Licence 1
Analyse

Université de Brest

Examen d'Analyse 1
Seconde session

Exercice 1

1/ Trouver les primitives de $x \mapsto \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$.
2/ Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt$.

Exercice 2
Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Calculer la différentielle de $(x, y) \mapsto f(x, y) = e^x \cos y + x^2 y \sin x$ en (x_0, y_0).

Exercice 4
On se propose d'étudier la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$.
1/ justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f' sur cet intervalle.
2/ Déterminer les nombres réels tels que $f(x) = 0$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, \ldots)$. Donner le signe de f.
3/ Prouver que pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4/ Déterminer les nombres réels $x > 0$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{-1}{x}$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(b_1, b_2, \ldots)$ et $(c_1, c_2, \ldots)$.
5/ Donner les positions relatives du graphe de f et des graphes des fonctions $H_+ : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $H_- : x \mapsto \frac{-1}{x}$. Comparer les tangentes aux points d'abscisses b_k et c_k pour les courbes qui s'intersectent.
6/ Étudier le signe de $x \mapsto \tan x - x$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et en déduire le signe de f' sur cet intervalle.
7/ Prouver que pour tout entier $k \geq 1$ il existe un unique élément x_k sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ tel que $\tan(x_k) = x_k$. Montrer que $x_k > k\pi$. En déduire le signe de f' sur $]0, x_1[$ puis sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$.
8/ Montrer que pour tout x positif, $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$. Montrer que f est prolongeante par continuité en 0 et qu'elle y est dérivable. Donner $f'(0)$.