Université de Brest
Laboratoire de mathématiques -UMR 6205
6, avenue Victor Le Gorgeu
29238 Brest cedex 3

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : **Mathématiques**

Document de Synthèse

Formalisme thermodynamique pour des systèmes dynamiques hyperboliques.

Mesures de Gibbs, mesures optimisantes.

présentée par
Renaud Leplaideur

Soutenue le 31 octobre 2008 à Brest, devant le jury composé de

Henk Bruin ....Reader in Mathematics, Université de Surrey, Angleterre
Pierre Collet ....Directeur de Recherches, CNRS-Polytechnique
Yves Derriennic ....Professeur, Université de Brest
Benoît Saussol ....Professeur, Université de Brest
Philippe Thieullen ....Professeur, Université de Bordeaux I

Table des matières

Remerciements

Au cours de ma petite carrière de mathématicien (plus si négligeable en ce qui concerne le nombre d'années) j'aurai rencontré beaucoup de personnes qui, par leurs actes ou leur propos et parfois à leur insu, m'auront encouragé et aidé à persévérer. Je souhaite ici les remercier :

Ainsi, Jérôme Buzzi, Pierre Collet et Mark Pollicott ont accepté de consacrer du temps pour être rapporteur de cette habilitation à diriger des recherches. Henk Bruin, Yves Derriennic, Benoît Saussol et Philippe Thieullen ont accepté d'être membre du jury. J'en suis très honoré et je les remercie vivement tous les sept.

Stéphane Ginouillac, Delphine Ruet et Jean-Christophe Léger ont accepté le dur travail de lire et corriger les différentes versions de ce document (et la tâche fut ardue). Je leur exprime toute ma gratitude.

Je souhaite également remercier mes co-auteurs (et d'une façon plus générale les collègues) auprès de qui j'aurai beaucoup appris tout en travaillant dans la bonne humeur.

Enfin, mes proches (famille, ami-e-s) m'auront permis de relativiser les périodes de doutes, de prendre du recul et au final d'apprendre à vivre avec les terribles oscillations inhérentes à tout processus de création. Merci.

Introduction

Je présente ici une synthèse de mes travaux de recherche. D'un point de vue technique, il s'agit essentiellement de montrer les résultats d'une méthode de construction de mesures de Gibbs appliquée à divers cadres de systèmes dynamiques hyperboliques.

L'aspect technique n'est cependant pas une fin en soi. Il découle d'une certaine idée intuitive des mesures invariantes dans le cadre hyperbolique.

Dans ce mémoire, nous appellerons système dynamique la donnée d'un ensemble compact métrique X et d'une application continue f de X dans X. L'orbite d'un point x est l'ensemble des itérées $f^n(x)$, avec n dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$ lorsque f est inversible. La théorie ergodique vise à donner des résultats sur les comportements statistiques des orbites. Pour ce faire, il est indispensable de trouver des mesures dites invariantes. Les mesures de Gibbs citées précédemment en sont un exemple.

L'idée sous-jacente à mes travaux de recherche est d'associer (ou d'essayer d'associer) à une mesure invariante un ensemble de points portant les (ou des) propriétés de la mesure vis à vis de la dynamique. Plus naïvement, il s'agirait de voir la mesure invariante comme un ensemble de grains de masse. Dans le cadre hyperbolique, ces grains de masse s'agencent en une structure locale produit, qui semble décorréler la direction stable et la direction instable. Il demeure cependant une certaine rigidité, et la connaissance de l'agencement local dans la direction instable redonne globalement la mesure. La méthode de construction met l'accent sur cette rigidité. En parallèle, j'étudie la façon dont cet agencement local change selon des paramètres du système.

J'applique cette méthode dans plusieurs cadres. Dans le cadre uniformément hyperbolique, les outils nécessaires et liés à la structure locale produit sont parfaitement bien définis. Dans le cadre non-uniformément hyperbolique, ils sont peu ou pas ou mal définis. Une part conséquente de mes travaux vise donc à les définir.

Dans le premier chapitre je rappelle quelques généralités sur les systèmes dynamiques et la théorie ergodique et donne une définition du cadre uniformément hyperbolique. Je rappelle la définition des mesures de Gibbs et explique les motivations pour les construire.

Dans le deuxième chapitre je présente la structure locale produit qui entraine une certaine décorrélation entre la direction stable et la direction instable. J'expose la méthode de construction des mesures de Gibbs, dans le cadre uniformément hyperbolique et explique où la rigidité intervient. La méthode est basée sur l'induction dans un ensemble qui a de bonnes propriétés.

Dans le troisème chapitre, toujours dans le cadre uniformément hyperbolique, je m'intéresse aux variations des mesures lorsque les paramètres changent, ainsi qu'à l'étude des propriétés des temps de retour successifs dans un ensemble. Comme la méthode de construction des mesures utilise l'induction, cette question se pose naturellement.

Dans un quatrième chapitre, je m'intéresse au cadre non-uniformément hyperbolique. J'introduis les notions d'hyperbolicités mesurée ou topologique. Je construis ou précise les objets nécessaires à l'application de la méthode, puis je l'applique dans ces 2 cadres.

Chapitre 1

Définitions et rappels

Dans ce chapitre je redonne des définitions techniques. Pour ma part, les meilleures références sont le livre de Katok et Hasselblatt [35] et le livre de Parry [60].

1.1 Théorème ergodique et systèmes conjugués

Soient X un espace compact métrique et f une application continue de X dans X. Toutes les mesures considérées ici seront des mesures boréliennes.

Définition 1.1.1. *Une mesure de probabilité μ est f-invariante (ou invariante par f) si pour tout borélien B, $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$.*

Une mesure de probabilité μ f-invariante est dite ergodique si les boréliens invariants ($B = f^{-1}(B)$) sont de mesure nulle ou pleine.

L'ensemble des mesures de probabilités f-invariantes sur X sera noté $\mathcal{X}_1(f)$.

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, je parlerai de mesures invariantes sans préciser la transformation. Par construction, l'ensemble $\mathcal{X}_1(f)$ est compact et convexe pour la topologie faible* ; les mesures extrémales sont les mesures ergodiques.

J'énonce maintenant le théorème ergodique, qui est l'un des théorèmes les plus importants de cette théorie. Il signifie que pour une observable continue ϕ, la moyenne temporelle (prise le long de l'orbite d'un point générique pour la mesure μ) est égale à la moyenne spatiale (pour la mesure μ) :

Théorème 1.1.1 (Birkhoff voir [14])**.** *Soit (X, f) un système dynamique. Si μ est une probabilité f-invariante et ergodique, alors pour toute fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, et pour μ-presque tout point x,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k(x) = \int \phi \, d\mu. \tag{1.1}$$

Dorénavant, si ϕ est une fonction continue de X dans $\mathbb{R}$, le terme $S_n(\phi)(x)$ désignera la somme de Birkhoff, $\phi(x) + \ldots \phi \circ f^{n-1}(x)$.

Si μ est une mesure ergodique, on note G_μ l'ensemble *des points génériques* pour la mesure μ. Cet ensemble est composé des points x tels que pour toute fonction continue ϕ, l'égalité (1.1) ait lieu. Comme l'ensemble X est un espace métrique compact, l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est séparable. Ceci permet de montrer qu'on a

$$\mu(G_\mu) = 1$$

et donc l'ensemble G_μ n'est pas vide.

Définition 1.1.2. *Un système (X, f) est dit transitif si pour tout couple d'ouverts U et V il existe un entier n tel que l'on ait $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Le système est dit mélangeant si pour tout couple d'ouverts U et V il existe un entier n tel que pour tout $m \geq n$ on ait $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Si (X, f) est un système dynamique, un point x est dit *errant* s'il existe un voisinage $U \ni x$ tel que pour tout entier n, on ait $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Un point qui n'est pas errant est dit *non-errant*. L'ensemble des points non-errants contient évidemment les points périodiques. Il est aussi facile de vérifier que l'ensemble des points non-errants contient nécessairement le support de toute mesure de probabilitié f-invariante.

Définition 1.1.3. *Soit (X, f) un système dynamique. Un réel $\varepsilon > 0$ est appelé constante d'expansivité si*

$$(\forall n,\ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon) \Longrightarrow x = y.$$

Un système dynamique (X, f) est dit expansif s'il existe une constante d'expansivité.

Enfin, je rappelle que deux systèmes dynamiques (X, f) et (Y, g) sont dits *topologiquement conjugués* s'il existe un homéomorphisme $h : X \to Y$ tel que

$$h \circ f = g \circ h.$$

Si l'application continue h est seulement surjective, on dit que le système (Y, g) est semi-conjugué au système (X, f).

1.2 Systèmes dynamiques uniformément hyperboliques

1.2.1 Les deux principaux types

Je présente ici les deux principaux types de systèmes dynamiques uniformément hyperboliques que j'utiliserai dans les chapitres suivants. Il s'agit des Axiom-A (ou systèmes uniformément hyperboliques géométriques) et des sous-shifts de type finis (ou systèmes uniformément hyperboliques symboliques).

Axiom-A

Soient M une variété riemannienne, compacte, lisse et de dimension finie et $f : M \mapsto M$ un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme.

Définition 1.2.1. *On dit que f est un Axiom-A s'il vérifie les hypothèses suivantes :*

(1) l'ensemble Ω des points non-errants est l'adhérence des points périodiques de f.

(2) Ω est hyperbolique, c'est à dire que pour tout x de Ω, il existe une décomposition de l'espace tangent T_xM telle que :

- *(a) $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;*
- *(b) $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ et $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$;*
- *(c) il existe un réel λ dans $]0, +\infty[$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait :*
  $\|Df_x^n(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\|$ *pour tout* $v \in E^s(x)$,
  $\|Df_x^{-n}(v)\| \leq e^{-n\lambda}\|v\|$ *pour tout* $v \in E^u(x)$;
- *(d) les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont continues ;*

(3) f restreinte à Ω est mélangeante.

L'hypothèse de mélange peut être omise. Toutefois, il existe une partition finie de Ω (voir [2]) telle que chaque élément Ω_i de cette partition (appelé ensemble basique) soit invariant par une itérée f^{n_i} de f. En outre, cette itérée f^{n_i} est mélangeante sur Ω_i.

Je rappelle que pour un Axiom-A, on définit les variétés stables et instables, globales et locales, associées à un point x de Ω de la manière suivante :

$W^s(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \to_{n\to+\infty} 0\}$;

$W^u(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to_{n\to+\infty} 0\}$;

$W^s_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$;

$W^u_\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \{y \in M \ / \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$.

Pour chaque x dans Ω, on a les 2 égalités

$$T_xW^u(x) = E^u(x) \text{ et } T_xW^s(x) = E^s(x).$$

Remarque 1. Les variétés stables et instables sont des variétés immergées qui ont un espace tangent en *chaque point* même en des points errants. Ceci définit donc de façon canonique les directions $E^u(x)$ ou $E^s(x)$ pour un point x errant s'il se trouve sur une variété instable ou stable d'un point non-errant. De plus, il existe un réel strictement positif ε tel que les propriétés de contraction énoncées au point 2-c de la définition 1.2.1 soient encore valides pour tout point errant qui est sur une variété $W^u_\varepsilon(y)$ ou $W^s_\varepsilon(y)$, où y est un point non-errant. On en déduit que si $y \in W^s(x)$, alors $f^n(y)$ se rapproche exponentiellement vite de $f^n(x)$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log d(f^n(x), f^n(y)) \leq -\lambda$. Ceci est aussi valable si $y \in W^u(x)$ en changeant $+\infty$ par $-\infty$.

Les variétés stables et instables locales constituent un *système de coordonnées canoniques locales* : pour ε suffisament petit il existe $\rho > 0$ tel que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ consiste en un singleton dès que l'on a $d(x, y) \leq \rho$. On note ce point $[x, y]$.
L'application $[\,.\,,\,.\,]$ définie sur $\{(x, y) \in \Omega \times \Omega : d(x, y) \leq \rho\}$ est continue et à valeurs dans Ω.

Par la suite on considérera une constante d'expansivité ε_0. Les variétés locales $W^s_{\varepsilon_0}(x)$ et $W^u_{\varepsilon_0}(x)$ sont alors notées respectivement $W^s_{loc}(x)$ et $W^u_{loc}(x)$. On supposera que ε_0 est suffisamment petit pour que l'application $[\,.\,,\,.\,]$ soit bien définie et pour que les contractions sur les variétés (in)stables locales décrites dans la remarque 1 aient lieu.

Sous-shift de type fini

Soit A une matrice à p lignes et p colonnes dont les coefficients sont soit 0 soit 1.

Définition 1.2.2. *Le sous-shift de type fini unilatère (resp. bilatère) sur un alphabet fini* $\{0, \ldots, p-1\}$ *associé à la matrice* A *est l'ensemble des suites* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(resp.* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*) telles que pour tout* n*,*

$$a_{x_n x_{n+1}} = 1.$$

Dorénavant on parlera de sous-shift de type fini sans préciser la matrice associée. Généralement les sous-shifts considérés seront bilatères ; la distinction entre les deux est cependant minime. D'un sous-shift bilatère on récupère trivialement un sous-shift unilatère par restriction. Inversement, étant donné un sous-shift unilatère, il existe un unique sous-shift bilatère dont la restriction (unilatère) coïncide avec le sous-shift unilatère donné.

La dynamique sur un sous-shift de type fini est celle du décalage σ : si $\underline{z} = (z_n)$, $\sigma(\underline{z})$ est la suite (z'_n) telle que pour tout n (dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ selon si le sous-shift est unilère ou bilatère)

$$z'_n = z_{n+1}.$$

Soit Σ un sous-shift de type fini bilatère et $\underline{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\underline{y} := (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux points de Σ. On définit

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2^n},$$

où n est le plus petit entier positif tel que l'on ait $x_n \neq y_n$ ou $x_{-n} \neq y_{-n}$.

Lemme 1.2.3. (Σ, d) *est un espace métrique compact et* $\frac{1}{2}$ *est une constante d'expansivité.*

Dans un sous-shift de type fini, les feuilles stables ou instables, globales ou locales, sont définies de la même façon que pour un Axiom-A. Ainsi, la feuille stable d'un point $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des points $\underline{y}$ tels qu'il existe un entier $n = n(x, y)$ vérifiant

$$\forall m \geq n \quad x_m = y_m.$$

Le point $\underline{y}$ est dans $W^s_{loc}(\underline{x})$ si $n(x, y) \leq 0$. Les feuilles instables se définissent en "regardant le passé".

Dans un sous-shift de type fini, le vocabulaire lexical est volontiers utilisé. Un point est un mot infini (unilatère ou bilatère). Un mot fini ou un *cylindre de taille* $n-1$, avec $n \geq 1$, est l'ensemble de mots dont toutes les lettres sont libres sauf n lettres consécutives qui elles sont fixées. On s'autorisera aussi à fixer un nombre infini de lettres.

Notation Dorénavant, un Axiom-A sera noté (M, f) ou (Ω, f) si on souhaite se retreindre à l'ensemble non-errant. Un sous-shift de type fini sera noté (Σ, σ).

Enfin je rappelle l'un des résultats essentiels : tout Axiom-A est semi-conjugué à un sous-shift de type fini mélangeant.

Théorème 1.2.1 (Bowen [17]). *Soit (M, f) un Axiom-A. Soit Λ l'ensemble des points non-errant. Il existe un sous-shift de type fini mélangeant, (Σ, s) et une surjection höldérienne $\Theta : \Sigma \to \Lambda$ tels que*

$$\Theta \circ \sigma = f \circ \Theta.$$

L'image par la projection du sous-shift sur Ω de tout cylindre de taille 1 est un *rectangle markovien*. Je reviendrai sur ce point dans la section 2.1.

1.2.2 Holonomies

Pour des systèmes uniformément hyperboliques, on peut définir les *holonomies stables*. Ce sont des projections qui vont d'une feuille instable locale vers une autre feuille instable locale. Par exemple, lorsque deux feuilles instables locales sont suffisament proches, la structure locale produit [;] permet de définir une application d'une feuille vers l'autre. Cependant, il n'y a pas un moyen canonique de passer d'une feuille à une autre comme le montre la figure 1.1 : pour tout point z de $W^u_{loc}(y)$, la feuille stable globale $W^s(z)$ intersecte la feuille instable locale $W^u_{loc}(x)$ une infinité de fois. Chaque intersection peut être l'image de z par une holonomie.

Ces holonomies joueront un rôle important dans la construction et les propriétés des mesures de Gibbs. Dans certain cas, elles ont une interprétation géométrique.

1.3 Formalisme thermodynamique et mesures de Gibbs

La meilleure référence semble être le livre de Bowen [17] pour cette partie. Les énoncés sont présentés ici dans le cadre Axiom-A mais sont également valables pour les sous-shifts de type finis.

