Licence MASS

Université de Brest

L3-Intégration

Session Janvier 2013

Aucuns documents autorisés.

Exercice 1

On considère la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction dans $L^1(\lambda)$ on appelle transformée de Fourier la fonction :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx.$$

On rappelle que $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$.

1/ Justifier que $\widehat{f}(t)$ est bien définie.

2/ En utilisant la continuité sous le signe somme, montrer que $\widehat{f}$ est continue.

3/ Si on suppose aussi que $g : x \mapsto x.f(x)$ est dans $L^1(\lambda)$, montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

On considère f dans $L^1(\lambda)$ (sur $\mathbb{R}$).

1/ Montrer que pour presque tout x, $\cos^n(x)$ tend vers 0.

2/ Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \cos^n x.f(x)\, dx$. On justifiera la réponse.

Exercice 3

Soit μ une mesure de probabilité (borélienne) sur $\mathbb{R}$. On note $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.

1/ Justifier que F est croissante. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$?

2/ Montrer qu'il y a au plus n points x tels que $F(x) - \lim\limits_{y\to x^-} F(y) \geq \dfrac{1}{n}$.

3/ En déduire qu'il y a au plus un ensemble dénombrable de points x tels que $\mu(\{x\}) > 0$.

Exercice 4

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = xe^{-x} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Licence MASS

Université de Brest

L3-Intégration

Session Juin 2013

Aucuns documents autorisés.

Exercice 1

On considère la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

1/ À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge (au sens de Riemann).

2/ Calculer $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

3/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$?

Exercice 2

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sin x . e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 3

Soit f Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \left(e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1 \right) dx.$$

On pourra étudier pour x fixé $\lim_{n\to+\infty} e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1$. Bien préciser les théorèmes utilisés.

Exercice 4

Soit μ une probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On rappelle le Lemme de Borel Cantelli :

Si (A_n) est une suite de boréliens telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$ converge, alors, μ-presque tout x n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

On considère une suite de fonctions f_n et une autre fonction f telles que pour tout $a > 0$

$$\sum_{n\geq 0} \mu(|f_n - f| > a) < +\infty.$$

Montrer que pour μ-presque tout x, $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$.

Licence MASS

Université de Brest

L3-Intégration

Session Janvier 2014

Aucun document autorisé.

Exercice 1 (2pt)

Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-n\sin^2(x)}\,dx$ où f est une fonction dans $L^1([0,+\infty[)$ (pour la mesure de Lebesgue).

Exercice 2 (4pt)

1/ Montrer que pour tout x dans $[0,+\infty[$, et pour tout entier $n>0$, $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

2/ Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

Exercice 3 (6pt)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$.

1/ Montrer que f appartient à $L^1(]0,1])$.

2/ Soit $p>1$. Montrer que f n'appartient pas à $L^p(]0,1])$.

3/ Soit $p\geq 1$. Montrer que f appartient) $L^p([1,+\infty[)$.

Exercice 4 (8pt)

Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré [1] vérifiant $0<\mu(E)<+\infty$. