite des temps de retour dans l'ensemble A vérifie le principe de grandes déviations.

Dans un cas plus restrictif, si une telle fonction existe mais si les égalités sont uniquement valables pour u dans un intervalle $]\underline{u}, \overline{u}[$ où $\underline{u} < \frac{1}{\mu(A)} < \overline{u}$, on dit que la suite des temps de retour vérifie le principe des grandes déviations près de la moyenne.

Définition

Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que la suite des temps de retour dans l'ensemble A vérifie le principe de grandes déviations.

Dans un cas plus restrictif, si une telle fonction existe mais si les égalités sont uniquement valables pour u dans un intervalle $]\underline{u}, \overline{u}[$ où $\underline{u} < \frac{1}{\mu(A)} < \overline{u}$, on dit que la suite des temps de retour vérifie le principe des grandes déviations près de la moyenne.

Théorème (Chazottes-Leplaideur voir [CL05])

Si (Ω, f) est un Axiom-A et A est une union finie de rectangles, les temps de retour dans A suivent un principe de grandes déviations pour toute mesure de Gibbs.

La preuve est basée sur la convergence et la régularité de la fonction génératrice des moments pour tout $\alpha < \mathcal{P}(\phi) - Z_c$:

$$\Psi(\alpha) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{\alpha r^n} d\mu_\phi = \log \lambda_{\mathcal{P}(\phi)-\alpha},$$

la fonction de taux Φ_A étant alors la transformée de Legendre de Ψ.

Théorème (Chazottes-Leplaideur voir [CL05])

Si (Ω, f) est un Axiom-A et A est une union finie de rectangles, les temps de retour dans A suivent un principe de grandes déviations pour toute mesure de Gibbs.

La preuve est basée sur la convergence et la régularité de la fonction génératrice des moments pour tout $\alpha < \mathcal{P}(\phi) - Z_c$:

$$\Psi(\alpha) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{\alpha r^n} d\mu_\phi = \log \lambda_{\mathcal{P}(\phi)-\alpha},$$

la fonction de taux Φ_A étant alors la transformée de Legendre de Ψ.

Théorème (Chazottes-Leplaideur voir [CL05])

Si (Ω, f) est un Axiom-A et A est une union finie de rectangles, les temps de retour dans A suivent un principe de grandes déviations pour toute mesure de Gibbs.

La preuve est basée sur la convergence et la régularité de la fonction génératrice des moments pour tout $\alpha < \mathcal{P}(\phi) - Z_c$:

$$\Psi(\alpha) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{\alpha r^n} d\mu_\phi = \log \lambda_{\mathcal{P}(\phi)-\alpha},$$

la fonction de taux Φ_A étant alors la transformée de Legendre de Ψ.

La convergence de Ψ dans un voisinage complexe de $]-\infty, \mathcal{P}(\phi) - Z_c[$ permet d'avoir le TCL :

Théorème (Chazottes-leplaideur voir [CL05])

Soient (Ω, f) un Axiom-A et A une union finie de rectangles. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée. Soit $\mu_{\phi,A}$ la mesure conditionelle $\mu_\phi(. \cap A)/\mu_\phi(A)$. Alors, avec les notations précédentes, on a

$$\sigma_A^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \left(r_A^n - \frac{n}{\mu_\phi(A)} \right)^2 d\mu_{\phi,A} \in]0, +\infty[, \tag{3}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\phi,A} \left\{ \frac{r_A^n - n/\mu_\phi(A)}{\sigma_A \sqrt{n}} \le t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi. \tag{4}$$

La convergence de Ψ dans un voisinage complexe de $]-\infty, \mathcal{P}(\phi) - Z_c[$ permet d'avoir le TCL :

Théorème (Chazottes-leplaideur voir [CL05])

Soient (Ω, f) un Axiom-A et A une union finie de rectangles. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée. Soit $\mu_{\phi,A}$ la mesure conditionelle $\mu_\phi(. \cap A)/\mu_\phi(A)$. Alors, avec les notations précédentes, on a

$$\sigma_A^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \left(r_A^n - \frac{n}{\mu_\phi(A)} \right)^2 d\mu_{\phi,A} \in]0, +\infty[, \tag{3}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\phi,A} \left\{ \frac{r_A^n - n/\mu_\phi(A)}{\sigma_A \sqrt{n}} \leq t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \, d\xi. \tag{4}$$

La question essentielle était ensuite de voir si on pouvait étendre le résultat de gande déviations pour des ensembles plus compliqués. Benoît Saussol et moi-même avons alors démontré :

Théorème ([LS08])

Soit (Ω, f) un Axiom-A et A un borélien de bord ∂A. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée.
Si ∂A est de mesure nulle pour toute mesure f-invariante, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations pour μ_ϕ.
Si le bord ∂A est de pression pour ϕ strictement plus petite que la pression topologique, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations près de la moyenne.

La question essentielle était ensuite de voir si on pouvait étendre le résultat de gande déviations pour des ensembles plus compliqués. Benoît Saussol et moi-même avons alors démontré :

Théorème ([LS08])

Soit (Ω, f) un Axiom-A et A un borélien de bord ∂A. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée.

Si ∂A est de mesure nulle pour toute mesure f-invariante, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations pour μ_ϕ.

Si le bord ∂A est de pression pour ϕ strictement plus petite que la pression topologique, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations près de la moyenne.

La question essentielle était ensuite de voir si on pouvait étendre le résultat de gande déviations pour des ensembles plus compliqués. Benoît Saussol et moi-même avons alors démontré :

Théorème ([LS08])

Soit (Ω, f) un Axiom-A et A un borélien de bord ∂A. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée.
Si ∂A est de mesure nulle pour toute mesure f-invariante, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations pour μ_ϕ.
Si le bord ∂A est de pression pour ϕ strictement plus petite que la pression topologique, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations près de la moyenne.

La question essentielle était ensuite de voir si on pouvait étendre le résultat de gande déviations pour des ensembles plus compliqués. Benoît Saussol et moi-même avons alors démontré :

Théorème ([LS08])

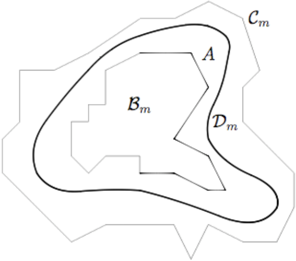
Soit (Ω, f) *un Axiom-A et* A *un borélien de bord* ∂A*. Soient* ϕ *un potentiel höldérien et* μ_ϕ *la mesure de Gibbs associée.*
Si ∂A *est de mesure nulle pour toute mesure* f*-invariante, alors les temps de retours dans* A *vérifient le principe de grandes déviations pour* μ_ϕ*.*
Si le bord ∂A *est de pression pour* ϕ *strictement plus petite que la pression topologique, alors les temps de retours dans* A *vérifient le principe de grandes déviations près de la moyenne.*

La preuve utilise l'approximation de A par des unions de rectangles (de plus en plus petits),

et les inégalités $r_C \leq r_A \leq r_B$ qui entraînent pour $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha r_C^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_A^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_B^n}].$$

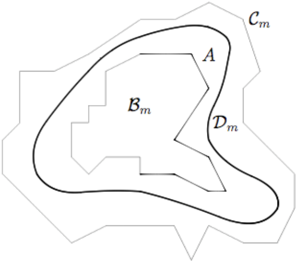
La preuve utilise l'approximation de A par des unions de rectangles (de plus en plus petits),



et les inégalités $r_C \leq r_A \leq r_B$ qui entraînent pour $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha r_C^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_A^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_B^n}].$$

La preuve utilise l'approximation de A par des unions de rectangles (de plus en plus petits),



et les inégalités $r_C \leq r_A \leq r_B$ qui entraînent pour $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}[e^{\alpha r_C^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_A^n}] \leq \mathbb{E}[e^{\alpha r_B^n}].$$

Flot horocyclique, systèmes troués

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.

Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.
Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.
Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.
Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z 1\!\!1_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.
Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.
Pour $Z > Z_c$ la mesure m_Z est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z 1\!\!1_R$.

$$\widehat{\nu}_Z = \frac{m_Z(. \cap R)}{m_Z(R)}.$$

Le théorème de convergence des mesures de Gibbs à température zéro donne (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) :

Proposition

Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Théorème (Leplaideur [Lep06])

Soit (Σ,σ) *un sous-shift de type fini mélangeant. Soit* ϕ *une application höldérienne de* Σ *dans* $\mathbb{R}$*. Soit* R *un cylindre de* Σ *de longueur finie. Soit* g *l'application premier retour dans* R*. Soit* $\widehat{\nu}_Z$ *la mesure d'équilibre pour le système* (R,g) *associée au potentiel* $S_{r_R(.)}(\phi)(.) - Zr_R(.)$*.*

Alors, la mesure $\widehat{\nu}_Z$ *converge vers une mesure de probabilité* $\widehat{\nu}$ *sur* R *lorsque* Z *tend vers* Z_c*. Le support de* $\widehat{\nu}$ *est un ensemble totalement dissipatif (pour* σ*). La mesure* $\mu := \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma_*^k\widehat{\nu}$ *est une mesure* σ*-invariante et* σ*-finie. Elle a la même asymptotique que* m *:*
Pour μ *presque tout point, et pour toute fonction continue* ψ*,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}S_n(\psi)(x) = \int \psi \, dm_{erg(x)},$$

où $m_{erg(x)}$ *est une composante ergodique de* m *(qui attire* x *à l'infini).*

Théorème (Leplaideur [Lep06])

Soit (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant. Soit* ϕ *une application höldérienne de* Σ *dans* $\mathbb{R}$*. Soit* R *un cylindre de* Σ *de longueur finie. Soit* g *l'application premier retour dans* R*. Soit* $\widehat{\nu}_Z$ *la mesure d'équilibre pour le système* (R, g) *associée au potentiel* $S_{r_R(.)}(\phi)(.) - Zr_R(.)$*.*
Alors, la mesure $\widehat{\nu}_Z$ *converge vers une mesure de probabilité* $\widehat{\nu}$ *sur* R *lorsque* Z *tend vers* Z_c*. Le support de* $\widehat{\nu}$ *est un ensemble totalement dissipatif (pour* σ*). La mesure* $\mu := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_*^k \widehat{\nu}$ *est une mesure* σ*-invariante et* σ*-finie. Elle a la même asymptotique que m :*
Pour μ *presque tout point, et pour toute fonction continue* ψ*,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, dm_{erg(x)},$$

où $m_{erg(x)}$ *est une composante ergodique de m (qui attire x à l'infini).*

Théorème (Leplaideur [Lep06])

Soit (Σ, σ) *un sous-shift de type fini mélangeant. Soit* ϕ *une application höldérienne de* Σ *dans* $\mathbb{R}$*. Soit* R *un cylindre de* Σ *de longueur finie. Soit* g *l'application premier retour dans* R*. Soit* $\widehat{\nu}_Z$ *la mesure d'équilibre pour le système* (R, g) *associée au potentiel* $S_{r_R(.)}(\phi)(.) - Zr_R(.)$*.*
Alors, la mesure $\widehat{\nu}_Z$ *converge vers une mesure de probabilité* $\widehat{\nu}$ *sur* R *lorsque* Z *tend vers* Z_c*. Le support de* $\widehat{\nu}$ *est un ensemble totalement dissipatif (pour* σ*). La mesure* $\mu := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_*^k \widehat{\nu}$ *est une mesure* σ*-invariante et* σ*-finie. Elle a la même asymptotique que* m *:*
Pour μ *presque tout point, et pour toute fonction continue* ψ*,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, dm_{erg(x)},$$

où $m_{erg(x)}$ *est une composante ergodique de* m *(qui attire* x *à l'infini).*

La mesure μ est totalement dissipative et σ-finie.

Il existe à ma connaissance peu de résultats sur les mesures infinies dissipatives, du fait de l'absence de récurrence.

Je rappelle que dans le cas d'une mesure infinie conservative $\widetilde{\mu}$ il ne peut pas exister de suite de réels (a_n) telle que pour toute fonction ψ dans $L^1(\widetilde{\mu})$ et pour presque tout x on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, d\widetilde{\mu}.$$

Ici, non seulement la suite $a_n := n$ fonctionne mais la convergence a lieu pour tout fonction continue.

La mesure μ est totalement dissipative et σ-finie.
Il existe à ma connaissance peu de résultats sur les mesures infinies dissipatives, du fait de l'absence de récurrence.
Je rappelle que dans le cas d'une mesure infinie conservative $\widetilde{\mu}$ il ne peut pas exister de suite de réels (a_n) telle que pour toute fonction ψ dans $L^1(\widetilde{\mu})$ et pour presque tout x on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, d\widetilde{\mu}.$$

Ici, non seulement la suite $a_n := n$ fonctionne mais la convergence a lieu pour tout fonction continue.