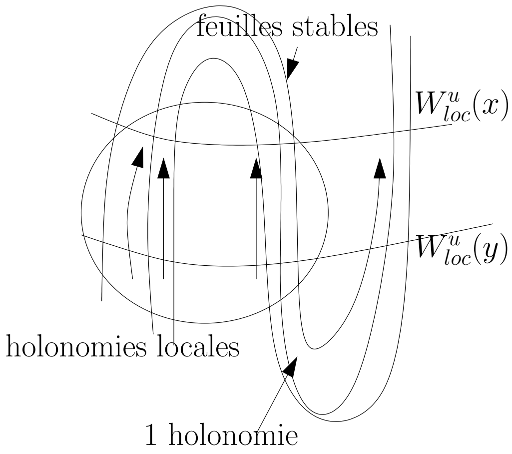

FIG. 1.1 – Quelques holonomies

1.3.1 Définitions

On considère un Axiom-A (M, f).

Définition 1.3.1. *Soit ϕ une fonction continue de M dans $\mathbb{R}$, qu'on appellera potentiel (ou aussi observable). La quantité $\sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi\, d\nu \right\}$ s'appelle la pression du système associée à ϕ. On la note $\mathcal{P}(\phi)$.*

Si μ est une mesure f-invariante, on appelle pression de μ associée à ϕ, ou tout simplement μ-pression lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la quantité

$$h_\mu(f) + \int \phi\, d\mu$$

On dit alors que la mesure μ est une mesure d'équilibre associée à ϕ si on a

$$h_\mu(f) + \int \phi\, d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi\, d\nu \right\}.$$

Je rappelle que $h_\mu(f)$ est l'entropie de la mesure μ. En physique statistique, le terme $h_\mu(f) + \int \phi\, d\mu$ correspond à l'énergie libre. Une mesure d'équilibre maximise donc cette quantité. Si le système a une constante d'expansivité (et une telle constante existe dans le cas Axiom-A), alors l'entropie métrique est semi-continue supérieurement (en fonction de la mesure). Ceci assure l'existence d'une mesure d'équilibre. En effet, considérons une suite (μ_n) de mesures telles que la quantité

$$h_{\mu_n}(f) + \int \phi\, d\mu_n$$

converge vers $\mathcal{P}(\phi)$. Soit μ un point d'accumulation de (μ_n) pour la topologie faible*. La semi-continuité supérieure donne

$$h_\mu(f) \geq \limsup_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(f),$$

et donc on obtient

$$\mathcal{P}(\phi) \geq h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu \geq \limsup_{n\to+\infty} h_{\mu_n}(f) + \lim_{n\to+\infty} \int \phi \, d\mu_n = \mathcal{P}(\phi).$$

Ainsi, μ est une mesure d'équilibre. On voit que l'hypothèse "ϕ continue" est essentielle pour que l'argument de limite pour la topologie faible* fonctionne.

Définition 1.3.2. *Soit ε un réel plus petit que la constante d'expansivité ε_0. Une mesure μ est dite mesure de Gibbs pour le potentiel ϕ s'il existe deux constantes $P(\phi)$ et $C_{\phi,\varepsilon}$ telles que, pour tout x on ait*

$$e^{-C_{\phi,\varepsilon}} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x)-nP(\phi)}} \leq e^{C_{\phi,\varepsilon}}, \tag{1.2}$$

où $B_n(x,\varepsilon)$ est la boule de Bowen, $\bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(B(f^k(x),\varepsilon))$.

Théorème 1.3.1 (voir [17]). *Soit (M,f) un Axiom-A. Soit ϕ un potentiel höldérien. Il existe une unique mesure d'équilibre pour (M,f) associée à ϕ. Cette mesure est également l'unique mesure de Gibbs μ_ϕ associée à ϕ, et le réel $P(\phi)$ est la pression $\mathcal{P}(\phi)$.*

Il faut bien séparer les notions de mesure d'équilibre et de mesure de Gibbs, même si dans le cas uniformément hyperbolique elles coïncident. En effet, ceci n'est pas nécessairement le cas pour d'autres systèmes. Pour voir l'intérêt des mesures de Gibbs dans le cadre Axiom-A, considérons une mesure ergodique μ et notons $\mathcal{P}_\mu(\phi)$ sa pression pour le potentiel ϕ. Le théorème de Brin-Katok (version topologique du théorème de Shannon McMillan Breiman, voir [52]) assure que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et pour μ-presque tout x on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mu(B_n(x,\varepsilon)) = h_\mu(f).$$

D'autre part, le théorème ergodique donne $\lim \frac{1}{n} S_n(\phi)(x) = \int \phi \, d\mu$, pour μ-presque tout x. On en déduit que pour μ-presque tout point x, pour tout $\eta > 0$ et pour tout n suffisamment grand on a :

$$e^{-n\eta} \leq \frac{\mu(B_n(x,\varepsilon))}{e^{S_n(\phi)(x)-n\mathcal{P}_\mu(\phi)}} \leq e^{n\eta}, \tag{1.3}$$

En rapprochant (1.2) et (1.3) il apparaît que les mesures des boules dynamiques de Bowen dans le cas des mesures de Gibbs sont plus précises que pour une mesure ergodique quelconque.

Remarque 2. Si un compact métrique invariant et mélangeant possède une mesure de Gibbs pour le potentiel ϕ, alors celle-ci est l'unique mesure d'équilibre sur le compact pour le potentiel ϕ.

Il est important de noter que dans le théorème 1.3.1, le potentiel ϕ est supposé höldérien alors que pour prouver l'existence d'une mesure d'équilibre, la continuité du potentiel est suffisante. L'hypothèse de régularité est nécessaire pour construire les mesures de Gibbs (en utilisant la théorie de l'opérateur de transfert). Cette hypothèse sur ϕ peut cependant être affaiblie.

L'hypothèse minimale dans la démonstration du théorème 1.3.1 est qu'il existe une constante C_ϕ telle que si x et y sont sur la même feuille stable locale $W^s_{loc}(x)$, alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\phi \circ f^n(x) - \phi \circ f^n(y)| \leq C_\phi,$$

et si z est sur $W^u_{loc}(x)$, alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\phi \circ f^{-n}(x) - \phi \circ f^{-n}(z)\right| \leq C_\phi.$$

Remarque 3. Du fait de la contraction exponentielle le long des feuilles stables (par itérations positives) et instables (par itérations négatives), si ϕ est höldérienne, alors elle vérifie cette hypothèse minimale. On dit qu'elle est à variations sommables le long des feuilletages.

1.3.2 Motivations pour construire les mesures de Gibbs

Si les mesures de Gibbs sont parfaitement bien définies et comprises dans le cadre uniformément hyperbolique, ce n'est pas le cas pour les systèmes non-uniformément hyperboliques. Je rappelle ici quelques propriétés liées à ces mesures qui justifient leur intérêt et ce qu'elles apportent à la compréhension du système sur lequel elles sont définies. En particulier, cela explique pourquoi on cherche à les construire pour les systèmes non-uniformément hyperboliques.

Le cadre est celui des systèmes uniformément hyperboliques présentés auparavant. Dès qu'il s'agit de propriétés géométriques le cadre est évidement celui des Axiom-A plutôt que celui des sous-shifts de type fini.

Trouver de "bonnes" mesures invariantes

L'ensemble des mesures de probabilités invariantes pour f, $\mathcal{M}_1(f)$, est un ensemble "trop gros". Il est en effet facile de construire des mesures invariantes : soit x un point de Ω. On note δ_x la masse de dirac en x. On pose ensuite

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k<n} \delta_{f^k(x)}.$$

Tout point d'accumulation pour la topologie faible* de la suite $(\mu_n)_n$ est un élément de $\mathcal{M}_1(f)$. Cependant, un tel point d'accumulation n'est pas nécessairement ergodique et donc ne satisfait pas à l'hypothèse du théorème ergodique.

Vouloir restreindre les études à de “bonnes mesures” est donc une démarche normale. Il n'existe pas de définition précise et unique de ce qu'est une bonne mesure. Les mesures ergodiques forment certainement le plus gros ensemble de ce qu'on pourrait appeler des bonnes mesures (et donc la classe minimale au sens des contraintes). Mais cet ensemble est encore trop gros pour être compris. On cherche donc à essayer de le structurer, donc à augmenter les contraintes. S'intéresser aux mesures de Gibbs est une façon d'augmenter ces contraintes, qui, de plus, coïncide avec des réalités physiques.

Enfin, puisque nous savons construire de telles mesures pour certains systèmes, il est naturel d'étudier si elles existent encore, pour des systèmes avec des hypothèses plus faibles (par exemple les systèmes non-uniformément hyperboliques). Cette question est d'ailleurs loin d'être simple.

Des mesures qui portent des informations

Pour certains potentiels, les mesures de Gibbs donnent des informations sur le système. Ainsi, pour $\phi \equiv 0$, la mesure de Gibbs est la mesure qui maximise l'entropie.

Soit J^u le jacobien instable, c'est à dire le jacobien de $Df_{|E^u}$. Pour $\phi \equiv -\log J^u$ et si $\mathcal{P}(\phi) = 0$, la mesure est dite mesure de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB en abrégé). Une telle mesure a des propriétés importantes. Pour les énoncer je dois d'abord introduire les notions de partitions mesurables et de mesures conditionnelles.

Définition 1.3.3. *Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de Lebesgue. Soient ξ une partition de X et m_ξ la mesure de probabilité projection de m sur l'espace quotient X/ξ. La partition ξ est dite mesurable si, modulo un ensemble négligeable pour m_ξ, l'espace quotient est séparé par un ensemble dénombrable d'ensembles m_ξ-mesurables.*

Théorème 1.3.2 (Rohlin voir [67] ou [59])**.** *Soient (X, T) un système dynamique, μ une mesure de probabilité T-invariante et $\xi := (\xi^i)_{i\in I}$ une partition mesurable.*

Alors il existe un système de mesures conditionelles $(\mu^i)_{i\in I}$ et une mesure μ_t tels que

(i) *chaque μ_i est une probabilité à support dans ξ_i,*

(ii) *la mesure μ_t est définie sur l'espace quotient X/ξ*

(iii) *pour tout borélien A, on a l'égalité $\mu(A) = \displaystyle\int \mu^i(A)\, d\mu_t$.*

Dans le cas d'un système dynamique hyperbolique, F. Ledrappier et J.M. Strelcyn (voir [38]) construisent des *partitions mesurables subordonnées aux feuilles instables* :

1. chaque ξ^u est un ouvert d'une feuille instable locale W^u_{loc},
2. pour presque tout x, $f(\xi^u(x))$ contient $\xi^u(f(x))$.

Ainsi, l'espace transverse s'apparante localement à une feuille stable locale. Par la suite, μ^u_x désignera la mesure conditionelle (on dit aussi *désintégrée*) sur $W^u_{loc}(x)$ et

μ_s désignera la mesure transverse. Le théorème 1.3.2 ressemble alors à un théorème de Fubini local (voir Figure 1.2) : pour intégrer $\mathbb{I}_A$ par rapport à μ, on l'intègre sur chaque feuille $W^u_{loc}(x)$ par rapport à la mesure μ^u_x et on intègre verticalement par rapport à la mesure μ_s.

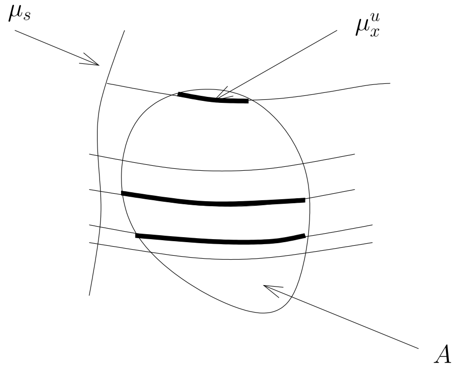

FIG. 1.2 – mesures conditionnelles

Définition 1.3.4. *Soit (M, f) un Axiom-A. Soit ξ^u une partition mesurable subordonnée au feuilletage instable. Pour x dans Ω on note Leb^u_x la mesure riemannienne sur $W^u(x)$. Soit μ une mesure f-invariante et (μ^u_x) son système de mesures conditionnelles associée à ξ^u. La mesure μ est dite SRB si pour μ-presque tout x, μ^u_x est absolument continue par rapport à Leb^u_x sur l'ouvert $\xi^u(x)$.*

Remarque 4. Avec une telle définition, la notion de mesure *SRB* s'étend automatiquement dès lors qu'on dispose des feuilles instables et de partitions mesurables subordonnées à ce feuilletage.

Ces mesures *SRB* ont attiré une attention particulière ces quinze dernières années car leur ensemble générique est de mesure de Lebesgue positive, c'est à dire qu'il peut être "physiquement" observé, même si la mesure est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Définition 1.3.5. *Une mesure f-invariante μ est dite mesure physique, s'il existe un ensemble de mesure de Lebesgue positive Λ tel que pour tout x dans Λ et pour toute fonction continue ϕ,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k(x) = \int \phi \, d\mu.$$

Une mesure *SRB* est donc une mesure physique.

Mesures d'équilibre et mesure maximisant une observable

L'étude de l'optimisation est devenue un domaine de recherche très actif en théorie ergodique différentiable depuis le début des années 2000. Il s'agit de trouver une ou des mesures qui maximise(nt) une observable. Étant donné $\phi : M \to \mathbb{R}$ continue, on pose

$$\underline{l} = \underline{l}(\phi) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(f)} \int \phi \, d\mu,$$

et on cherche une ou des mesures μ vérifiant $\displaystyle\int \phi \, d\mu = \underline{l}$. On dit qu'une telle mesure *maximise* ϕ.

Les mesures de Gibbs permettent de répondre, en partie, à ce problème. Par définition, la fonction pression $t \mapsto \mathcal{P}(t\phi)$ est convexe. Sa pente est donc croissante. On a trivialement, $\mathcal{P}(t\phi) \leq h_{top}(f) + t\underline{l}$, ce qui signifie que la pente de $t \mapsto \mathcal{P}(t\phi)$ est majorée par $\underline{l}$. Cette pente admet donc une limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Soient $0 < \varepsilon$ proche de 0 et, μ_ε, une mesure telle que l'on ait $\displaystyle\int \phi \, d\mu_\varepsilon > \underline{l} - \varepsilon$. Pour tout t, on a

$$\mathcal{P}(t\phi) \geq h_{\mu_\varepsilon}(f) + t \int \phi \, d\mu_\varepsilon \geq t(\underline{l} - \varepsilon).$$

Ainsi la pente de la pression converge vers $\underline{l}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Si de plus ϕ est supposée höldérienne, alors pour tout t, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $t\phi$. On a alors :

Lemme 1.3.6 (voir [26])**.** *Tout point d'accumulation pour la famille μ_t lorsque t tend vers $+\infty$ est une mesure qui maximise ϕ.*

Mesure d'équilibre et dimension instable

Lorsque la direction dilatante est de dimension 1, les mesures de Gibbs fournissent d'autres informations métriques[1] sur le système. On s'intéresse aux mesures d'équilibres pour la famille de potentiels $-t \log J^u$, $t \in \mathbb{R}$. Comme $\log J^u$ est uniformément minoré sur Ω par une constante strictement positive, la fonction continue $t \mapsto \mathcal{P}(t) := \mathcal{P}(-t \log J^u)$ est décroissante et tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Il existe donc une unique valeur δ^u de t qui annule la pression pour la famille de potentiels $-t \log J^u$. Cette valeur vérifie :

Théorème 1.3.3 (Mc Cluskey & Manning voir [55])**.** *Soit (M, f) un Axiom-A. Soit Ω l'ensemble des points non-errants. On suppose que le fibré E^u est de dimension 1. Alors, pour tout point x de Ω le réel δ^u est la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\Omega \cap W^u_{loc}(x)$.*

Remarque 5. Dans ce cas, la mesure est *SRB* si et seulement si $\delta^u = 1$.

---

[1] Ce terme prête parfois à confusion car on parle aussi d'entropie métrique. Il peut donc désigner des propriétés en rapport avec la mesure ou avec la distance. Ici il s'agit des propriétés liées à la distance.

Mesure de Gibbs et flot horocyclique

Comme cité précédemment, les mesures de Gibbs ont une propriété géométrique forte : j'explique ici comment l'agencement dans la direction instable entraîne l'agencement globalement.

Cette rigidité est liée à l'unique ergodicité du flot horocyclique. Dans le cas de la dimension 2 et, pour un flot Axiom-A sur une surface compacte, les holonomies stables correspondent au flot horocyclique. Un théorème de H. Furstenberg (voir [30]) stipule que ce flot horocyclique est uniquement ergodique. Dans notre cadre, l'unique ergodicité se manifeste de la façon suivante : prenons une partition mesurable subordonnée au feuilletage stable et équipons chaque atome de cette partition d'une mesure ν_x^u. L'ensemble (ν_x^u) des mesures ainsi obtenues sera appelé système de mesures transverses. On s'intéresse alors aux propriétés de quasi-invariance de ces mesures par les holonomies. Si ϕ est une fonction Höldérienne, et si h^s est une holonomie bi-mesurable de $W_{loc}^u(x)$ dans $W_{loc}^u(y)$, la quasi-invariance s'exprime par la relation

$$\frac{d\nu_y^u(h^s(\xi)}{d\nu_x^u(\xi)} = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\phi\circ f^k\circ h^s(\xi) - \phi\circ f^k(\xi)\right). \tag{1.4}$$

Le cas $\phi\equiv 0$ est celui de l'invariance.

Théorème 1.3.4 (Bowen & Marcus voir [18], Haydn voir [32])**.** *À une constante multiplicative près, il existe un unique système de mesures transverses $\{\nu^u\}$ vérifiant* (1.4) *et tel que pour chaque x, $\nu_x^u(W_{loc}^u(x))$ soit fini. Ce système est équivalent au système de mesures conditionelles $\{\mu_{\phi,x}^u\}$ associé à l'unique mesure de Gibbs μ_ϕ, c'est à dire, pour chaque x, les mesures ν_x^u et $\mu_{\phi,x}^u$ sont équivalentes sur l'atome $\xi^u(x)$.*

Dans [18], R. Bowen et B. Marcus ont montré le cas $\phi\equiv 0$. Le cas général a été démontré par N. Haydn dans [32]. Leurs preuves utilisaient fortement le codage donné par le théorème 1.2.1. J'en donnais une nouvelle preuve dans [41], comme application de la méthode de construction qui n'utilise pas la partition de Markov finie.

Mesures d'équilibre et grandes déviations

H. Comman dans [25] et A.O. Lopes dans [50] montrent que la densité des mesures de Gibbs et/ou des mesures d'équilibres parmi les mesures invariantes permet d'avoir beaucoup de résultats de grandes déviations.

L'étude des grandes déviations consiste à estimer la quantité de points qui ont un comportement atypique lors d'une convergence.

D'après le théorème ergodique, si μ est ergodique et si ϕ est une fonction continue, alors pour μ-presque tout point x on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}S_n(\phi)(x) = \int \phi\, d\mu.$$

Dans ce cadre, les grandes déviations consistent (par exemple) à regarder en fonction de η la distribution asymptotique (lorsque n tend vers $+\infty$) selon μ des points x tels que l'on ait

$$S_n(\phi)(x) - n \int \phi \, d\mu \sim n\eta.$$

Je reviendrai sur ce point à la section 3.2.

Chapitre 2

Structure locale produit et construction de mesures de Gibbs

Ce chapitre se réfère à l'article [41].

2.1 Méthode de construction

Elle apparaît dans ma thèse (voir [39]) et est publiée dans [41]. Je l'énonce ici dans un contexte uniformément hyperbolique mais l'objectif est de l'adapter au cadre non-uniformément hyperbolique (voir chapitre 4).

On considère un système uniformément hyperbolique, (Λ, f)

Définition 2.1.1. *Un ensemble fermé R est dit rectangle si pour tout x et pour tout y dans R, $W^u_{loc}(x) \cap W^s_{loc}(y)$ est un singleton noté $[x, y]$ qui est encore dans R.*
Le rectangle R est dit markovien si pour tout x dans $R \cap f^{-n}(R)$ avec $n > 0$ on a

$$W^u_{loc}(f^n(x)) \cap R \subset f^n(W^u(x) \cap R), \text{ et } f^n(W^s(x) \cap R) \subset W^s_{loc}(f^n(x)) \cap R.$$

Dans le cas uniformément hyperbolique, il existe une partition de l'ensemble en rectangles markoviens (voir théorème 1.2.1).

Pour un tel rectangle R, on fixe une feuille instable $F := W^u_{loc}(x_0) \cap R$. La structure "rectangle" permet de définir une projection de R sur F, en posant

$$\pi_F(y) := [x_0, y].$$

On définit sur R l'application premier retour dans R notée g, par

$$g(y) := f^{r(y)}(y) \text{ où } r(y) := \min\{n > 0,\ f^n(y) \in \mathbb{R}\}.$$

La composée $\pi_F \circ g$ sera notée g_F. Même si les 2 applications g et g_F ne sont pas définies partout (il existe des points qui ne reviennent jamais dans R), les branches

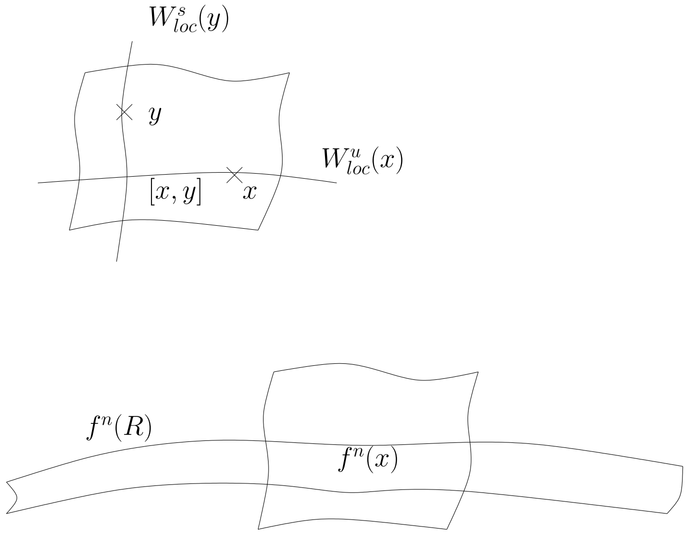

FIG. 2.1 – Rectangle markovien

inverses de g_F sont quant à elles parfaitement bien définies. En particulier tous les points de F ont une infinité dénombrable de préimages par g_F mais ils ont tous la “même infinité” : pour y_1 et y_2 dans F, si y_1' est une préimage de y_1 par g_F, alors il existe une unique préimage de y_2 par g_F, notée y_2', telle que pour tout $0 \leq n \leq r(y_1')$ on ait

$$d(f^n(y_1'), f^n(y_2')) \leq \varepsilon_0.$$

Pour y dans R, posons $r(y) = n$. L'hyperbolicité donne les inégalités suivantes :

$$|df^{-n}(f^n(y))_{|E^u}| \leq e^{-n\lambda^u}, \ |df^n(y)_{|E^s}| \leq e^{-n\lambda^s}; \tag{2.1}$$

ainsi l'application g_F de F dans F est une transformation dilatante avec une infinité de branches. L'opérateur de transfert se définit comme suit :

Définition 2.1.2. *Soient Z un réel, ϕ un potentiel höldérien défini sur M, y un point de F et $\mathcal{T}$ une application continue de F dans $\mathbb{R}$. Si y' une préimage de y pour l'application g_F, on pose $\omega(y') = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi \circ f^k(g(y')) - \phi \circ f^k(y)$.*

On appelle alors opérateur de transfert (parfois opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius) l'opérateur $\mathcal{L}_Z$ qui associe à $\mathcal{T}$ la fonction définie par :

$$\mathcal{L}_Z(\mathcal{T})(y) = \sum_{g_F(y')=y} e^{S_{r(y')}(\phi)(y') - r(y')Z + \omega(y')} \mathcal{T}(y').$$

Lorsqu'il converge (c'est ce que permet de contrôler le paramètre Z) cet opérateur préserve les fonctions continues. Comme R est fermé et markovien, l'opérateur adjoint agit sur les mesures. On utilise ensuite la théorie classique (voir [17] ou [6]) pour construire une mesure d'équilibre sur F pour le potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.) + \omega(.)$. Je qualifie cette mesure ν_Z d'équilibre local.

Plus précisément, le théorème de Schauder-Tychonov donne une mesure τ_Z telle que

$$\mathcal{L}_Z^*(\tau_Z) = \lambda_Z \tau_Z.$$

Par ailleurs, l'opérateur $\mathcal{L}_Z$ agit de façon quasi-compact sur un certain sous-espace des fonctions continues. Ce sous-espace est moralement équivalent à l'ensemble des fonctions höldériennes, même si la métrique est sensiblement différente et plus adaptée à la dynamique. Ainsi, le théorème de Ionescu-Tulcea & Marinescu montre que le réel λ_Z est le rayon spectral de $\mathcal{L}_Z$ et il existe une unique fonction φ_Z vérifiant

$$\int \varphi_Z d\tau_Z = 1 \text{ et } \mathcal{L}_Z(\varphi_Z) = \lambda_Z \varphi_Z.$$

La mesure ν_Z se définit par $d\nu_Z = \varphi_Z d\tau_Z$.

Remarque 6. La méthode nécessite juste l'existence d'un tel espace de Banach invariant sur lequel $\mathcal{L}_Z$ agit de façon quasi-compact. Le fait qu'ici il s'agisse des fonctions avec une régularité Hölder n'est pas primordial, même si cela rend les calculs plus faciles.

La rigidité annoncée en préambule ce manifeste ici : du fait de la contraction dans la direction stable, *l'extension naturelle* du système mesuré (F, g_F, ν_Z) est $(R, g, \widehat{\nu}_Z)$ (voir [39, 41]) et $\widehat{\nu}_Z$ est un équilibre local pour le potentiel $S_{r(.)}(\phi)(.) - Z.r(.)$. Enfin, pour Z assez grand, on peut *déplier la mesure* $\widehat{\nu}_Z$, c'est à dire, il existe une probabilité f-invariante m_Z telle que $\widehat{\nu}_Z$ soit la mesure conditionnelle $m_Z(.|R)$. On espère alors retrouver parmi ces mesures une/la mesure d'équilibre pour ϕ.

L'élégance de cette méthode, à mon avis, réside dans sa simplicité et sa puissance. Toute cette machinerie fonctionne en étudiant seulement un rayon de convergence d'une série entière et en situant le paramètre e^{-Z} à l'intérieur du disque de convergence.

Dans [24] je montre avec J.R. Chazottes que le paramètre critique Z_c est la pression du système troué pour le potentiel ϕ : *le système troué* est composé de l'ensemble des orbites qui ne rencontrent jamais R et Z_c est la pression de ce système dynamique pour le même potentiel ϕ. Cette pression est par définition inférieure à la pression du système global, $\mathcal{P}(\phi)$. Le point clé est de savoir si on a l'inégalité stricte $Z_c < \mathcal{P}(\phi)$. Il se trouve que cette propriété est équivalente à l'unicité de l'état d'équilibre pour ϕ (voir [19]). Si cette propriété est vérifiée, l'unique mesure d'équilibre μ_ϕ est la mesure $m_{\mathcal{P}(\phi)}$.

Le fait que la valeur du paramètre qui redonne la mesure d'équilibre soit $Z = \mathcal{P}(\phi)$ n'est pas un hasard. Une façon classique de construire la mesure μ_ϕ consiste à montrer que la suite de mesures

$$\mu_n := \frac{\sum_{x=f^n(x)} e^{S_n(\phi)(x)} \delta_x}{\sum_{x=f^n(x)} e^{S_n(\phi)(x)}}$$

converge vers μ_ϕ. Dans cette expression, tous les points périodiques de période n contribuent seulement en fonction de leur somme $S_n(\phi)$. L'opérateur pour l'induction, $\mathcal{L}_Z$, donne au point périodique x de période n une contribution en fonction de $S_n(\phi)(x) - a_n(x)\log\lambda_Z$, où $a_n(x)$ est le nombre de retours dans R entre les temps 0 et $n-1$. La pression locale, c'est à dire le logarithme du rayon spectal de l'opérateur $\mathcal{L}_{\mathcal{P}(\phi)}$, est nulle lorsque le paramètre vérifie $Z = \mathcal{P}(\phi)$. C'est donc la seule valeur qui permet de ne pas faire intervenir ces nombres de retours différents.

Remarque 7. A contrario, si le logarithme du rayon spectral tend vers $\pm\infty$, on donne une influence "infinie" aux différents retours. Ceci sera utilisé au chapitre 3.

Afin d'appliquer cette méthode à d'autres systèmes hyperboliques, en particulier aux systèmes non-uniformément hyperboliques, je résume ici les ingrédients nécessaires :

Trouver un rectangle fermé et markovien avec des temps de premier retour hyperboliques pour que les relations de l'équation (2.1) soient satisfaites.

2.2 Comparaison avec d'autres méthodes

Dans le cas des systèmes uniformément hyperboliques la méthode de Bowen (voir [17]) permet de construire des mesures de Gibbs. Cette méthode utilise fortement l'existence d'une partition finie en rectangles markoviens. Pour des systèmes non-uniformément hyperboliques cette propriété n'est plus nécessaiement vraie. Plusieurs voies ont été explorées pour construire, dans ce cadre, des mesures d'équilibre.

Je souhaite faire avant tout mettre en avant la similitude de ces méthodes. Il est remarquable qu'elles reposent toutes sur la même idée : itérer suffisament de fois l'application pour récupérer de l'hyperbolicité.

Les différences entre ces méthodes et la mienne reposent parfois sur le simple fait que les systèmes étudiés ne sont pas les même. Par ailleurs, ma méthode permet de construire des mesures d'équilibre pour une large gamme de potentiels et, de faire varier la température (voir sous-sous-section 1.3.2 et les sections 3.1 et 3.3). Ceci n'est pas le cas pour les autres méthodes présentées ici à part la dernière.

Tours de Young C'est une méthode due à L.S Young apparue environ en même temps que la mienne et de manière indépendante (voir [70]). Le système est remplacé par un ensemble de tours au dessus de la base. L'idée clé est de s'affranchir de la structure "rectangle markovien" de cette base en considérant un temps de retour qui n'est pas nécessairement le premier. Cette idée était réellement une nouveauté à l'époque. Ne pas considérer le premier retour dans la base des tours, permet de prendre pour base à peu près tout sous-ensemble raisonnable. "La" mesure invariante est d'abord construite pour ce système de tours et, moyennant l'hypothèse d'intégrabilité du temps de retour, elle permet d'en construire une autre sur le système initial. En théorie la méthode s'applique pour des potentiels généraux si on arrive à construire une mesure sur la tour conforme pour le potentiel (voir [71]). En pratique, la méthode est essentiellement utilisée pour construire des mesures SRB (donc pour le potentiel $\phi \equiv -\log J^u$). Elle s'applique pour les attracteurs Axiom-A, les applications hyperboliques par morceaux, les billards avec des obstacles convexes, les applications unimodales et les attracteurs de Hénon. C'est donc une méthode très puissante.

La méthode de Young est moins utilisée pour des potentiels plus généraux car elle ne permet pas de construire les mesures conformes pour le potentiel. Lorsque le potentiel vaut $-\log J^u$, les mesures conformes sont les mesures de Lebesgue instables Leb^u qui nous sont données par la structure riemannienne des variétés instables. Pour d'autres potentiels elles sont inconnues et *a priori* singulières par rapport à Leb^u. Dans ma méthode c'est ici que l'adjoint de l'opérateur de transfert joue un rôle. Les hypothèses du rectangle fermé et markovien interviennent aussi à ce niveau (comme je l'ai déjà signalé précédemment).

Méthodes avec schémas induits Récemment et pour des systèmes uni-dimensionnels et non-uniformément hyperboliques, plusieurs travaux de H. Bruin& M. Todd (voir [21]) ou Y. Pesin & S. Senti (voir [63]) utilisent des méthodes similaires d'induction. Tout comme la méthode des tours de Young, ces techniques ne considèrent pas nécessairement le premier temps de retour dans l'ensemble.

Elles utilisent fortement le caractère uni-dimensionnel du système, qui simplifie la géométrie. Inversement elles permettent d'étudier des classes de systèmes très complexes comme les application multimodales de l'intervalle.

Les potentiels étudiés sont du type $-t\log|f'|$ avec t dans un intervalle borné ; une fois encore c'est le caractère géométrique de $-\log|f'|$ qui est utilisé.

Méthode de Oliveira Dans [56], K. Oliveira introduit une nouvelle méthode. Elle concerne les endomorphismes non-uniformément dilatants qui admettent une partition de Markov finie (ce qui est déjà une différence avec les autres méthodes). Sur certaines pièces de la partition l'application est uniformément dilatante, sur d'autres elle peut contracter mais modérément. La méthode donne une mesure d'équilibre pour des potentiels avec des “petites” variations. La mesure obtenue n'est pas une mesure de Gibbs mais seulement une mesure de Gibbs non lacunaire : l'encadrement (1.2) n'est valable que pour une suite non-lacunaire (*ie* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$) d'entiers u_n.

Le potentiel ϕ étudié doit être à variation globale faible : la quantité

$$\max\phi - \min\phi$$

doit être bornée par une constante K qui dépend du système. Cela interdit en particulier d'étudier les potentiels du type $t.\phi$ et de faire tendre t vers $+\infty$.

Méthode sans décorrélation stable-instable V. Baladi, S. Gouëzel, C. Liverani et M. Tsujii utilisent une méthode de construction des mesures de Gibbs qui ne nécessite pas de projeter dans la direction instable. Elle n'utilise pas non plus l'induction. L'opérateur de transfert agit sur un espace $\mathcal{B}$ de distributions. Un élément ϕ de $\mathcal{B}$ est une fonction régulière (voire $\mathcal{C}^\infty$) sur la grassmannienne des sous-espaces de dimension d^s du fibrés tangent TM. C'est-à-dire pour un point x de M et pour un sous-espace de dimension d^s dans T_xM, $E(x)$, on sait définir $\phi(x, E(x)) \in \mathbb{R}$.

La méthode est très sophistiquée et nécessite de travailler avec des feuilletages "admissibles". Définie dans le cadre uniformément hyperbolique elle s'étend au cas des billards ou des applications lisses par morceaux. Je renvoie le lecteur aux articles [31], [8] et [7].

Il n'y a apparemment pas d'obstruction à considérer des potentiels en $t\phi$ et de faire tendre t vers $+\infty$. Il serait d'ailleurs intéressant de voir si cette méthode permet de (re)trouver la convergence des mesures de Gibbs à température 0 (voit section 3.1).

2.3 Structure locale produit et décorrélation stable-instable

Considérons un Axiom-A (M, f) et une mesure ergodique μ. Du fait de la convergence exponentielle le long des feuilles stables, l'ensemble générique G_μ est fibré par ces feuilles stables.

Théorème 2.3.1 (Manning voir [54])**.** *Soit M une variété riemannienne compact et lisse de dimension 2. Soient f un Axiom-A sur M et μ une mesure de probabilité f-invariante et ergodique. Soient G_μ son ensemble générique, $h_\mu(f)$ son entropie et $\lambda^u_\mu := \int \log |Df_{|E^u}| d\mu$ son exposant de Lyapunov instable.*

Alors pour tout x de l'ensemble non-errant Ω, la dimension de Hausdorff de $G_\mu \cap W^u_{loc}(x)$ est le réel δ^u défini par l'égalité

$$h_\mu(f) = \lambda^u_\mu.\delta^u. \tag{2.2}$$

Ce théorème stipule qu'un objet lié à la mesure μ a une propriété métrique (sa dimension de Hausdorff) reliée à la dynamique.

À ma connaissance, ce théorème n'a jamais vraiment été étendu, ni au cas de la dimension supérieure, ni au cas des systèmes non-uniformément hyperboliques. Le résultat qui s'en rapproche le plus est dû à F. Ledrappier & L.S. Young ([36, 37]) dans le cadre général de la théorie de Pesin (voir plus loin).

Théorème 2.3.2 (Ledrappier-Young voir [36])**.** *Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure* hyperbolique *(voir définition 4.1.1). Alors on a*

$$h_\mu(f) = \sum \delta_{\mu,i}\lambda^+_{\mu,i}, \tag{2.3}$$

où $\lambda_{\mu,i}$ est le i-ème exposant de Lyapunov, et $\lambda^+ := \max(\lambda, 0)$.

Dans cette formule, seul le $\delta_{\mu,1}$ associé au plus grand exposant de Lyapunov représente une dimension. Les autres $\delta_{\mu,i}$ sont analogues à une dimension de Hausdorff, mais sont en fait des différences de dimensions.

Dans le cas d'un Axiom-A et si la direction instable est de dimension 1 le théorème 2.3.2 équivaut au théorème 2.3.1. Plus généralement, si tous les exposants de Lyapunov strictement positifs sont égaux, alors le théorème 2.3.2 étend le théorème 2.3.1. Mais dès lors qu'il y a plusieurs exposants de Lyapunov strictement positifs, les dimensions intermédiaires $\delta_{\mu,i}$ ne sont pas identifiées à des dimensions de Hausdorff d'ensembles dynamiques.

Ces deux résultats montrent une certaine décorrélation entre la direction stable et la direction instable. Le désordre généré par f ne se voit que dans la direction instable, et le désordre généré par f^{-1} ne se voit que dans la direction stable. Cette décorrélation semble induire une structure produit, corroborée par la formule de la dimension. Celle-ci a été établie par F. Ledrappier & L.S. Young ([36, 37]) qui montrent une inégalité et L. Barreira & Y. Pesin & J. Schmeling [10, 11] qui montrent l'autre inégalité :

Théorème 2.3.3 (Ledrappier-Young et Barreira-Pesin-Schmeling). *Soient M une variété riemannienne compacte lisse et de dimension finie, f un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme et μ une mesure hyperbolique. On note $\delta_{\mu,i,u}$ les réels qui apparaissent dans le théorème 2.3.2 et $\delta_{\mu,j,s}$ ceux qui apparaissent lorsqu'on applique le théorème 2.3.2 à f^{-1}. On pose*

$$\delta^u_\mu = \sum_i \delta_{\mu,i,u} \text{ et } \delta^s_\mu = \sum_j \delta_{\mu,j,s}.$$

Alors pour μ-presque tout x, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\mu(B(x,\varepsilon)))}{\log(\varepsilon)} = \delta^u_\mu + \delta^s_\mu$.

Dans le cadre Axiom-A, et pour les mesures de Gibbs, on a un résultat plus fin :

Théorème 2.3.4 (Leplaideur voir [41]). *Soient (M, f) un Axiom-A, ϕ une fonction höldérienne de M dans $\mathbb{R}$ et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée à ϕ. Soit x un point de l'ensemble non-errant Ω. Soient R un rectangle markovien contenant x et $\mu^u_{\phi,x}$ et $\mu^s_{\phi,x}$ les mesures désintégrées de μ_ϕ respectivement sur $W^u_{loc}(x) \cap R$ et $W^s_{loc}(x) \cap R$.*

Alors sur R les deux mesures μ_ϕ et $\mu^u_{\phi,x} \otimes \mu^s_{\phi,x}$ sont équivalentes.

Chapitre 3

Applications au cas uniformément hyperbolique

Ce chapitre se réfère aux articles [24], [43], [44] et [49].

3.1 Mesures maximisantes

Dans cette section je m'intéresse aux mesures maximisantes dans le cadre d'un sous-shift de type fini. Soit ϕ une fonction localement constante. Pour β dans $\mathbb{R}$, on note μ_β l'unique mesure de Gibbs associée à $\beta\phi$.

Dans [20], J. Brémont montre que les mesures μ_β convergent lorsque β tend vers $+\infty$ vers une mesure μ qui est une mesure maximisante pour ϕ. Le point nouveau dans ce résultat est la convergence des mesures car tout point d'accumulation doit être une mesure maximisante (voir précédemment).

La preuve de Brémont est très courte mais présente trois inconvénients. Elle n'est pas dynamique (et un peu opaque), elle ne s'adapte pas à l'étude de la convergence d'autres mesures de Gibbs et ne dit pas quelle est la mesure limite.

En reprenant les notations de la section 2.1, la mesure de Gibbs μ_β est la mesure $m_{\mathcal{P}(\beta\phi)}$. C'est à partir de cette observation et en étudiant l'opérateur $\mathcal{L}_Z$ que j'ai démontré :

Théorème 3.1.1 (Leplaideur, [43]). *Soient (Σ, σ) un sous-shift de type fini mélangeant, ψ une application Hölder, ϕ une application localement constante et $\mu_{\psi+\beta\phi}$ l'unique mesure de Gibbs associée à $\psi + \beta\phi$.*

Alors la famille de mesure $\mu_{\psi+\beta\phi}$ converge lorsque β tend vers $+\infty$ vers une mesure μ. De plus, celle-ci vérifie

1. $\displaystyle\int \phi\, d\mu = \max_{\mathcal{M}_1(\sigma)} \int \phi\, d\nu.$
2. *μ est une mesure de pression maximale pour ψ parmi les mesures maximisantes pour ϕ.*

La preuve est plus longue que celle de J. Brémont et assez technique. Elle n'utilise cependant que les outils dynamiques usuels et en particulier l'opérateur $\mathcal{L}_Z$ (pour un bon potentiel). Il faut noter que dans ce cas la technique de J. Brémont ne s'applique pas du fait de la présence du potentiel supplémentaire ψ. Ce potentiel sera d'ailleurs utilisé ultérieurement.

Proposition 3.1.1 (voir [26, 51, 16, 34])**.** *Soient (X,T) un système dynamique uniformément hyperbolique (sous-shift de type fini ou Axiom-A) et $\varphi : X \to T$ une fonction höldérienne. Alors il existe un compact T-invariant $\mathbb{K}_\varphi$ tel que μ est maximisante pour φ si et seulement si supp $\mu \subset \mathbb{K}_\varphi$*

Dans notre cas, la fonction ϕ est localement constante et le compact $\mathbb{K}_\phi$ est un sous-shift de type fini. Ce sous-shift possède *a priori* plusieurs composantes irréductibles. La question se pose donc de savoir quelles sont les composantes qui sont de μ-mesure strictement positive et comment et pourquoi la masse se répartit entre ces composantes. Contrairement à la preuve de J. Brémont, ma preuve permet de répondre à cette question.

Il y a une façon duale de voir la question : quelles sont les composantes irréductibles de $\mathbb{K}_\phi$ qui peuvent être atteintes comme limite de mesures de Gibbs et pourquoi d'autres ne le sont pas.

À ψ fixée, le théorème 3.1.1 précise donc quelle est la mesure limite. Il montre que toutes les composantes de pression maximale pour ψ ne se comportent pas toutes de façon identique : seules les composantes les plus "éloignées" des autres récoltent de la masse à la limite.

Je vais sur un exemple simple expliquer ce qu'"éloignée" signifie. Considérons le sous-shift donné par la figure 3.1 et la fonction $\phi := \mathbb{1}_{\boxed{1}} + \mathbb{1}_{\boxed{3}}$.

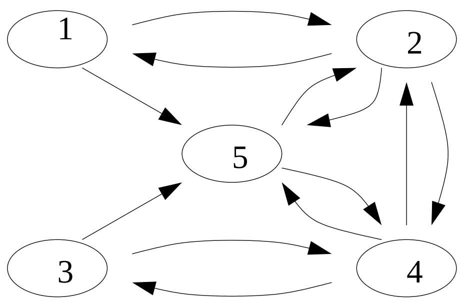

FIG. 3.1 – Un exemple de $\mathbb{K}_\phi$

L'ensemble $\mathbb{K}_\phi$ est l'union des deux orbites périodiques $\ldots 121212 \ldots$ et $\ldots 343434 \ldots$. La valeur maximal de $\int \phi \, d\mu$ vaut $\frac{1}{2}$ et est obtenue par les mesures $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{1}} + \delta_{\boxed{2}})$ et $\frac{1}{2}(\delta_{\boxed{3}} + \delta_{\boxed{4}})$. L'éloignement mesure le "coût" pour qu'une orbite quitte une composante maximisante en rejoigne une autre puis revient dans la première. Par exemple l'orbite ... 43434352121212154343 43 ... quitte la composante ... 343434 ... et rejoint la composante ... 121212 ... puis revient dans la composante ... 343434 .... Elle emprunte un chemin donné par l'orbite périodique obtenue par la répétition du mot 352154. L'intégrale de ϕ pour la mesure invariante de support cette orbite périodique vaut $\frac{2}{6}$. Le coût de cette transition entre les deux composantes irréductibles est $\frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. Le coût global de transition entre les deux composantes irréductibles consiste à prendre le minimum des coût de transitions des orbites périodiques qui joignent les deux composantes.

Dans le cas général, le coût de transition entre deux composantes irréductibles se calcul de façon plus compliquée mais quantifie la meilleure manière de relier les deux composantes. L'*éloignement d'une composante* est alors le plus petit coût de transition de cette composante vers n'importe quelle autre composante. Le théorème 3.1.1 précise donc quelles sont les composantes maximisantes irréductibles qui ont de la masse pour μ : on sélectionne les composantes de pression maximale pour ψ. Parmi celles-ci, ce sont celles qui ont le plus grand éloignement qui récoltent la masse à l'infini. Dans cette étape le potentiel ψ n'intervient pas. Pour connaître la répartition entre ces composantes, le potentiel ψ intervient à nouveau.

Si on reprend l'idée naïve de mesures vues comme grains de masse, l'agencement de ces grains change en fonction du paramètre β. En mécanique statistique β est l'inverse de la témpérature et, faire tendre β vers $+\infty$, signifie faire décroître la température vers 0. Physiquement, on observe l'apparition d'amas. Ces amas sont les composantes qui récoltent la masse. Par ailleurs, le support de $\mu_{\psi+\beta\phi}$ reste Σ tout entier, pour chaque β. C'est à mon avis un des endroits où la vision “mesure=grains de masse” est significative : lorsque β varie, l'agencement se modifie et ce n'est qu'à la limite que les amas se détachent.

Afin d'illustrer où l'opérateur de transfert intervient, j'explique dans le cas simple de $\phi = \mathbb{1}_R$ (où R est un rectangle) comment ces amas se voient dans l'opérateur. Un calcul simple montre que la mesure m_Z est l'unique mesure d'équilibre pour le potentiel $\phi - \log\lambda_Z \mathbb{1}_R$ (je rappelle que λ_Z est le rayon spectral de $\mathcal{L}_Z$ et aussi la pression de ν_Z). Lorsque Z tend vers $+\infty$ λ_Z tend vers 0 et donc $-\log\lambda_Z$ tend vers $+\infty$. On est donc bien dans le cas décrit, avec un paramètre $-\log\lambda_Z$ au lieu de β.

Je ré-écris ici l'expression de l'opérateur de transfert renormalisé

$$\frac{1}{\lambda_Z}\mathcal{L}_Z(\mathbb{1}_F)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{y,\ g_F(y)=x,\ r(y)=n} e^{S_n(\psi)(y)}\right) e^{-nZ-\log\lambda_Z}.$$

Lorsque Z tend vers $+\infty$, les préimages de x pour g_F avec un long temps de retour ont une contribution relative dans l'opérateur de transfert qui diminue. En d'autres termes, la contribution des points à petit temps de retour est renforcée. À la limite, seuls les points qui reviennent le plus vite possible dans R ont une influence dans l'opérateur. En termes de mesures portées par ces points, le lemme de Kač montre que ces mesures maximisent la valeur de $\mathbb{1}_R$.

3.2 Principe des grandes déviations pour les temps de premier retour

À plusieurs reprises, nous avons vu l'importance des temps de premier retour dans le rectangle R pour la famille à un paramètre d'opérateurs $\mathcal{L}_Z$. Pour l'opérateur itéré $\mathcal{L}_Z^n$ ce sont les temps de $n^{ième}$ retour qui apparaissent. Cela amène naturellement à l'étude des fluctuations des moyennes de ces temps de retour. Par la suite, je montre comment l'inégalité stricte $Z_c < \mathcal{P}(\phi)$ permet d'avoir le principe de grandes déviations et la théorème de la limite centrée.

3.2.1 Définition, originalité et motivations

On considère un système dynamique uniformément hyperbolique (M, f) et une mesure f-invariante μ. Soit A un ensemble de μ-mesure strictement positive. Il s'agit de donner une estimation de la mesure des points x pour lesquels le n-ième temps de retour dans un ensemble A, $r_A^n(x)$, est loin de sa valeur moyenne asymptotique $\dfrac{n}{\mu(A)}$. Cela consiste à trouver une fonction de taux Φ_A telle que pour tout $u > \frac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \geq u \right\} = \Phi_A(u)$$

et pour tout $0 \leq u < \dfrac{1}{\mu(A)}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu \left\{ \frac{r_A^n}{n} \leq u \right\} = \Phi_A(u).$$

Lorsqu'une telle fonction existe, on dit que la suite des temps de retour dans l'ensemble A vérifie le principe de grandes déviations. Dans un cas plus restrictif, si une telle fonction existe mais si les inégalités sont uniquement valables pour u dans un intervalle $]\underline{u}, \overline{u}[$ où $\underline{u} < \frac{1}{\mu(A)} < \overline{u}$, on dit que la suite des temps de retour vérifie le principe des grandes déviations près de la moyenne.

Un résultat de grandes déviations donne un contrôle exponentiel de la mesure des points dont le n-ième temps de retour est éloigné de la moyenne en $n\varepsilon$: avec une fonction de taux, la première des inégalités permet d'avoir

$$\mu \left\{ x,\ r_A^n(x) - n\frac{1}{\mu(A)} > n\varepsilon \right\} \approx e^{n\Phi_A(\frac{1}{\mu(A)}+\varepsilon)}.$$

À ma connaissance, les résultats sur les temps de retour portent généralement sur l'étude de suites de temps de retour lorsque l'ensemble "cible" diminue. Je renvoie par exemple aux travaux de B. Saussol (voir entre autres [12]).

L'étude des grandes déviations pour les n-ièmes temps de retour dans un ensemble fixé pourrait aussi se faire par la technique puissante des grandes déviations Niveau 2. Il suffit de remarquer qu'on a l'équivalence

$$r_A^n(x) > nu \iff S_{r_A^n(x)}(\mathbb{1}_A(x)) < \frac{r_A^n(x)}{u}.$$

Hélas je trouve que les énoncés de ce principe de grandes déviations (voir par exemple la thèse de J.B. Bardet [9]) sont souvent dans des termes assez éloignés de ceux généralement utilisés en systèmes dynamiques hyperboliques et donc difficiles à maîtriser et à utiliser. De plus, ce principe niveau 2 porte sur les mesures et cache la dynamique des orbites.

Empiriquement, les chercheurs en physique statistique utilisent le n-ième temps de retour pour estimer les mesures. Le résultat de grandes déviations permet de quantifier la probabilité d'erreur lorsqu'on remplace la mesure par $\frac{n}{r_A^n(x)}$. C'est là la première motivation dans la recherche de tels résultats.

De plus, lorsqu'on a une convergence en moyenne, il est assez naturel d'essayer de voir les écarts à la moyenne, c'est à dire d'avoir des théorèmes type grandes déviations ou limite centrée.

Enfin, une autre motivation, plus longue à exposer, sera présentée dans la sous-section 3.2.3

3.2.2 Thérorèmes de grandes déviations

On sait qu'une condition suffisante pour obtenir une fonction de taux est de trouver un $\alpha_0 > 0$ tel que sur $]-\infty, \alpha_0[$, l'application

$$\Psi : \alpha \mapsto \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{\alpha r_A^n(x)} d\mu_\phi(x)$$

existe, soit de classe $\mathcal{C}^1$ et tende vers $+\infty$ en α_0.

Proposition 3.2.1. *Si (Ω, f) est un Axiom-A et A une union finie de rectangles, alors $\Psi(\alpha)$ est la pression locale sur A associée au potentiel $S_{r_A(.)}(\phi)(.) - \alpha.r_A(.)$ pour l'application premier retour dans A. Posons $\alpha_0 := \mathcal{P}(\phi) - Z_c$.*

Alors, la fonction $\Psi : \alpha \mapsto \Psi(\alpha)$ est analytique réelle sur $]-\infty, \alpha_0[$ et tend vers $+\infty$ en α_0.

Dans un premier temps j'ai démontré avec Jean-René Chazottes le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Chazottes-Leplaideur voir [24])**.** *Si (Ω, f) est un Axiom-A et A est une union finie de rectangles, les temps de retour dans A suivent un principe de grandes déviations pour toute mesure de Gibbs.*

La démonstration repose sur la proposition 3.2.1. Nous montrons même que la fonction Ψ est définie et analytique dans un voisinage complexe de $]-\infty, \alpha_0[$. Ceci nous permet d'utiliser un théorème de W. Bryc (voir [22]) pour obtenir un théorème de limite centrée :

Théorème 3.2.2 (Chazottes-leplaideur voir [24])**.** *Soient (Ω, f) un Axiom-A et A une union finie de rectangles. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée. Soit $\mu_{\phi,A}$ la mesure conditionelle $\mu_\phi(. \cap A)/\mu_\phi(A)$. Alors, avec les notations précédentes, on a*

$$\sigma_A^2 := \Psi''(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \left(r_A^n - \frac{n}{\mu_\phi(A)} \right)^2 d\mu_{\phi,A} \in]0, +\infty[, \tag{3.1}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\phi,A} \left\{ \frac{r_A^n - n/\mu_\phi(A)}{\sigma_A \sqrt{n}} \leq t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi. \tag{3.2}$$

Le théorème de W. Bryc utilise la stricte convexité et la convergence ainsi que l'analyticité dans un voisinage complexe de la fonction Ψ. Ce résultat est remarquable car il n'existe en général pas de moyen de déduire un théorème de la limite centrée à partie des grandes déviations, avec comme seule hypothèse la régularité $\mathcal{D}^2$ de la fonction Ψ à l'origine ou sa $\mathbb{R}$-analyticité s'il n'y a pas convergence dans un domaine complexe (voir un contre-exemple dans [22]).

La question essentielle était ensuite de voir si on pouvait étendre le théorème 3.2.1 pour des ensembles plus compliqués. Benoît Saussol et moi-même avons alors démontré :

Théorème 3.2.3 ([49])**.** *Soit (Ω, f) un Axiom-A et A un borélien de bord ∂A. Soient ϕ un potentiel höldérien et μ_ϕ la mesure de Gibbs associée.*

Si ∂A est de mesure nulle pour toute mesure f-invariante, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations pour μ_ϕ.

Si le bord ∂A est de pression pour ϕ strictement plus petite que la pression topologique, alors les temps de retours dans A vérifient le principe de grandes déviations près de la moyenne.

Dans le cas du théorème 3.2.1, une union de rectangle a une structure locale produit et donc la technique d'induction s'applique directement. Dans le cas du théorème 3.2.3, l'idée consiste évidemment à approcher le borélien par des unions de rectangles. On espère alors trouver une fonction Ψ comme limite des fonctions associées aux unions qui approximent. Nous sommes parvenus à le faire, dans les deux cas cités.

Notons que dans le cas de la dimension 2, pour un automorphisme linéaire et hyperbolique du tore, pour tout point et presque tout rayon (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$), une boule a son bord de mesure nulle pour toute mesure f-invariante. En effet, l'image d'une boule est une ellipse, qui rencontre donc la boule en au plus 4 points. Les points du bord qui reviennent dans le bord forment donc un ensemble au plus dénombrable, ce qui signifie que le bord ne peut avoir de la mesure que s'il possède un point périodique. Les points périodiques étant dénombrables, le rayon peut être ajusté pour que le bord les évite !

Pour la dimension supérieure et pour les difféomorphismes d'Anosov autres que les automorphismes linéaires d'un tore $\mathbb{T}^k$ cet argument géométrique ne fonctionne plus.

Ceci nous a amené à nous demander si "génériquement" une sous-variété est de mesure nulle pour n'importe quelle mesure invariante. Le problème dual consiste à savoir si une mesure peut charger une sous-variété de codimension strictement positive. Les mesures périodiques (portées par une orbite périodique) répondent à la question mais en existe-t-il d'autres ?

Comme le support d'une mesure invariante est inclus dans l'ensemble des points non-errants, la question est liée à celle de J. Francks (voir [29]) : pour un difféomorphisme d'Anosov l'ensemble des points non-errants peut-il ne pas être la variété globale ?

Si l'on parvient à démontrer qu'aucune mesure invariante non-atomique ne peut charger une sous-variété de codimension strictement positive ou, plus faiblement, qu'étant donnée une sous-variété de codimension strictement positive, il existe un mesure qui ne la charge pas, on aura alors montré que le support ne peut pas être inclus dans une sous-variété stricte.

3.2.3 Lien avec les automorphismes quasi-hyperboliques du tore

Je reprends les même notations qu'à la sous-section précédente. Nous venons de voir que le principe des grandes déviations pour les temps de retour découle de la propriété $Z_c < \mathcal{P}(\phi)$ (voir prop. 3.2.1). L'implication réciproque serait également très intéressante. C'est historiquement cette question qui m'a amené à étudier les grandes déviations pour les temps de retour. La question originelle est due à Y. Guivarc'h et consistait à savoir si ma méthode de construction de mesures de Gibbs pouvait s'appliquer pour les automorphismes quasi-hyperboliques du tore.

Un exemple de tel automorphisme est donné par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il possède

1. une valeur propre , $e^{\lambda^u} > 1$ simple,
2. une valeur propre , $e^{-\lambda^s} < 1$ simple,
3. une valeur propre double $e^{2i\pi\theta}$ avec θ dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Du fait de la présence de valeurs propres de module 1, cet automorphisme n'est pas hyperbolique mais seulement quasi-hyperbolique. Il laisse le tore $\mathbb{T}^4$ invariant et la mesure de Lebesgue est invariante. La question est alors de construire des mesures invariantes autres que la mesure de Lebesgue ou les mesures portées par les orbites périodiques.

Le fait est qu'il est possible de partitionner le tore $\mathbb{T}^4$ par des petites lamelles, chacune étant un rectangle bi-dimensionnel dont les bords sont des vecteurs de la direction instable et de la direction stable. En outre cette partition est markovienne, au sens où lorsque l'image d'une lamelle rencontre une autre lamelle, l'image dépasse dans la direction instable et est comprise dans l'autre lamelle dans la direction stable. Avec une telle construction la méthode décrite plus haut pourrait éventuellement s'appliquer.

Grâce à ces lamelles, on peut définir un opérateur de transfert, en particulier pour le potentiel constant $\phi \equiv -\lambda^u$. La mesure de Gibbs associée est la mesure de Lebesgue. Le rayon spectral de cet opérateur est 1. Malheureusement, les propriétés spectrales de l'opérateur de transfert découlent fortement des propriétés géométriques de la mesure de Lebesgue et les arguments ne peuvent pas s'appliquer pour un autre potentiel. En simplifiant et en reprenant les notations précédentes, pour le potentiel $-\lambda^u$ l'inégalité large $Z_c \leq \mathcal{P}(-\lambda^u)$ peut être démontrée mais pas l'inégalité stricte. Je pense toutefois qu'une propriété de grandes déviations sur les temps de retour (dans un sens à définir....) permettrait de démontrer cette inégalité stricte et de construire d'autres mesures de Gibbs par un argument de perturbation.

3.3 Systèmes troués et mesures quasi-invariantes pour le flot horocyclique

Je reprends les notations de la section 2.1. Le cadre est celui d'un sous-shift de type fini. La lettre R désigne un cylindre de longueur finie du sous-shift. On suppose R suffisament petit pour qu'il existe une orbite périodique qui évite R.

Je m'intéresse ici à ce qui se passe lorsque le paramètre Z tend vers le paramètre critique Z_c.

Pour $Z > Z_c$ on dispose d'une mesure m_Z qui est la mesure de Gibbs associée au potentiel $\phi - \log \lambda_Z \mathbb{1}_R$ (voir fin de la section 3.1), dont la restriction et renormalisation sur le rectangle R est $\widehat{\nu}_Z$, qui elle se projette sur ν_Z. En utilisant le théorème 3.1.1 (ici on voit l'importance de ψ dans ce théorème) on montre :

Proposition 3.3.1. *Lorsque Z tend vers Z_c, la mesure m_Z converge vers une mesure de probabilité m, qui est σ-invariante et telle que l'on ait*

$$m(R) = 0.$$

Question : Les mesures $\widehat{\nu}_Z$ convergent-elles aussi vers une mesure $\widehat{\nu}$ dans R ? Si oui, quelles sont les relations entre $\widehat{\nu}$ et m ?

Théorème 3.3.1 (Leplaideur [44])**.** *Soit (Σ, σ) un sous-shift de type fini mélangeant. Soit ϕ une application höldérienne de Σ dans $\mathbb{R}$. Soit R un cylindre de Σ de longueur* *finie. Soit g l'application premier retour dans R. Soit $\widehat{\nu}_Z$ la mesure d'équilibre pour le système (R, g) associée au potentiel $S_{r_{R(.)}}(\phi)(.) - Zr_R(.)$.*

Alors, la mesure $\widehat{\nu}_Z$ converge vers une mesure de probabilité $\widehat{\nu}$ sur R lorsque Z tend vers Z_c. Le support de $\widehat{\nu}$ est un ensemble totalement dissipatif. La mesure $\mu := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma_*^k \widehat{\nu}$ est une mesure σ-invariante et σ-finie. Elle a la même asymptotique que m :

Pour μ presque tout point, et pour toute fonction continue ψ,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} S_n(\psi)(x) = \int \psi \, dm_{erg(x)},$$

où $m_{erg(x)}$ est une composante ergodique de m (qui attire x à l'infini).

La mesure ν ne charge pas les points de R qui reviennent une infinité de fois dans R. Un point générique pour μ aura donc une orbite positive qui finit par ne plus rencontrer R. En terme de code, cela signifie que la "queue" de la partie positive du code de x est un élément du sous-shift troué unilatère. Cette queue a un code qui est admissible pour une unique composante du système troué. On dit que *cette composante attire x à l'infini*. Le théorème 3.3.1 signifie qu'un point générique pour μ est attiré par une composante de pression maximale pour le système troué et pour le potentiel ϕ

Une fois encore, je trouve que la vision naïve "mesure=grains de masse" fournit une jolie explication à ce théorème. Pour $Z > Z_c$, les grains de masse de $\widehat{\nu}_Z$ s'agencent dans R comme ceux de m_Z, moyennant un coefficient de renormalisation. Lorsque Z change, les agencements changent, et pour la valeur critique la renormalisation n'est plus valable. Cependant les agencements finaux ont gardé trace de la relation unissant $\widehat{\nu}_Z$ et m_Z (notez qu'il n'y a plus de grains de masse de m dans R). L'asymptotique d'un point selon μ est celle de m.

Par ailleurs, le théorème 3.3.1 permet de construire des exemples explicites de mesures invariantes par le flot horocyclique et σ-finie. Le Théorème 1.3.4 exprime l'unique ergodicité du flot horocyclique (dans un cadre plus général). Or on sait d'après [68] que lorsqu'un système (non-réduit à une orbite périodique) est uniquement ergodique, il possède une infinité de mesures invariantes σ-finies. La preuve très courte due à K. Schmidt repose cependant sur une équivalence orbitale entre les $\mathbb{Z}$-actions et les $\mathbb{Z}^2$-actions et ne permet donc pas de fournir un exemple concret de telle mesure. La question se posait donc de construire explicitement de telles mesures σ-finies.

Le théorème suivant fournit une multitude de telles mesures, en changeant le rectangle R.

Théorème 3.3.2 (Leplaideur dans [44]). *Soit (Σ, σ) un sous-shift de type fini mélangeant. Soir R un cylindre de longueur finie tel que le système troué associé (voit page 19) soit non vide. Soit $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ höldérienne. Soit m comme dans la proposition 3.3.1. Il existe un unique système de mesures transverses $\{\nu^u\}$ vérifiant*

(1.4) *et absolument continu par rapport au système de mesures conditionelles* $\{m_\phi^u\}$ *associé à la mesure* m.

De plus, pour chaque x, $\nu_x^u(W_{loc}^u(x)) = +\infty$.

Chapitre 4

Applications au cas non-uniformément hyperbolique

Ce chapitre se réfère aux articles [40], [42], [45], [46], [47], [48].

Il n'existe pas de théorie à proprement parler des systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques mais deux approches (au moins) que je présente dans ce chapitre. Ensuite, pour chacune d'entre elles, j'applique de la méthode vue à la section 2.1.

4.1 Deux stratégies d'approche

La dynamique des Axiom-A est généralement considérée comme bien connue. Depuis la fin des années 70, la communauté mathématique a étudié des systèmes avec des propriétés plus faibles. Parmi d'autres, deux approches se sont dégagées. Une approche basée sur les mesures et le théorème d'Oseledec. C'est la théorie de Pesin, et je qualifierai cette hyperbolicité de mesurée. L'autre approche est topologique. Elle consiste essentiellement à étudier des familles d'exemples se situant souvent dans le bord de l'ensemble des systèmes dynamiques uniformément hyperboliques. Je qualifierai cette hyperbolicité de topologique.

4.1.1 Hyperbolicité mesurée

Définition

On se donne une variété riemannienne compacte et lisse M de dimension finie et un $\mathcal{C}^{1+\alpha}$-difféomorphisme de M, f. Le théorème principal et point de départ de cette théorie est dû à Oseledec.