La mesure μ est totalement dissipative et σ-finie.
Il existe à ma connaissance peu de résultats sur les mesures infinies dissipatives, du fait de l'absence de récurrence.
Je rappelle que dans le cas d'une mesure infinie conservative $\widetilde{\mu}$ il ne peut pas exister de suite de réels (a_n) telle que pour toute fonction ψ dans $L^1(\widetilde{\mu})$ et pour presque tout x on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, d\widetilde{\mu}.$$

Ici, non seulement la suite $a_n := n$ fonctionne mais la convergence a lieu pour tout fonction continue.

La mesure μ est totalement dissipative et σ-finie.
Il existe à ma connaissance peu de résultats sur les mesures infinies dissipatives, du fait de l'absence de récurrence.
Je rappelle que dans le cas d'une mesure infinie conservative $\widetilde{\mu}$ il ne peut pas exister de suite de réels (a_n) telle que pour toute fonction ψ dans $L^1(\widetilde{\mu})$ et pour presque tout x on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, d\widetilde{\mu}.$$

Ici, non seulement la suite $a_n := n$ fonctionne mais la convergence a lieu pour tout fonction continue.

La mesure μ est totalement dissipative et σ-finie.
Il existe à ma connaissance peu de résultats sur les mesures infinies dissipatives, du fait de l'absence de récurrence.
Je rappelle que dans le cas d'une mesure infinie conservative $\widetilde{\mu}$ il ne peut pas exister de suite de réels (a_n) telle que pour toute fonction ψ dans $L^1(\widetilde{\mu})$ et pour presque tout x on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, d\widetilde{\mu}.$$

Ici, non seulement la suite $a_n := n$ fonctionne mais la convergence a lieu pour tout fonction continue.

La construction permet aussi de donner des exemples explicites de systèmes de mesures invariants (ou quasi-invariant) par le flot horocyclique et *intégrable* par une mesure invariante par le décalage.

L'existence de tels systèmes était connue (quoi que...) suite à un théorème de K. Schmidt (voir [Sch77]) mais la preuve de ce théorème repose sur une équivalence orbitale entre les $\mathbb{Z}$-actions et les $\mathbb{Z}^2$-actions. Cette équivalence orbitale n'est pas explicitement accessible.

Ce problème est lié à l'unique ergodicité du flot horocyclique ainsi qu'à la rigidité stable-instable des mesures de Gibbs.

La construction permet aussi de donner des exemples explicites de systèmes de mesures invariants (ou quasi-invariant) par le flot horocyclique et *intégrable* par une mesure invariante par le décalage.

L'existence de tels systèmes était connue (quoi que...) suite à un théorème de K. Schmidt (voir [Sch77]) mais la preuve de ce théorème repose sur une équivalence orbitale entre les $\mathbb{Z}$-actions et les $\mathbb{Z}^2$-actions. Cette équivalence orbitale n'est pas explicitement accessible.

Ce problème est lié à l'unique ergodicité du flot horocyclique ainsi qu'à la rigidité stable-instable des mesures de Gibbs.

La construction permet aussi de donner des exemples explicites de systèmes de mesures invariants (ou quasi-invariant) par le flot horocyclique et *intégrable* par une mesure invariante par le décalage.

L'existence de tels systèmes était connue (quoi que...) suite à un théorème de K. Schmidt (voir [Sch77]) mais la preuve de ce théorème repose sur une équivalence orbitale entre les $\mathbb{Z}$-actions et les $\mathbb{Z}^2$-actions. Cette équivalence orbitale n'est pas explicitement accessible.

Ce problème est lié à l'unique ergodicité du flot horocyclique ainsi qu'à la rigidité stable-instable des mesures de Gibbs.

Parfois, il est commode de considérer qu'un système dynamique hyperbolique présente une structure produit "instable$\times$stable" sur laquelle "moralement" la transformation agit de façon décorrélée : les itérations positives influences la direction instable, les itérations négatives influencent la direction stable.

Théorème (Ledrappier-Young voir [LY85])

Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique Alors on a

$$h_\mu(f) = \sum \delta_{\mu,i}\lambda^+_{\mu,i}. \tag{5}$$

Théorème (Ledrappier-Young et Barreira-Pesin-Schmeling)

Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique. Alors pour μ-presque tout x, $\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\log(\mu(B(x,\varepsilon)))}{\log(\varepsilon)} = \delta^u_\mu + \delta^s_\mu.$

Parfois, il est commode de considérer qu'un système dynamique hyperbolique présente une structure produit "instable$\times$stable" sur laquelle "moralement" la transformation agit de façon décorrélée : les itérations positives influences la direction instable, les itérations négatives influencent la direction stable.

Théorème (Ledrappier-Young voir [LY85])

Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique Alors on a

$$h_\mu(f) = \sum \delta_{\mu,i}\lambda^+_{\mu,i}. \tag{5}$$

Théorème (Ledrappier-Young et Barreira-Pesin-Schmeling)

Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique. Alors pour μ-presque tout x, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\mu(B(x,\varepsilon)))}{\log(\varepsilon)} = \delta^u_\mu + \delta^s_\mu$.

Parfois, il est commode de considérer qu'un système dynamique hyperbolique présente une structure produit "instable$\times$stable" sur laquelle "moralement" la transformation agit de façon décorrélée : les itérations positives influences la direction instable, les itérations négatives influencent la direction stable.

Théorème (Ledrappier-Young voir [LY85])

Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique Alors on a

$$h_\mu(f) = \sum \delta_{\mu,i}\lambda^+_{\mu,i}. \tag{5}$$

Théorème (Ledrappier-Young et Barreira-Pesin-Schmeling)

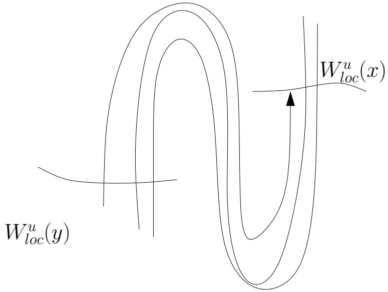
Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique. Alors pour μ-presque tout x, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log(\mu(B(x,\varepsilon)))}{\log(\varepsilon)} = \delta^u_\mu + \delta^s_\mu.$

Pour les mesures de Gibbs, cette décorrélation est d'autant plus vraie que les mesures sont localement un produit de 2 mesures (voir [Lep00]).

Par ailleurs, le fait que la mesure $\widehat{\nu}_Z$ (dans R) soit l'extension naturelle de ν_Z (sur F) montre une certaine rigidité stable-instable : la mesure sur les feuilles instables locale redonne la mesure globalement : c'est l'unique ergodicité du flot horocyclique.

Pour les mesures de Gibbs, cette décorrélation est d'autant plus vraie que les mesures sont localement un produit de 2 mesures (voir [Lep00]).
Par ailleurs, le fait que la mesure $\widehat{\nu}_Z$ (dans R) soit l'extension naturelle de ν_Z (sur F) montre une certaine rigidité stable-instable : la mesure sur les feuilles instables locale redonne la mesure globalement : c'est l'unique ergodicité du flot horocyclique.

Pour les mesures de Gibbs, cette décorrélation est d'autant plus vraie que les mesures sont localement un produit de 2 mesures (voir [Lep00]).
Par ailleurs, le fait que la mesure $\widehat{\nu}_Z$ (dans R) soit l'extension naturelle de ν_Z (sur F) montre une certaine rigidité stable-instable : la mesure sur les feuilles instables locale redonne la mesure globalement : c'est l'unique ergodicité du flot horocyclique.



Théorème (Bowen & Marcus voir [BM77], Haydn voir [Hay94])

Il existe une unique façon d'équiper les feuilles instables locales de mesures de probabilité de telle sorte que ces mesures soient globalement invariantes par les holonomies stables.

Les mesures mises sur les feuilles instables locales doivent alors être équivalentes aux mesures conditionnelles instables de la mesure d'entropie maximale. On dit que la mesure d'entropie maximale *intègre* les mesures invariantes par le flot horocyclique.

Ce résultat se généralise au cas des mesures de Gibbs en considérant des mesures quasi-invariantes pour le flot horocyclique.

Théorème (Bowen & Marcus voir [BM77], Haydn voir [Hay94])

Il existe une unique façon d'équiper les feuilles instables locales de mesures de probabilité de telle sorte que ces mesures soient globalement invariantes par les holonomies stables.

Les mesures mises sur les feuilles instables locales doivent alors être équivalentes aux mesures conditionnelles instables de la mesure d'entropie maximale. On dit que la mesure d'entropie maximale *intègre* les mesures invariantes par le flot horocyclique.

Ce résultat se généralise au cas des mesures de Gibbs en considérant des mesures quasi-invariantes pour le flot horocyclique.

Théorème (Bowen & Marcus voir [BM77], Haydn voir [Hay94])

Il existe une unique façon d'équiper les feuilles instables locales de mesures de probabilité de telle sorte que ces mesures soient globalement invariantes par les holonomies stables.

Les mesures mises sur les feuilles instables locales doivent alors être équivalentes aux mesures conditionnelles instables de la mesure d'entropie maximale. On dit que la mesure d'entropie maximale *intègre* les mesures invariantes par le flot horocyclique.
Ce résultat se généralise au cas des mesures de Gibbs en considérant des mesures quasi-invariantes pour le flot horocyclique.

IV. Applications au cas non-uniformément hyperbolique

Hyperbolicité, une notion un peu floue.

- Hyperbolicité mesurée "à la Pesin".

Théorème (Oseledec voir [Ose68])

Soient M une variété riemannienne lisse compacte de dimension finie et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de M. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante et ergodique. Si $\log^+|Df^{\pm 1}|$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors il existe des nombres réels strictement positifs λ^u et λ^s et pour μ-presque tout point x il existe une décomposition Df-invariante de l'espace fibré tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x)$, tels que pour tout $\varepsilon < \min(\lambda^s, \lambda^u)$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

1. *Pour tout $v^u \neq 0$ dans $E^u(x)$,* $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{-n}(x).v^u| \leq -\lambda^u$,
2. *Pour tout $v^s \neq 0$ dans $E^s(x)$,* $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{n}(x).v^s| \leq -\lambda^s$,
3. *Pour tout $v^c \neq 0$ dans $E^c(x)$,* $-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \varepsilon$.

Hyperbolicité, une notion un peu floue.

- Hyperbolicité mesurée "à la Pesin".

Théorème (Oseledec voir [Ose68])

Soient M une variété riemannienne lisse compacte de dimension finie et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de M. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante et ergodique. Si $\log^+ |Df^{\pm 1}|$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors il existe des nombres réels strictement positifs λ^u et λ^s et pour μ-presque tout point x il existe une décomposition Df-invariante de l'espace fibré tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x)$, tels que pour tout $\varepsilon < \min(\lambda^s, \lambda^u)$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

1. *Pour tout $v^u \neq 0$ dans $E^u(x)$, $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \log |Df^{-n}(x).v^u| \leq -\lambda^u$,*
2. *Pour tout $v^s \neq 0$ dans $E^s(x)$, $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \log |Df^{n}(x).v^s| \leq -\lambda^s$,*
3. *Pour tout $v^c \neq 0$ dans $E^c(x)$, $-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \varepsilon$.*

Hyperbolicité, une notion un peu floue.

- Hyperbolicité mesurée “à la Pesin”.

Théorème (Oseledec voir [Ose68])

Soient M une variété riemannienne lisse compacte de dimension finie et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de M. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante et ergodique. Si $\log^+|Df^{\pm 1}|$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors il existe des nombres réels strictement positifs λ^u et λ^s et pour μ-presque tout point x il existe une décomposition Df-invariante de l'espace fibré tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x)$, tels que pour tout $\varepsilon < \min(\lambda^s, \lambda^u)$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

1. *Pour tout $v^u \neq 0$ dans $E^u(x)$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{-n}(x).v^u| \leq -\lambda^u$,*
2. *Pour tout $v^s \neq 0$ dans $E^s(x)$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{n}(x).v^s| \leq -\lambda^s$,*
3. *Pour tout $v^c \neq 0$ dans $E^c(x)$, $-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \varepsilon$.*

Définition

Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ ($\mu-$p.p.).