Théorème 4.1.1 (Oseledec voir [58]). *Soient M une variété riemannienne lisse compacte de dimension finie et f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de M. Soit μ une mesure de probabilité f-invariante et ergodique. On suppose que l'application $\log^+|Df|$ et $\log^+|Df^{-1}|$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Alors il existe des nombres réels strictement positifs λ^u et λ^s et pour μ-presque tout point x il existe une décomposition Df-invariante de l'espace fibré tangent

$$T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x),$$

tels que pour tout $\varepsilon < \min(\lambda^s, \lambda^u)$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a

1. *Pour tout $v^u \neq 0$ dans $E^u(x)$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{-n}(x).v^u| \leq -\lambda^u \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^u| \geq \lambda^u,$$

2. *Pour tout $v^s \neq 0$ dans $E^s(x)$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^s| \leq -\lambda^s \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^{-n}(x).v^s| \geq \lambda^s,$$

3. *Pour tout $v^c \neq 0$ dans $E^c(x)$,*

$$-\varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |Df^n(x).v^c| \leq \varepsilon.$$

Dans cette section, nous nous focaliserons sur les mesures hyperboliques :

Définition 4.1.1. *Une mesure f-invariante et ergodique μ est dite hyperbolique lorsque l'on a $E^c = \{0\}$ ($\mu-$p.p.).*

Dans la continuité de l'idée naïve "mesure=grains de masses", nous présentons d'abord des ensembles de points avec de bonnes propriétés hyperboliques.

Définition 4.1.2. *Si C est un réel dans $[1, +\infty[$, et si r est un entier de $\mathbb{N}^*$, on note Λ_r^C l'ensemble des points de M tels que, si $\varepsilon < 1/100 - \log(1 - 1/r)$, alors :*

(1) il existe une décomposition $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$,

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\forall\ v \in\ E^s_{f^m(x)} \begin{cases} \left\|Df^n_{f^m(x)}(v)\right\| \leq C\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\ e^{n\varepsilon+|m|\varepsilon}\|v\| \\ \\ \left\|Df^{-n}_{f^m(x)}(v)\right\| \geq \frac{1}{C}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\ e^{-n\varepsilon-|m|\varepsilon}\|v\| \end{cases}$$

$$\forall\ v \in\ E^u_{f^m(x)} \begin{cases} \left\|Df^n_{f^m(x)}(v)\right\| \geq \frac{1}{C}\left(\frac{r}{r-1}\right)^n\ e^{-n\varepsilon-|m|\varepsilon}\|v\| \\ \\ \left\|Df^{-n}_{f^m(x)}(v)\right\| \leq C\left(\frac{r-1}{r}\right)^n\ e^{n\varepsilon+|m|\varepsilon}\|v\|, \end{cases}$$

(3) L'angle $\gamma(f^m(x))$ entre $E^u(f^m(x))$ et $E^s(f^m(x))$ est tel que

$$\frac{1}{C}e^{-\varepsilon|m|/3} \leq \gamma(f^m(x)).$$

Ces ensembles Λ_r^C ne sont pas f-invariants mais ils vérifient tout de même les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.3 (Pesin, voir [62]). *Avec les notations précédentes :*
(i) Les ensembles Λ_r^C sont fermés ;
(ii) les applications $x \mapsto E^s(x)$ et $x \mapsto E^u(x)$ sont continues sur chaque Λ_r^C ;
(iii) l'ensemble $\Lambda_r \stackrel{def}{=} \bigcup_{C\geq 1} \Lambda_r^C$ est f-invariant ;
(iv) pour tout entier $q \in \mathbb{Z}$ et pour tout $C \geq 1$, il existe un réel $\alpha = \alpha(C, q, r) > 0$ tel que $f^q(\Lambda_r^C) \subset \Lambda_r^\alpha$.

Ces ensembles Λ_r^C jouent un rôle essentiel dans la théorie de Pesin car ils permettent de retrouver des propriétés d'hyperbolicité uniforme.

Définition 4.1.4. *Soit M une variété Riemannienne compacte lisse, de dimension finie et sans bord. Soit f un $C^{1+\alpha}$ difféormorphisme de M sur M. On dit qu'un point x de M est régulier s'il existe un réel $C \geq 1$ et un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \Lambda_r^C$. On note Λ l'ensemble des points réguliers de M.*

Théorème 4.1.2 (Pesin voir [62]). *Si μ est une mesure hyperbolique, alors il existe r tel que $\mu(\Lambda_r) = 1$*

Remarque 8. Un Axiom-A peut se voir comme un ensemble de Pesin Λ_r^C qui est invariant par f.

Si x est un point de Λ_r, on note $\widetilde{C}(x)$ le plus petit C tel que x soit dans Λ_r^C. Pesin montre qu'il existe une fonction mesurable et strictement positive $x \mapsto C(x)$ définie sur Λ_r telle que pour tout x de Λ_r on ait $C(x) \geq \widetilde{C}(x)$ et

$$e^{-\varepsilon} < \frac{C(f(x))}{C(x)} < e^{\varepsilon}.$$

L'application $x \mapsto C(x)$ porte le caractère non-uniforme de l'hyperbolicité et moralement, plus $C(x)$ est grand moins le point x est un "bon" point hyperbolique.

Définition 4.1.5. *Si n est un entier on définit l'ensemble $\Lambda_r(n)$ par*

$$\Lambda_r(n) := \{y \in \Lambda_r \ , e^{n\varepsilon} \leq C(y) \leq e^{(n+1)\varepsilon}\}.$$

Problèmes rencontrés pour appliquer la méthode

Le premier problème est la perte de la structure locale produit, essentielle pour construire un rectangle markovien.

Au-dessus de chaque point régulier x, *l'atlas de Lyapunov* envoit la boule de rayon proportionnel à $\dfrac{1}{C(x)}$ de l'espace $\mathbb{R}^u \oplus \mathbb{R}^s$ dans une boule de rayon comparable sur la variété riemannienne M, avec une distorsion en $C(x)$ (du fait de l'angle entre $E^u(x)$ et $E^s(x)$). Il est alors possible d'adapter la théorie de *transformation de graphe*, ce qui permet de définir les variétés stables et instables locales, $W^i_{loc}(x)$, $i = u, s$, et ensuite les variétés globales (voir par exemple [61] ou [28]).

L'application $x \mapsto C(x)$ présente deux inconvénients majeurs. D'une part elle est seulement borélienne, d'autre part elle ne donne que des informations partielles : $C(x)$ est un majorant de l'inverse de l'angle entre $E^u(x)$ et $E^s(x)$ et de la "constante" devant les estimations de croissances et décroissances exponentielles.

Le manque de régularité de la fonction C implique que (potentiellement) la structure locale produit n'existe plus. En effet, la construction des variétés ne permet de contrôler leur courbure que localement, dans une boule de rayon $\frac{1}{C(x)}$. Proche d'un point avec un $C(x)$ petit on pourrait trouver des points y avec $C(y)$ très grand (voir Figure 4.1).

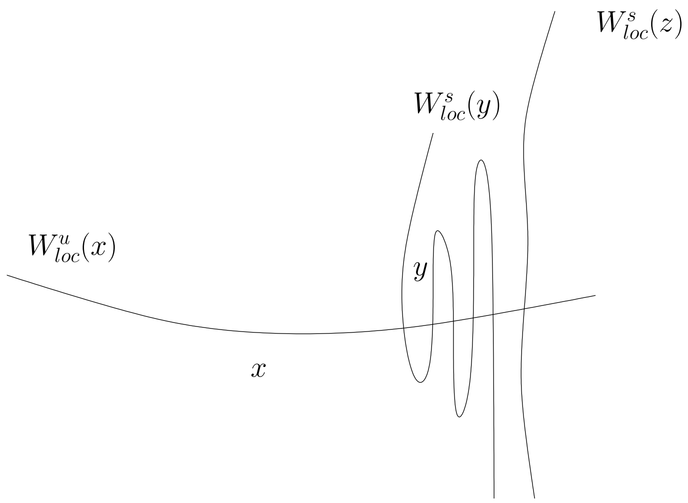

FIG. 4.1 – absence de structure produit locale

Le second problème est le caractère relativement abstrait de cette théorie. À part, peut-être, en dimension 2, il n'est pas facile de trouver un exemple de difféomorphisme qui soit hyperbolique au sens de Pesin et qu'on ne puisse étudier que de cette manière. De plus, même si les ensembles de Pesin sont des ensembles de points ayant un comportement hyperbolique, il est difficile de s'émanciper de l'existence d'une mesure sous-jacente. La construction d'autres mesures, singulières par rapport à cette mesure de référence s'avère alors également difficile.

4.1.2 Hyperbolicité topologique

Conjecture de Palis

L'approche est sensiblement différente de celle de Pesin. Partant de la constatation qu'il y a beaucoup de façons différentes de perdre l'hyperbolicité uniforme (par exemple faire apparaître un point neutre, faire apparaître des tangences, etc) J. Palis a énoncé une conjecture :

Conjecture 4.1.1 (Palis)**.** *Soit M une variété riemannienne compact lisse et de dimension finie. L'ensemble des difféomorphismes qui sont soit uniformément hyperboliques, soit avec une tangente homocline, soit avec un cycle hétérodimensionnel, est dense dans l'ensemble des difféomorphismes sur la variété riemannienne M.*

Je présenterai ultérieurement deux exemples de difféomorphismes avec tangence homocline ou avec cycle hétérodimensionnel. Cette conjecture captive beaucoup de mathématiciens, parmi lesquels F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, L. Diaz, H. Pujals et M. Sambarino. Par exemple, H. Pujals et M. Sambarino ont montré que la conjecture est vraie pour les surfaces et la topologie $\mathcal{C}^1$ (voir [65]).

Dans le cadre de la résolution de cette conjecture, de nombreuses propriétés ont été définies et reprennent le vocabulaire de la théorie de Pesin, mais avec un sens différent.

Dans cette théorie, un point est partiellement hyperbolique lorsqu'il présente sur son orbite une décomposition invariante en

$$T_xM = E^u(x) \oplus E^c(x) \oplus E^s(x),$$

telle que la différentielle Df soit uniformément dilatante sur E^u, uniformément contractante sur E^s, et où E^c est la direction centrale...pour laquelle on ne sait pas grand chose. Cependant cette direction centrale peut parfois se décomposer en $E_1^c \oplus E_2^c$, Df étant asymptotiquement dilatante (respectivement contractante) sur E_1^c (resp. E_2^c). Dans cette théorie on parle aussi d'exposant de Lyapunov pour une orbite sans avoir à faire intervenir de mesure.

Ainsi, le vocabulaire est le même que pour la théorie de Pesin, mais les objets sont sensiblement différents. En particulier ils sont liés à des propriétés ponctuelles et non pas asymptotiques.

Un exemple : fer à cheval torsadé

Afin de montrer les différences avec l'hyperbolicité mesurée, je donne maintenant un exemple sur lequel j'ai travaillé avec K. Oliveira et I. Rios. Il s'agit d'un cycle hétérodimensionnel introduit dans [27] par L. Diaz, V. Horita, I. Rios et M. Sambarino donné par la figure 4.2. Le point fixe hyperbolique Q a une variété instable de dimension 2 et une variété stable de dimension 1. Au contraire le point fixe hyperbolique P a une variété stable de dimension 2 et une variété instable de dimension 1. La variété instable de P coupe la variété stable de Q.

La direction verticale est uniformément dilatée et la direction horizontale et perpendiculaire au segment $[Q, P]$ est uniformément contractée. La direction $\vec{QP}$ est la direction centrale. L'ensemble des points dont l'orbite reste dans le cube $[0, 1]^3$ se projette sur l'axe vertical selon un ensemble de Cantor. Cet ensemble peut être codé par deux symboles, 0 en bas et 1 en haut (avec un trou entre les cylindres 0 et

1 pour donner l'aspect "Cantor"). La construction est faite de telle manière qu'un symbole 1 ne peut jamais être suivi d'un autre 1. Dans le "haut" du fer à cheval la direction centrale est contractée. Dans le bas f agit dans cette direction selon le graphe présenté figure 4.2.

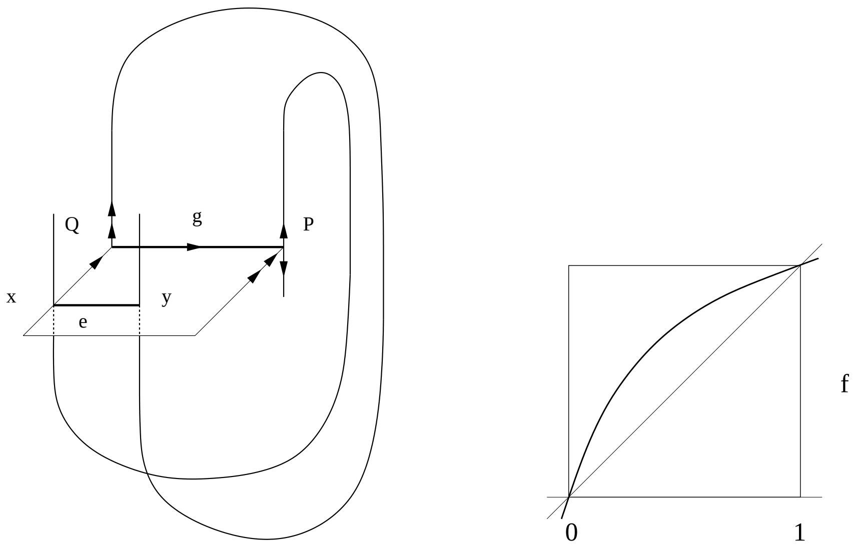

FIG. 4.2 – Fer à cheval torsadé avec direction centrale

Un tel système ne peut pas être uniformément hyperbolique du fait de ce cycle hétérodimensionnel : il va faire coéxister des points d'indice 2 et des points d'indice 1, l'indice étant la dimension de l'espace instable. De plus, dans [27] les auteurs montrent qu'un tel système n'est pas expansif : l'ensemble des points non-errants possède des segments dans la direction centrale, qui ne sont jamais séparés par itérations de f. Je rappelle que l'expansivité est une condition suffisante pour avoir la semi-continuité de l'entropie, elle-même étant suffisante pour garantir l'existence de mesures d'équilibre. Pour ce système, K. Oliveira, I. Rios et moi-même avons montré :

Théorème 4.1.3 (Leplaideur-Oliveira-Rios voir [46])**.** *Toute probabilité f-invariante ergodique autre que δ_Q a un exposant de Lyapunov strictement négatif dans la direction centrale.*

De plus l'entropie métrique est semi-continue supérieurement, et pour toute fonction continue ϕ il existe une mesure d'équilibre pour ϕ.

Du point de vue de l'hyperbolicité topologique, un tel système n'est donc pas hyperbolique, mais le théorème 4.1.3 signifie que du point de vue de l'hyperbolicité mesurée, ce système l'est !

4.2 Résultats en hyperbolicité mesurée

Dans la théorie de Pesin il est difficile de s'émanciper de l'existence d'une mesure sous-jacente. La question des mesures de Gibbs est donc limitée. Elle prend cependant tout son sens lorsqu'il s'agit d'étudier l'existence de mesures SRB. En effet, même si on a besoin d'une mesure pour construire les variétés instables et stables, ces variétés n'en sont pas moins des variétés immergées avec une mesure riemannienne canonique. Il est alors naturel de rechercher des mesures invariantes pour la dynamique, avec des conditionnelles instables absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue Leb^u.

La question revient à trouver des conditions portant sur les ensembles de Pesin garantissant l'existence d'une mesure SRB et/ou physique.

Théorème 4.2.1 (Leplaideur voir[40]). *Soit M une variété Riemannienne compacte lisse de dimension finie. Soit f un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme de M sur M. On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(H_1) $Leb_M(\Lambda) > 0$;

(H_2) le système (Λ, f) est conservatif pour la mesure de Lebesgue ;

(H_3) l'ensemble des points réguliers Λ_r vérifie la propriété suivante :

Il existe une constante universelle $K_H < 1$ telle que, pour tout n et pour Lebesgue-presque tout x dans $\Lambda_r(n)$, il existe un entier $m(x)$ tel que pour tout entier $p \geq m(x)$ et pour tout $y \in \Lambda_r(p)$,

$$W^u_{loc}(x) \cap B(y, K_H\, e^{-p\varepsilon}) = \emptyset \text{ et } W^s_{loc}(x) \cap B(y, K_H\, e^{-p\varepsilon}) = \emptyset.$$

Alors, il existe une mesure physique, ν, σ-finie, f-invariante. Elle a une structure locale produit :

pour presque tout x, il existe un rectangle R contenant x de mesure de positive pour ν et pour Leb^u et une mesure $\mu_{s,x}$ portée par $W^s_{loc}(x) \cap R$ tels que $\nu_{|R}$ soit équivalente à $Leb^u_x \otimes \mu_{s,x}$.

Les hypothèses (H_1) et (H_2) sont assez faibles. Elles garantissent un ensemble de Pesin de mesure Leb^u positive (le long des variétés instables) et avec de bonnes propriétés de retour.

L'hypothèse (H_3) est plus technique. Elle garantit la construction de rectangles markoviens. Autour d'un point x dans $\Lambda_r(n)$, les ensembles $\Lambda_r(p)$ (= mauvais points), avec p grand, ne se rapprochent pas trop près des variétés stables et instables locales en x (voir aussi la figure 4.1).

Pour démontrer un tel théorème il faut des estimations fines pour contrôler les variations du jacobien instable. En particulier on a besoins des deux résultats techniques suivants :

Lemme 4.2.1 (voir par exemple [39]). *Restreintes à l'ensemble $\bigcup_{k\leq n} \Lambda_r(k)$, les applications $x \mapsto E^i(x)$, $(i = u, s)$ sont höldériennes, avec une constante Hölder majorée par $C.e^{n\varepsilon}$, où C est une constante universelle.*

Proposition 4.2.2 (voir par exemple [52, 39]). *Les feuilletages sont absolument continus, c'est à dire, les holonomies locales préservent les mesures de Lebesgue : soit x dans $\Lambda_r(n)$ et soit Leb^u_x la mesure de Lebesgue associée au feuilletage instable local $W^u_{loc}(x)$. On suppose que x est un point de densité pour la mesure Leb^u_x de l'ensemble $\bigcup_{k\leq n}\Lambda_r(k)$. Si y est dans $W^s_{loc}(x)\cap\Lambda_r(n)$, alors l'ensemble*

$$\{W^s_{loc}(z)\cap W^u_{loc}(y),\ z\in W^u_{loc}(x)\cap\bigcup_{k\leq n}\Lambda_r(k)\},$$

est de mesure Leb^u_y positive.

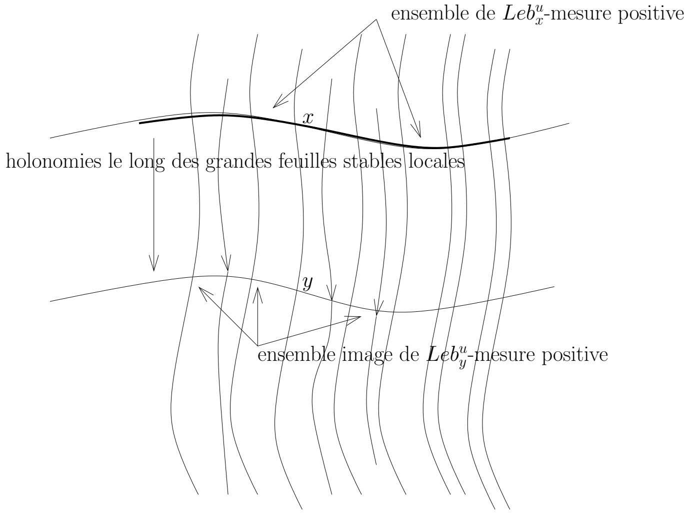

FIG. 4.3 – Absolue continuité des feuilletages locaux

4.3 Résultats en hyperbolicité topologique

Je présente ici un exemple de difféomorphisme non-uniformément hyperbolique sur lequel j'ai travaillé. L'hyperbolicité non-uniforme provient de la présence d'une tangente homocline pour un point fixe hyperbolique. Pour cette transformation, la question est de construire des mesures d'équilibre.

Il existe une littérature assez conséquente sur la construction de mesures d'équilibre pour le potentiel $\log J^u$ car, comme dit précédemment, ces mesures peuvent être construites sans nécessairement passer par la théorie des opérateurs. Le lecteur pourra par exemple se reporter aux travaux de Benedick et L.S. Young (voir [13]) pour l'attracteur de Hénon, ainsi qu'à ceux de J. Alves, C. Bonatti et M. Viana (voir [3], [4], [15]) pour des tranformations expansives ou des difféomorphismes "hyperboliques". Pour la dimension 1, le lecteur pourra voir les travaux récents [21] et [63] respectivement de H. Bruin avec M. Todd et de Y. Pesin avec S. Senti.

La question de l'existence et de l'unicité des mesures d'équilibre pour les systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques et pour des potentiels plus généraux est encore assez inexplorée. C'est un domaine très actif. Il y a des résultats entre autres pour les transformations dilatantes (voir [56], [57] [5] et [69]).

Dans [66] I. Rios introduit la famille de fers à cheval présenté sur la figure 4.4.

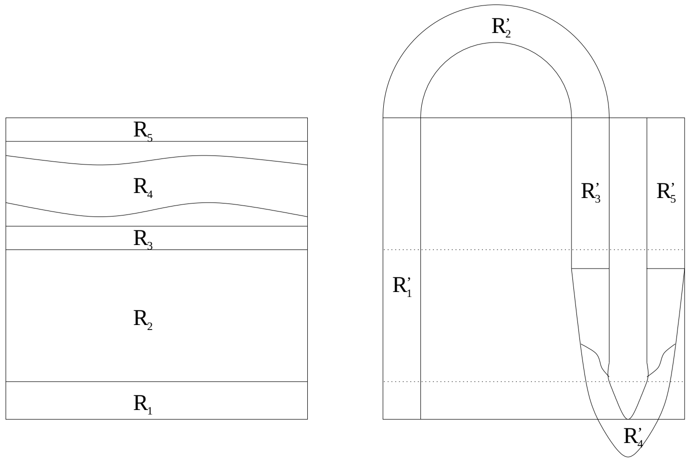

FIG. 4.4 – Fer à cheval non uniformément hyperbolique

La famille dépend du paramètre ε qui représente l'opposé de l'ordonnée du minimum de la partie recourbée (voir figure 4.5).

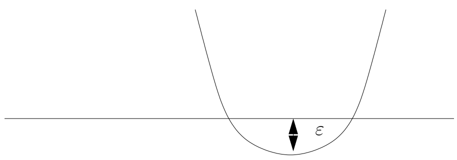

FIG. 4.5 – paramètre de la famille

Avant la bifurcation, c'est à dire juste avant la tangence, le fer à cheval est uniformément hyperbolique. Dans ce cadre, hyperbolique signifie que pour chaque point x non-errant, il existe deux cônes $C^u(x)$ et $C^s(x)$ tels que pour tout n suffisamment grand (indépendant de x) on a :

1. $Df_x(\mathcal{C}^u_x) \subset C^u_{f(x)}$,

2. pour tout v^u dans $C^u(x)$, $|Df^n_x(v^u)| \geq e^{n\lambda^u}|v^u|$,

3. $Df^{-1}_x(\mathcal{C}^s_x) \subset C^s_{f^{-1}(x)}$,

4. pour tout v^s dans $C^s(x)$, $|Df_x^n(v^s)| \leq e^{-n\lambda^s}|v^s|$,

Au moment de la tangence, c'est à dire pour $\varepsilon = 0$, les champs de cône perdurent, mais les propriétés de dilatations et de contractions ne sont plus vérifiées ni globalement ni uniformément : pour les points qui ne sont pas attirés par $(0,0)$, le nombre nécessaire d'itérations n'est plus (uniformément) majoré.

Dans le cadre uniformément hyperbolique, la définition de l'hyperbolicité avec les champs de cônes est équivalente à celle donnée pour les Axiom-A. Elle entraîne donc l'existence de feuilles stables et instables. La construction de ces variétés se fait via la transformation de graphe. Dans l'exemple de la figure 4.4 et lors de la tangence, l'existence des variétés stables et/ou instables n'est donc plus assurée...

Notations Par la suite f désignera un tel difféomorphisme du carré $[0,1]^2$ avec une (première) tangente homocline (c'est à dire pour $\varepsilon = 0$). Les paramètres sous-jacents sont, la contraction horizontale, $\lambda < \frac{1}{3}$, la dilatation verticale $\sigma > 3$ et un paramètre c qui quantifie la courbure au point critique. Ces 3 paramètres sont liés entre eux par diverses relations (voir par exemple [66, 45]). On note Λ l'ensemble des points qui restent dans le carré, c'est-à-dire $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n([0,1]^2)$.

Théorème 4.3.1 (Leplaiddeur-Rios voir [47])**.** *Soit f comme précédemment. Tout point de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$ possède une variété stable $W^s(x)$ et une variété instable $W^u(x)$. Ces variétés induisent localement une structure locale produit.*

Démontrer ce théorème revient finalement à démontrer la semi-conjugaison du système (Λ, f) au 3-shift plein. De plus on montre que la projection est höldérienne, ce qui permet d'avoir :

Théorème 4.3.2 (Leplaideur-Rios voir [47])**.** *Soit f comme précédemment. Pour toute application höldérienne ϕ, il existe une unique mesure d'équilibre pour le potentiel ϕ.*

À la différence du cas uniformément hyperbolique, l'unique mesure d'équilibre n'est plus tout à fait une mesure de Gibbs (avec la définition que nous en avons donnée) mais juste l'image par la semi-conjugaison des mesures de Gibbs sur le shift.

La semi-conjugaison est très simple : il suffit de coder chaque "jambe" verticale respectivement par 0,1 et 2. Les points attirés par le point-fixe hyperbolique $(0,0)$ ont un code ultimement égale à $00000\ldots$. La semi-conjugaison est injective si on se restreint aux points qui ne sont pas dans l'orbite critique. L'orbite critique est l'ensemble des mots bi-infinis, du type $\ldots 00000a00000\ldots$, où a vaut soit 1, soit 2. Les points de l'orbite critique ont exactement 2 codes.

Le théorème 4.3.2 ne s'applique pas au potentiel $-\log J^u$. En effet, dans ce cadre le jacobien instable J^u n'est pas continu en $(0,0)$. La direction instable en $(0,0)$ est verticale, mais ce point est accumulé sur l'axe des abscisses par des images du points critiques. Il est donc aussi accumulé par des points dont la direction instable est aussi proche que souhaitée de l'horizontale.

Or, l'étude de ce cas particulier est importante puisque la famille de potentiels $-t \log J^u$ est porteuse d'informations sur le système (voir th. 2.3.1). Pour ce faire, il a fallu développer d'autres outils.

Notons tout d'abord que pour de tels potentiels, même l'existence d'une mesure d'équilibre n'est pas garantie. En effet et, comme vu précédemment, la preuve de l'existence d'une mesure d'équilibre utilise la topologie faible*. Dans ce cas précis le potentiel n'étant plus continu, la topologie faible* ne permet pas à elle seule de conclure.

Il est cependant possible de démontrer l'existence et l'unicité de la mesure d'équilibre si la pression associée est suffisament grande. Par la suite, on notera $\mathcal{P}(t)$ la pression pour le potentiel $-t \log J^u$, avec $t \geq 0$.

Théorème 4.3.3 (Leplaideur-Rios voir [48]). *Soit f comme précédemment. Tant que $\mathcal{P}(t) > -t\frac{1}{2} \log \sigma$, il existe une unique mesure d'équilibre μ_t pour le potentiel $-t \log J^u$. De plus la fonction $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ est analytique sur cet intervalle.*

On a aussi dans ce cas

Théorème 4.3.4 (Leplaideur-Rios voir [48]). *Il existe un unique $0 < t_0$ tel que la pression de μ_{t_0} soit nulle. Pour tout x de Λ qui n'est pas attiré par $(0,0)$, la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W^u_{loc}(x)$ vaut t_0.*

Les deux preuves utilisent fortement la méthode expliquée à la section 2.1. Pour cette transformation, nous construisons aussi une partition de Markov dénombrable. Contrairement au cas habituel, c'est l'existence de la mesure d'équilibre qui donne son unicité. Je trouve ce point particulièrement élégant. Nous ne sommes en effet pas capable de montrer *a priori* l'inégalité stricte $Z_c(t) < \mathcal{P}(-t \log J^u) =: \mathcal{P}(t)$, mais seulement l'inégalité large. Techniquement, le fait que le potentiel ne soit pas continu pose des problèmes lors de l'utilisation de la topologie faible*. Comme le seul point de discontinuité est $(0,0)$ il faut, lors de l'utilisation de la topologie faible*, considérer l'alternative "la mesure limite charge le point $(0,0)$ ou non". Nous montrons ensuite que si la pression $\mathcal{P}(t)$ vérifie

$$\mathcal{P}(t) > -t.\frac{1}{2} \log \sigma$$

alors l'état d'équilibre existe et ne peut pas charger $(0,0)$. Nous prouvons alors son unicité grâce à la méthode de la section 2.1 ce qui donne donc *a posteriori* l'inégalité stricte

$$Z_c(t) < \mathcal{P}(t).$$

Enfin, puisque le cadre permet de bien appliquer la méthode, on peut regarder ce qui se passe lorsque t tend vers $+\infty$, comme dans le cas uniformément hyperbolique. Dans ce cas, on espère voir apparaître les mesures minimisant l'exposant de Lyapunov instable.

À partir des paramètres λ et σ on introduit le nouveau coefficient :

$$\beta := \frac{-\log \lambda}{\log \sigma},$$

qui exprime la distorsion entre la dilatation et la contraction. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.3.5 (Leplaideur voir [45])**.** *Soit f comme précédemment. Soit $\underline{l} := \inf_\nu \int \log J^u \, d\nu$ la borne inférieure de l'exposant de Lyapunov instable de f. Alors on a*

$$\underline{l} = \frac{1}{2} \max(1, 2-\beta) \log \sigma,$$

et il n'existe pas de mesure qui réalise ce minimum.

De plus la droite $-t\underline{l}$ est une asymptote à la courbe de $t \mapsto \mathcal{P}(t)$ en $+\infty$.

Tant que la pression vérifie $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$, la fonction est analytique sur cet intervalle et il existe une unique mesure d'équilibre associée à $-t \log J^u$, notée μ_t.

Si pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{P}(t) > -t\underline{l}$, alors μ_t converge vers la mesure de Dirac $\delta_{(0,0)}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

S'il existe un réel T tel que $\mathcal{P}(T) = -T\underline{l}$, alors pour tout $t > T$ il n'existe pas de mesure d'équilibre associée à $-t \log J^u$.

En ce qui concerne l'allure du graphe de la pression, N. Makarov et S. Smirnov ainsi que F. Przytycki et J. Rivera-Letelier ont obtenu des résultats similaires pour des fractions rationnelles sur la sphère de Riemann (voir [53] et [64]). Il est en particulier intéressant que N. Makarov et S. Smirnov prouvent que le second cas, c'est à dire lorsque le graphe de $\mathcal{P}(t)$ rencontre son asymptote en temps fini, se réalise effectivement. Ce serait vraiment intéressant d'avoir ce même résultat dans notre cas. Cela fournirait un exemple de difféomorphisme qui se situe dans le bord des difféomorphismes uniformément hyperboliques mais pour lequel un phénomène différent arrive, c'est à dire la perte des mesures d'équilibre pour le potentiel $-\log J^u$ avec t assez grand.

En ce qui concerne la non-existence d'une mesure qui minimise l'exposant de Lyapunov, le théorème 4.3.5 complète un théorème dû à Y. Cao, S. Luzzatto et I. Rios (voir [23]) :

Théorème 4.3.6 (Cao-luzzatto-Rios voir [23])**.** *Soit M une variété riemanienne compact lisse de dimension finie. Soit f une application $\mathcal{C}^1$ de M dans M. Soit Λ un compact f-invariant tel que pour tout x de Λ on ait*

$$Det(Df_x) \neq 0.$$

Si on a une décomposition continue et Df-invariante $T_xM = E^1(x) \oplus E^2(x)$ pour tout x de Λ, alors il existe une mesure f-invariante qui minimise l'exposant de Lyapunov sur le fibré E^1.

Ainsi, le théorème 4.3.5 montre que l'hypothèse "compact" est indispensable dans le théorème 4.3.6.

4.4 Un croisement des deux approches

Dans [42] j'introduis la notion de difféomorphisme “Presque Axiom-A” (AAA en anglais). L'idée est d'utiliser les avantages de chacune des approches.

En particulier, l'objectif est d'améliorer le théorème 4.2.1 (cadre de l'hyperbolicité mesurée) tout en travaillant sur des difféomorphismes dont on a (ou pourrait avoir !) des exemples. Vis à vis de l'hyperbolicité topologique, l'objectif est de travailler sur des transformations qui n'ont pas de *décomposition dominée* (point clé dans [4] et [15]).

Je m'intéresse donc à des difféomorphismes, partout hyperboliques, sauf sur un ensemble exceptionnel et invariant. En tout point de cet ensemble exceptionnel la décomposition perdure mais la différentielle devient l'identité :

Définition 4.4.1. *Soit f dans $Diff^2(M)$. On dit que f est Presque-Axiom-A s'il existe un ouvert U contenant un compact f-invariant $\Omega \subset U$ tel que :*
(i) pour tout $x \in U$ il existe une décomposition Df-invariante de l'espace tangent $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$ avec $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ Höldériennes (uniformément),
(ii) il existe 2 fonctions continues et positives $x \mapsto k^u(x)$et $x \mapsto k^s(x)$ telles que

$$\forall x \in U, \qquad \begin{array}{ll} \forall v \in E^s(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \leq e^{-k^s(x)}\|v\|_x \\ \forall v \in E^u(x) & \|df(x).v\|_{f(x)} \geq e^{k^u(x)}\|v\|_x, \end{array}$$

(iii) l'ensemble exceptionnel, $S = \{x \in U,\ k^u(x) = k^s(x) = 0\}$ vérifie $f(S) = S$ et, pour tout x dans $U \setminus S$, $k^u(x)$ et $k^s(x)$ sont strictement positives.