• Hyperbolicité topologique "à la brésilienne". Le vocabuaire est souvent identique mais les objets sont sensiblement différents.
Le point commun entre ces 2 approches réside dans le fait que, dans les 2 cas, la structure locale produit, essentielle pour appliquer la méthode de construction des mesures de Gibbs, disparaît. Elle disparaît soit parce que les variétés cessent d'exister, soit parce que les variétés stables et instables locales n'ont plus de longueur uniforme :

Définition

Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ (μ−p.p.).

• Hyperbolicité topologique "à la brésilienne". Le vocabuaire est souvent identique mais les objets sont sensiblement différents.

Le point commun entre ces 2 approches réside dans le fait que, dans les 2 cas, la structure locale produit, essentielle pour appliquer la méthode de construction des mesures de Gibbs, disparaît. Elle disparaît soit parce que les variétés cessent d'exister, soit parce que les variétés stables et instables locales n'ont plus de longueur uniforme :

Définition

Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ (μ−p.p.).

• Hyperbolicité topologique "à la brésilienne". Le vocabuaire est souvent identique mais les objets sont sensiblement différents.

Le point commun entre ces 2 approches réside dans le fait que, dans les 2 cas, la structure locale produit, essentielle pour appliquer la méthode de construction des mesures de Gibbs, disparaît. Elle disparaît soit parce que les variétés cessent d'exister, soit parce que les variétés stables et instables locales n'ont plus de longueur uniforme :

Définition

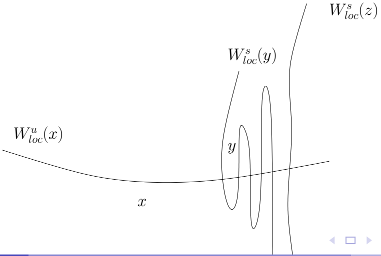
Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ (μ−p.p.).

• Hyperbolicité topologique "à la brésilienne". Le vocabuaire est souvent identique mais les objets sont sensiblement différents.
Le point commun entre ces 2 approches réside dans le fait que, dans les 2 cas, la structure locale produit, essentielle pour appliquer la méthode de construction des mesures de Gibbs, disparaît. Elle disparaît soit parce que les variétés cessent d'exister, soit parce que les variétés stables et instables locales n'ont plus de longueur uniforme :

Définition

Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ ($\mu-$p.p.).

• Hyperbolicité topologique "à la brésilienne". Le vocabuaire est souvent identique mais les objets sont sensiblement différents.
Le point commun entre ces 2 approches réside dans le fait que, dans les 2 cas, la structure locale produit, essentielle pour appliquer la méthode de construction des mesures de Gibbs, disparaît. Elle disparaît soit parce que les variétés cessent d'exister, soit parce que les variétés stables et instables locales n'ont plus de longueur uniforme :



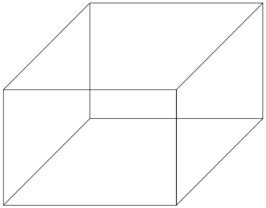
Conjecture (Palis)

Soit M une variété riemannienne compact lisse et de dimension finie. L'ensemble des difféomorphismes qui sont soit uniformément hyperboliques, soit avec une tangente homocline, soit avec un cycle hétérodimensionnel, est dense dans l'ensemble des difféomorphismes sur la variété riemannienne M.

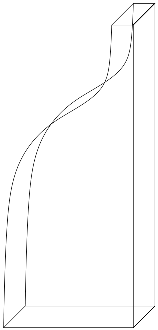
Fer à cheval torsadé

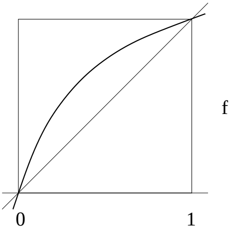
C'est un exemple de système avec cycle hétérodimensionnel, introduit par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino. Ce système n'est pas hyperbolique au sens de l'école brésilienne mais l'est au sens de le théorie de Pesin :

C'est un exemple de système avec cycle hétérodimensionnel, introduit par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino. Ce système n'est pas hyperbolique au sens de l'école brésilienne mais l'est au sens de le théorie de Pesin :

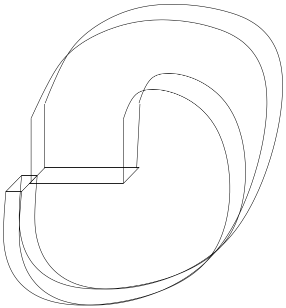


C'est un exemple de système avec cycle hétérodimensionnel, introduit par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino. Ce système n'est pas hyperbolique au sens de l'école brésilienne mais l'est au sens de le théorie de Pesin :

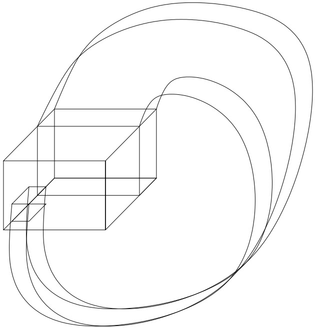


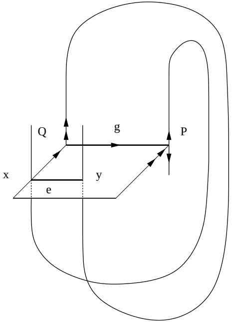


C'est un exemple de système avec cycle hétérodimensionnel, introduit par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino. Ce système n'est pas hyperbolique au sens de l'école brésilienne mais l'est au sens de le théorie de Pesin :



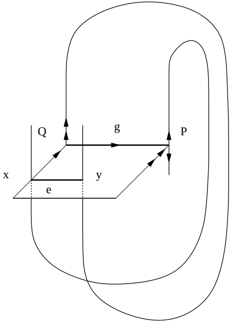
C'est un exemple de système avec cycle hétérodimensionnel, introduit par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino. Ce système n'est pas hyperbolique au sens de l'école brésilienne mais l'est au sens de le théorie de Pesin :





Théorème (Leplaideur-Oliveira-Rios voir [LOR08])

Toute probabilité f-invariante ergodique autre que δ_Q a un exposant de Lyapunov strictement négatif dans la direction centrale.
De plus l'entropie métrique est semi-continue supérieurement, et pour toute fonction continue ϕ il existe une mesure d'équilibre pour ϕ.



Théorème (Leplaideur-Oliveira-Rios voir [LOR08])

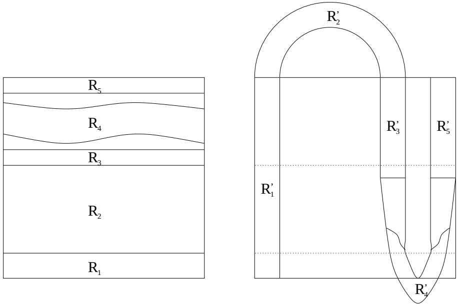
Toute probabilité f-invariante ergodique autre que δ_Q a un exposant de Lyapunov strictement négatif dans la direction centrale.
De plus l'entropie métrique est semi-continue supérieurement, et pour toute fonction continue ϕ il existe une mesure d'équilibre pour ϕ.

Fer à cheval avec tangente homocline

Dans [Rio01] I. Rios introduit la famille de fers à cheval

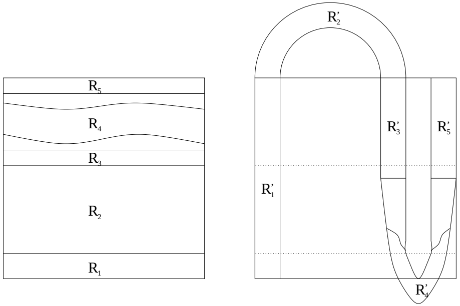
La famille dépend du paramètre ε qui représente l'opposé de l'ordonnée du minimum de la partie recourbée

Dans [Rio01] I. Rios introduit la famille de fers à cheval

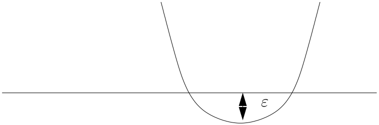


La famille dépend du paramètre ε qui représente l'opposé de l'ordonnée du minimum de la partie recourbée

Dans [Rio01] I. Rios introduit la famille de fers à cheval



La famille dépend du paramètre ε qui représente l'opposé de l'ordonnée du minimum de la partie recourbée



La tangence a lieu pour $\varepsilon = 0$. Une telle transformation est non-uniformément hyperbolique sur l'ensemble $\Lambda := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n([0,1]^2)$.

Proposition

Pour chaque point x de Λ qui n'est pas dans l'orbite critique, il existe deux cônes $C^u(x)$ et $C^s(x)$ et un entier $N = N(x)$ tels que pour tout $n \geq N(x)$ on ait :

1. $Df_x(\mathcal{C}^u(x)) \subset C^u(f(x))$,
2. *pour tout* v^u *dans* $C^u(x)$, $|Df_x^n(v^u)| \geq e^{n\lambda^u}|v^u|$,
3. $Df_x^{-1}(\mathcal{C}^s(x)) \subset C^s(f^{-1}(x))$,
4. *pour tout* v^s *dans* $C^s(x)$, $|Df_x^n(v^s)| \leq e^{-n\lambda^s}|v^s|$,

L'application $x \mapsto N(x)$ n'est pas majorée.

La tangence a lieu pour $\varepsilon = 0$. Une telle transformation est non-uniformément hyperbolique sur l'ensemble $\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n([0,1]^2)$.

Proposition

Pour chaque point x de Λ qui n'est pas dans l'orbite critique, il existe deux cônes $C^u(x)$ et $C^s(x)$ et un entier $N = N(x)$ tels que pour tout $n \geq N(x)$ on ait :

1. $Df_x(\mathcal{C}^u(x)) \subset C^u(f(x))$,
2. *pour tout* v^u *dans* $C^u(x)$, $|Df_x^n(v^u)| \geq e^{n\lambda^u}|v^u|$,
3. $Df_x^{-1}(\mathcal{C}^s(x)) \subset C^s(f^{-1}(x))$,
4. *pour tout* v^s *dans* $C^s(x)$, $|Df_x^n(v^s)| \leq e^{-n\lambda^s}|v^s|$,

L'application $x \mapsto N(x)$ n'est pas majorée.

La tangence a lieu pour $\varepsilon = 0$. Une telle transformation est non-uniformément hyperbolique sur l'ensemble $\Lambda := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n([0,1]^2)$.

Proposition

Pour chaque point x de Λ qui n'est pas dans l'orbite critique, il existe deux cônes $C^u(x)$ et $C^s(x)$ et un entier $N = N(x)$ tels que pour tout $n \geq N(x)$ on ait :

1. $Df_x(\mathcal{C}^u(x)) \subset C^u(f(x))$,
2. *pour tout v^u dans $C^u(x)$,* $|Df_x^n(v^u)| \geq e^{n\lambda^u}|v^u|$,
3. $Df_x^{-1}(\mathcal{C}^s(x)) \subset C^s(f^{-1}(x))$,
4. *pour tout v^s dans $C^s(x)$,* $|Df_x^n(v^s)| \leq e^{-n\lambda^s}|v^s|$,

L'application $x \mapsto N(x)$ n'est pas majorée.

Théorème (Leplaiddeur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Tout point de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$ possède une variété stable $W^s(x)$ et une variété instable $W^u(x)$. Ces variétés induisent localement une structure locale produit.

Démontrer ce théorème revient finalement à démontrer la semi-conjugaison du système (Λ, f) au 3-shift plein. De plus on montre que la projection est höldérienne, ce qui permet d'avoir :

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Pour toute application höldérienne ϕ, il existe une unique mesure d'équilibre pour le potentiel ϕ.

Théorème (Leplaiddeur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Tout point de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$ possède une variété stable $W^s(x)$ et une variété instable $W^u(x)$. Ces variétés induisent localement une structure locale produit.

Démontrer ce théorème revient finalement à démontrer la semi-conjugaison du système (Λ, f) au 3-shift plein. De plus on montre que la projection est höldérienne, ce qui permet d'avoir :

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Pour toute application höldérienne ϕ, il existe une unique mesure d'équilibre pour le potentiel ϕ.

Théorème (Leplaiddeur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Tout point de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$ possède une variété stable $W^s(x)$ et une variété instable $W^u(x)$. Ces variétés induisent localement une structure locale produit.

Démontrer ce théorème revient finalement à démontrer la semi-conjugaison du système (Λ, f) au 3-shift plein. De plus on montre que la projection est höldérienne, ce qui permet d'avoir :

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR06])

Soit f comme précédemment. Pour toute application höldérienne ϕ, il existe une unique mesure d'équilibre pour le potentiel ϕ.

Le théorème précédent ne s'applique par pour $\phi_t := -t \log J^u$ car cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie du fait de la discontinuité (difficulté d'utiliser la topologie faible*).