Un exemple de tel diffomorphisme est obtenu en prenant l'attracteur de Smale (solénoïde dans $\mathbb{T}^2$-plein) mais en faisant la construction de telle sorte qu'il existe des points fixes neutres (ou périodiques neutres).

Définition 4.4.2. *Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.*

a/ Un point x dans Ω est dit λ-hyperbolique si

1. $\forall v \in E^u(x) \setminus \{0\}$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{-n}(x).v\| < -\lambda$;
2. $\forall v \in E^s(x) \setminus \{0\}$, $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|df^{n}(x).v\| < -\lambda$.

b/ Un ensemble f-invariant Λ_λ dont tous les points sont λ-hyperboliques est dit λ-hyperbolique.

Les points λ-hyperboliques sont donc les points qui ne reviennent pas trop souvent près de l'ensemble exceptionnel, pour pouvoir avoir des taux exponentiels de contraction, dans le passé pour la direction instable et dans le futur pour la direction stable.

Le premier problème à traiter pour ce genre de difféomorphismes est celui de l'existence des variétés stables et instables : techniquement, les 2 points clé pour avoir ces variétés sont

- Contrôler le trou spectral de Df entre la direction dilatante E^u et la direction contractante E^s.
- Contrôler l'écart $f - Df_x$ en norme Lipschitz autour du point x.

Dans le cas uniformément hyperbolique ce contrôle est donné par les hypothèses. Dans le cas de l'hyperbolicité mesurée, ce contrôle est donné en utilisant l'atlas de Lyapunov sur un ensemble de Pesin. Dans le cas de l'hyperbolicité topologique, ce contrôle est donné par une hypothèse de décomposition continue et dominée.

Ici, la décomposition est continue mais pas dominée à cause des points neutres de l'ensemble S. Plus un point est proche de l'ensemble exceptionnel S, moins le trou spectral est grand et donc plus il faut prendre un voisinage petit pour avoir de bonnes estimées.

Théorème 4.4.1 (Leplaideur voir [42])**.** *Soit f un Presque-Axiom-A. Pour tout point λ-hyperbolique x on peut construire une variété instable $W^u(x)$ et une variété stable $W^s(x)$ telles que $T_xW^i(x) = E^i(x)$.*

La démonstration utilise la transformation de graphe et montre que pour un point λ-hyperbolique, même s'il revient dans le passé une infinité de fois près de l'ensemble exceptionnel, seul un nombre fini de ces préimages influençent la longueur de la variété instable locale obtenue comme point fixe de la transformation de graphe.

Remarque 9. Il serait intéressant d'avoir le même genre de résultat avec des limites inférieures dans la définition 4.4.2 plutôt que des limites supérieures.

Le théorème précédent, s'il donne les variétés stables et instables, ne donne pas pour autant leur taille, point clé pour avoir une structure locale produit ! Sous l'hypothèse qu'il existe suffisament de points avec des variétés stables et instables assez longues j'améliore le théorème 4.2.1 et trouve un résultat assez proche de celui de L.S. Young et H. Hu dans ([33]) :

Théorème 4.4.2 (Leplaideur voir [42])**.** *Soit f un Presque-Axiom-A. Soit λ un réel strictement positif. Supposons qu'il existe un ensemble f-invariant Λ de points λ-réguliers tel que :*

1. *pour tout point x de Λ, $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) contient un disque de centre x et de rayon $\varepsilon_0 > 0$, indépendant de x,*
2. *il existe un point x tel que $Leb^u(D^u(x, \varepsilon) \cap \Lambda) > 0$.*

Alors f admet une mesure SRB finie ou σ-finie.

La première hypothèse de ce théorème est la plus contraignante, mais est finalement bien plus réaliste que l'hypothèse (H_3) du théorème 4.2.1. C'est même un critère facilement observable. Il faut aussi relativiser la contrainte de cette hypothèse : si une mesure SRB finie existe et est portée par cet ensemble hyperbolique, la récurrence de Poincaré permet de conclure que tout point reviendra une infinité de fois dans les régions avec des variétés instables locales uniformément longues.

L'hypothèse que f ne contracte pas les directions instables permet alors d'être sûr que pour presque tout point, la variété instable est uniformément longue. Si la mesure est seulement σ-finie, il faut décomposer l'ensemble en sa partie conservative et sa partie dissipative (selon [1]) et se concentrer sur la partie conservative.

La seconde hypothèse est à rapprocher de l'hypothèse (H_1) du théorème 4.2.1, si ce n'est qu'on demande juste que l'ensemble ait de la mesure de Lebesgue instable Leb^u positive.

Dans la démonstration, je m'émancipe de l'hypothèse (H_2) du théorème 4.2.1 (conservativité pour avoir du retour) grâce à l'hyperbolicité. Je construis une partition de Markov dénombrable, mais dont seulement un nombre fini d'éléments recouvrent une zone "hyperbolique" dans laquelle tout point doit passer une infinité de fois pour être λ-régulier. Je peux alors utiliser la méthode d'induction présentée à la section 2.1 pour contruire des mesures SRB.

Travaux de l'auteur

[1] A. Baraviera, R. Leplaideur, A.O. Lopes. Renormalization for a Class of Dynamical Systems : some Local and Global Properties. Janvier 2008. Prépublication non présentée dans ce mémoire.

[2] J.-R. Chazottes and R. Leplaideur. Fluctuations of the Nth return time for Axiom A diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(2) :399–411, 2005.

[3] R. Leplaideur. *Structure locale produit de mesures hyperboliques.* Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1997.

[4] R. Leplaideur. Existence d'une mesure de Sinai-Ruelle-Bowen pour des systèmes non uniformément hyperboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(10) :1217–1220, 1998.

[5] R. Leplaideur. Local product structure for equilibrium states. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(4) :1889–1912, 2000.

[6] R. Leplaideur. Existence of *SRB*-measures for some topologically hyperbolic diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 24, 2004.

[7] R. Leplaideur. A dynamical proof for the convergence of Gibbs measures at temperature zero. *Nonlinearity*, 18(6) :2847–2880, 2005.

[8] R. Leplaideur. Construction of conformal and σ-finite measures for the stable holonomies. 2006.

[9] R. Leplaideur. Non-existence of measures which minimize the unstable Lyapunov exponent for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes. 2008.

[10] R. Leplaideur, K. Oliveira, and I. Rios. Equilibrum states for partially hyperbolic horseshoes. Décembre 2007.

[11] R. Leplaideur and I. Rios. Invariant manifolds and equilibrium states for non-uniformly hyperbolic horseshoes. *Nonlinearity*, 19(11) :2667–2694, 2006.

[12] R. Leplaideur and I. Rios. On the t-conformal measures and Hausdorff dimension for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes. Accepté à ETDS 2008.

[13] R. Leplaideur and B. Saussol. Large deviation for return times in non-rectangle sets for axiom a diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 22(1& 2) :327–344, 2008.

Bibliographie

[1] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, volume 50 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[2] V. M. Alekseyev. Symbolic dynamic. In *11th summer mathematical school*. Mathematics Institute of the Ukraininan Academy of Sciences, Kiev, 1976.

[3] J.F. Alves. Srb measures for nonhyperbolic systems with multidimensional expansion. *Ann. Sci. ENS*, iv(1) :1–32, 2000.

[4] J.F. Alves, C. Bonatti, and M. Viana. Srb measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Inventiones Math.*, 140 :351–298, 2000.

[5] A. Arbieto, C. Matheus, and K. Oliveira. Equilibrium states for random nonuniformly expanding maps. *Nonlinearity*, 17(2) :581–593, 2004.

[6] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific, 2000.

[7] V. Baladi and S. Gouëzel. Good Banach spaces for piecewise hyperbolic maps via interpolation. 2008.

[8] V. Baladi and M. Tsujii. Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(1) :127–154, 2007.

[9] J.B. Bardet. *Large Deviations Results for Spatially Extended Dynamical Systems*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2002.

[10] L. Barreira, Y. Pesin, and J. Schmeling. Dimension of hyperbolic measures – A proof of the Eckmann-Ruelle conjecture. *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 02(1) :69–72, 1996.

[11] L. Barreira, Y. Pesin, and J. Schmeling. Dimension and product structure of hyperbolic measures. *Ann. of Math. (2)*, 149(3) :755–783, 1999.

[12] L. Barreira and B. Saussol. Product structure of Poincaré recurrence. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(1) :33–61, 2002.

[13] M. Benedicks and L.-S. Young. Sinai-bowen-ruelle measures for certain hénon maps. *,Invent. Math.*, 112(3) :541–576, 1993.

[14] G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 17 :656–660, 1931.

[15] C. Bonatti and M. Viana. SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting. *Israel J. Math.*, 115 :157–193, 2000.

[16] T. Bousch. La condition de Walters. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 34 :287–311, 2001.

[17] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture notes in Math.* Springer-Verlag, 1975.

[18] R. Bowen and B. Marcus. Unique Ergodicity for Horocycle Foliations. *Israel Journal of Mathematics*, 26(1) :43–67, 1977.

[19] M. Boyle, J. Buzzi, and R. Gómez. Almost isomorphism for countable state Markov shifts. *J. Reine Angew. Math.*, 592 :23–47, 2006.

[20] J. Brémont. Gibbs measures at temperature zero. *Nonlinearity*, 16(2) :419–426, 2003.

[21] H. Bruin and M. Todd. Equilibrium states for interval maps : the potential $-t \log |df|$. Arxiv, http ://front.math.ucdavis.edu/0704.2199, 2007.

[22] W. Bryc. *A remark on the connection between the large deviation principle and the central limit theorem. Statist. & Probab. Lett.*, (18) :253–256, 1993.

[23] Y. Cao, S. Luzzatto, and I. Rios. A minimum principle for Lyapunov exponents and a higher-dimensional version of a theorem of Mañé. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 5(2) :261–273, 2004.

[24] J.-R. Chazottes and R. Leplaideur. Fluctuations of the Nth return time for Axiom A diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 13(2) :399–411, 2005.

[25] H. Comman. Strengthened large deviations for rational maps and gibbs fields, with unified proof, 2008.

[26] G. Contreras, A. Lopes, and P. Thieullen. Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 21 :1–31, 2001.

[27] L. J. Díaz, V. Horita, I. Rios, and M. Sambarino. Destroying horseshoes via heterodimensional cycles : generating bifurcations inside homoclinic classes. Preprint 2007.

[28] A. Fathi, M.-R. Herman, and J.-C. Yoccoz. A proof of Pesin's stable manifold theorem. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 177–215. Springer, Berlin, 1983.

[29] J. Franks. Anosov diffeomorphisms. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 61–93. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[30] H. Furstenberg. The unique ergodicity of the horocycle flow. In *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972 ; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, pages 95–115. Lecture Notes in Math., Vol. 318. Springer, Berlin, 1973.

[31] S. Gouëzel and C. Liverani. Compact locally maximal hyperbolic sets for smooth maps : fine statistical properties. *Journal of Differential Geometry*, 79 :433–477, 2008.

[32] N. T.A. Haydn. Canonical product structure of equilibrium states. *Random and computational dynamics*, 2(1) :79–96, 1994.

[33] H. Hu and L.-S. Young. Nonexistence of *SBR*-measures for some diffeomorphisms that are "Almost Anosov". *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 15(1) :67–76, 1995.

[34] O. Jenkinson. Rotation, entropy, and equilibrium states. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 :3713–3739, 2001.

[35] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 1995.

[36] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms Part I : Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Annals of Mathematics*, 122 :509–539, 1985.

[37] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms Part II : Relations between entropy,exponents and dimension. *Annals of Mathematics*, 122 :540–574, 1985.

[38] François Ledrappier and Jean-Marie Strelcyn. A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(2) :203–219 (1983), 1982.

[39] R. Leplaideur. *Structure locale produit de mesures hyperboliques*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1997.

[40] R. Leplaideur. Existence d'une mesure de Sinai-Ruelle-Bowen pour des systèmes non uniformément hyperboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(10) :1217–1220, 1998.

[41] R. Leplaideur. Local product structure for equilibrium states. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(4) :1889–1912, 2000.

[42] R. Leplaideur. Existence of *SRB*-measures for some topologically hyperbolic diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 24, 2004.

[43] R. Leplaideur. A dynamical proof for the convergence of Gibbs measures at temperature zero. *Nonlinearity*, 18(6) :2847–2880, 2005.

[44] R. Leplaideur. Construction of conformal and σ-finite measures for the stable holonomies. 2006.

[45] R. Leplaideur. Non-existence of measures which minimize the unstable lyapunov exponent for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes. 2008.

[46] R. Leplaideur, K. Oliveira, and I. Rios. Equilibrum states for partially hyperbolic horseshoes. 2008.

[47] R. Leplaideur and I. Rios. Invariant manifolds and equilibrium states for non-uniformly hyperbolic horseshoes. *Nonlinearity*, 19(11) :2667–2694, 2006.

[48] R. Leplaideur and I. Rios. On the t-conformal measures and Hausdorff dimension for a family of non-uniformly hyperbolic horseshoes. Accepted at ETDS, 2008.

[49] R. Leplaideur and B. Saussol. Large deviation for return times in non-rectangle sets for axiom a diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 22(1& 2) :327–344, 2008.

[50] A. O. Lopes. Entropy and large deviation. *Nonlinearity*, 3(2) :527–546, 1990.

[51] A.O. Lopes and P. Thieullen. *Sub-actions for Anosov diffeomorphisms*, volume 286-287 of *Astérisque*. Soc. Math. France, 2003.

[52] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.

[53] N. Makarov and S. Smirnov. On thermodynamics of rational maps. II. Non-recurrent maps. *J. London Math. Soc. (2)*, 67(2) :417–432, 2003.

[54] A. Manning. A relation between Lyapunov exponents, Hausdorf dimension and entropy. *Ergod th. & Dynam. Sys.*, (1) :451–459, 1981.

[55] H. McCluskey and A. Manning. Hausdorff dimension for horseshoes. *Ergod th. & Dynam. Sys.*, (3) :251–260, 1983.

[56] K. Oliveira. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(6) :1891–1905, 2003.

[57] K. Oliveira and M. Viana. Thermodynamical formalism for robust classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(2) :501–533, 2008.

[58] V.I. Oseledec. Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov Characteristics numbers for dynamical systemes. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19 :197–221, 1968.

[59] W. Parry. *Entropy and generators in ergodic theory.* Mathematics lectures notes series. Benjamen W.A. (New York), 1969.

[60] W. Parry. *Topics in ergodic theory.* Cambridge University Press (Cambridge), 1981.

[61] Y. Pesin. Families of invariant manifolds that correspond to nonzero characteristic exponents. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 40(6) :1332–1379, 1440, 1976.

[62] Y. Pesin. Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. *Russian math. Surveys*, 32(4) :55–114, 1977.

[63] Y. Pesin and S. Senti. Thermodynamical formalism associated with inducing schemes for one-dimensional maps. *Mosc. Math. J.*, 5(3) :669–678, 743–744, 2005.

[64] F. Przytycki and J. Rivera-Letelier. Nice inducing schemes and the thermodynamics of rational maps, 2008.

[65] E. R. Pujals and M. Sambarino. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Ann. of Math. (2)*, 151(3) :961–1023, 2000.

[66] I. Rios. Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes : hyperbolicity, fractal dimensions and persistent tangencies. *Nonlinearity*, 14 :431–462, 2001.

[67] V.A. Rohlin. On the fundamental ideas of measure theory. *A.M.S-Translation*, 10(1) :1–52, 1962.

[68] K. Schmidt. Infinite invariant measures on the circle. In *Symposia Mathematica, Vol. XXI (Convegno sulle Misure su Gruppi e su Spazi Vettoriali, Convegno sui Gruppi e Anelli Ordinati, INDAM, Rome, 1975)*, pages 37–43. Academic Press, London, 1977.

[69] P. Varandas and M. Viana. Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps, 2008.

[70] L.S. Young. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann. of Math. (2)*, 147(3) :585–650, 1998.

[71] L.S. Young. Recurrence times and rates of mixing. *Israel J. Math.*, 110 :153–188, 1999.