On note $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2}\log\sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t \log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0, 0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.

Le théorème précédent ne s'applique par pour $\phi_t := -t \log J^u$ car cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$.

Pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie du fait de la discontinuité (difficulté d'utiliser la topologie faible*).

On note $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2} \log \sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t \log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0, 0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.

Le théorème précédent ne s'applique par pour $\phi_t := -t \log J^u$ car cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$.
Pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie du fait de la discontinuité (difficulté d'utiliser la topologie faible*).
On note $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2}\log\sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t\log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.

Le théorème précédent ne s'applique par pour $\phi_t := -t \log J^u$ car cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$.
Pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie du fait de la discontinuité (difficulté d'utiliser la topologie faible*).
On note $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2}\log\sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t \log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.

Le théorème précédent ne s'applique par pour $\phi_t := -t \log J^u$ car cette fonction n'est pas continue en $(0,0)$.
Pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie du fait de la discontinuité (difficulté d'utiliser la topologie faible*).
On note $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2}\log\sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t\log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.

Théorème (Leplaideur-Rios voir [LR08])

Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient : $\beta := \dfrac{-\log\lambda}{\log\sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{I} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a

$$\underline{I} = \frac{1}{2}\max(1, 2-\beta)\log\sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{I}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$.
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$, notée μ_t.
Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{I}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient :
$\beta := \dfrac{-\log\lambda}{\log\sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{I} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ *la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a*

$$\underline{I} = \frac{1}{2}\max(1, 2-\beta)\log\sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{I}$ *est une asymptote à la courbe de* $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ *en* $+\infty$.
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, *la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à* $-t\log J^u$, *notée* μ_t.
Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, *alors* μ_t *converge vers la mesure de Dirac* $\delta_{(0,0)}$ *lorsque t tend vers* $+\infty$.
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{I}$, *alors pour tout* $t > T$ *il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à* $-t\log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient : $\beta := \dfrac{-\log\lambda}{\log\sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{I} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a

$$\underline{I} = \frac{1}{2}\max(1, 2-\beta)\log\sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.

De plus la droite $-t\underline{I}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$. Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$, notée μ_t.

Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{I}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient : $\beta := \frac{-\log\lambda}{\log\sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{l} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a

$$\underline{l} = \frac{1}{2}\max(1, 2-\beta)\log\sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{l}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$.
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$, notée μ_t.
Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{l}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient : $\beta := \frac{-\log \lambda}{\log \sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{I} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a

$$\underline{I} = \frac{1}{2} \max(1, 2-\beta) \log \sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{I}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$.
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t \log J^u$, notée μ_t.
Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{I}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t \log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient : $\beta := \frac{-\log\lambda}{\log\sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{I} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a

$$\underline{I} = \frac{1}{2}\max(1, 2-\beta)\log\sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{I}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$.
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$, notée μ_t.
Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{I}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{I}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t\log J^u$.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient :
$\beta := \dfrac{-\log \lambda}{\log \sigma}$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep08])

Soit f comme précédemment. Soit $\underline{l} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ *la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a*

$$\underline{l} = \frac{1}{2} \max(1, 2-\beta) \log \sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.
De plus la droite $-t\underline{l}$ *est une asymptote à la courbe de* $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ *en* $+\infty$*.*
Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$*, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à* $-t \log J^u$*, notée* μ_t*.*
Si pour tout $t \geq 0$*,* $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$*, alors* μ_t *converge vers la mesure de Dirac* $\delta_{(0,0)}$ *lorsque t tend vers* $+\infty$*.*
S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{l}$*, alors pour tout* $t > T$ *il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à* $-t \log J^u$*.*

Mélange des deux approches. Difféomorphismes tripleA

Définition

Soit f dans $\mathrm{Diff}^2(M)$. On dit que f est Presque-Axiom-A s'il existe un ouvert U contenant un compact f-invariant $\Omega \subset U$ tel que :
(i) pour tout $x \in U$ il existe une décomposition Df-invariante de l'espace tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ avec $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ höldériennes (uniformément),
(ii) il existe 2 fonctions continues et positives $x \mapsto k^u(x)$et $x \mapsto k^s(x)$ telles que

$$\forall x \in U, \qquad \begin{array}{ll} \forall v \in E^s(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \leq e^{-k^s(x)}\|v\|_x \\ \forall v \in E^u(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \geq e^{k^u(x)}\|v\|_x, \end{array}$$

(iii) l'ensemble exceptionnel, $S = \{x \in U,\ k^u(x) = k^s(x) = 0\}$ vérifie $f(S) = S$ et, pour tout x dans $U \setminus S$, $k^u(x)$ et $k^s(x)$ sont strictement positives.

Un exemple de tel diffomorphisme est obtenu en prenant l'attracteur de Smale (solénoïde dans $\mathbb{T}^2$-plein) mais en faisant la construction de telle sorte qu'il existe des points fixes neutres (ou périodiques neutres).

Définition

Soit f dans $\mathrm{Diff}^2(M)$. On dit que f est Presque-Axiom-A s'il existe un ouvert U contenant un compact f-invariant $\Omega \subset U$ tel que :
(i) pour tout $x \in U$ il existe une décomposition Df-invariante de l'espace tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ avec $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ höldériennes (uniformément),
(ii) il existe 2 fonctions continues et positives $x \mapsto k^u(x)$et $x \mapsto k^s(x)$ telles que

$$\forall x \in U, \qquad \begin{array}{ll} \forall v \in E^s(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \leq e^{-k^s(x)}\|v\|_x \\ \forall v \in E^u(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \geq e^{k^u(x)}\|v\|_x, \end{array}$$

(iii) l'ensemble exceptionnel, $S = \{x \in U,\ k^u(x) = k^s(x) = 0\}$ vérifie $f(S) = S$ et, pour tout x dans $U \setminus S$, $k^u(x)$ et $k^s(x)$ sont strictement positives.

Un exemple de tel diffomorphisme est obtenu en prenant l'attracteur de Smale (solénoïde dans $\mathbb{T}^2$-plein) mais en faisant la construction de telle sorte qu'il existe des points fixes neutres (ou périodiques neutres).

Définition

Soit f *dans* $\mathrm{Diff}^2(M)$*. On dit que* f *est Presque-Axiom-A s'il existe un ouvert* U *contenant un compact* f*-invariant* $\Omega \subset U$ *tel que :*
(i) pour tout $x \in U$ *il existe une décomposition* Df*-invariante de l'espace tangent* $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ *avec* $x \mapsto E^u(x)$ *et* $x \mapsto E^s(x)$ *höldériennes (uniformément),*
(ii) il existe 2 fonctions continues et positives $x \mapsto k^u(x)$*et* $x \mapsto k^s(x)$ *telles que*

$$\forall x \in U, \qquad \begin{array}{ll} \forall v \in E^s(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \leq e^{-k^s(x)}\|v\|_x \\ \forall v \in E^u(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \geq e^{k^u(x)}\|v\|_x, \end{array}$$

(iii) l'ensemble exceptionnel, $S = \{x \in U,\ k^u(x) = k^s(x) = 0\}$ *vérifie* $f(S) = S$ *et, pour tout* x *dans* $U \setminus S$*,* $k^u(x)$ *et* $k^s(x)$ *sont strictement positives.*

Un exemple de tel diffomorphisme est obtenu en prenant l'attracteur de Smale (solénoïde dans $\mathbb{T}^2$-plein) mais en faisant la construction de telle sorte qu'il existe des points fixes neutres (ou périodiques neutres).

Définition

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

a/ *Un point* x *dans* Ω *est dit* λ*-hyperbolique si*

1. $\forall v \in E^u(x) \setminus \{0\}$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{-n}(x).v\| < -\lambda$;
2. $\forall v \in E^s(x) \setminus \{0\}$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{n}(x).v\| < -\lambda$.

b/ *Un ensemble* f*-invariant* Λ_λ *dont tous les points sont* λ*-hyperboliques est dit* λ*-hyperbolique.*

Définition

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

a/ *Un point* x *dans* Ω *est dit* λ*-hyperbolique si*

1. $\forall v \in E^u(x) \setminus \{0\}, \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{-n}(x).v\| < -\lambda$;
2. $\forall v \in E^s(x) \setminus \{0\}, \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{n}(x).v\| < -\lambda$.

b/ *Un ensemble* f*-invariant* Λ_λ *dont tous les points sont* λ*-hyperboliques est dit* λ*-hyperbolique.*

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.
Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.

Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.
Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.

Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.

Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.
Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Pour tout point λ-hyperbolique x on peut construire une variété instable $W^u(x)$ et une variété stable $W^s(x)$ telles que $T_xW^i(x) = E^i(x)$.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Pour tout point λ-hyperbolique x on peut construire une variété instable $W^u(x)$ et une variété stable $W^s(x)$ telles que $T_x W^i(x) = E^i(x)$.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

- *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
- *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x, \varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x,\varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x,\varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x, \varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x, \varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

Définition

Une mesure f-invariante est dite SRB si ses désintégrées instables sont absolument continues par rapport à la mesure Leb^u sur les feuilles instables.

Une mesure *SRB* et hyperbolique a son ensemble générique de mesure de Lebesgue pleine. C'est ce qui en fait leur intérêt.

Théorème (Leplaideur voir [Lep04])

Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x, \varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

G. D. Birkhoff.
Proof of the ergodic theorem.
Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 17 :656–660, 1931.

R. Bowen and B. Marcus.
Unique Ergodicity for Horocycle Foliations.
Israel Journal of Mathematics, 26(1) :43–67, 1977.

T. Bousch.
La condition de Walters.
Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 34 :287–311, 2001.

R. Bowen.
Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, volume 470 of *Lecture notes in Math.*
Springer-Verlag, 1975.

J.-R. Chazottes and R. Leplaideur.
Fluctuations of the *N*th return time for Axiom A diffeomorphisms.
Discrete Contin. Dyn. Syst., 13(2) :399–411, 2005.

G. Contreras, A. Lopes, and P. Thieullen.
Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle.
Ergod. Th. & Dynam. Sys., 21 :1–31, 2001.

N. T.A. Haydn.
Canonical product structure of equilibrium states.
Random and computational dynamics, 2(1) :79–96, 1994.

O. Jenkinson.
Rotation, entropy, and equilibrium states.
Trans. Amer. Math. Soc., 353 :3713–3739, 2001.

R. Leplaideur.
Local product structure for equilibrium states.
Trans. Amer. Math. Soc., 352(4) :1889–1912, 2000.

R. Leplaideur.
Existence of *SRB*-measures for some topologically hyperbolic diffeomorphisms.
Ergod. Th. & Dynam. Sys., 24, 2004.

R. Leplaideur.
A dynamical proof for the convergence of Gibbs measures at temperature zero.
Nonlinearity, 18(6) :2847–2880, 2005.

R. Leplaideur.
Construction of conformal and σ-finite measures for the stable holonomies.
2006.

R. Leplaideur.
Non-existence of measures which minimize the unstable lyapunov exponent for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes.
2008.

R. Leplaideur, K. Oliveira, and I. Rios.
Equilibrum states for partially hyperbolic horseshoes.
2008.

R. Leplaideur and I. Rios.

Invariant manifolds and equilibrium states for non-uniformly hyperbolic horseshoes.
Nonlinearity, 19(11) :2667–2694, 2006.

R. Leplaideur and I. Rios.
On the t-conformal measures and Hausdorff dimension for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes.
Accepted at ETDS, 2008.

R. Leplaideur and B. Saussol.
Large deviation for return times in non-rectangle sets for axiom a diffeomorphisms.
Discrete Contin. Dynam. Systems, 22(1& 2) :327–344, 2008.

A.O. Lopes and P. Thieullen.
Sub-actions for Anosov diffeomorphisms, volume 286-287 of *Astérisque*.
Soc. Math. France, 2003.

F. Ledrappier and L.-S. Young.

The metric entropy of diffeomorphisms Part I : Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula.
Annals of Mathematics, 122 :509–539, 1985.

V.I. Oseledec.
Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov Characteristics numbers for dynamical systemes.
Trans. Mosc. Math. Soc., 19 :197–221, 1968.

I. Rios.
Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes : hyperbolicity, fractal dimensions and persistent tangencies.
Nonlinearity, 14 :431–462, 2001.

K. Schmidt.
Infinite invariant measures on the circle.
In *Symposia Mathematica, Vol. XXI (Convegno sulle Misure su Gruppi e su Spazi Vettoriali, Convegno sui Gruppi e Anelli Ordinati, INDAM, Rome, 1975)*, pages 37–43. Academic Press, London, 1977.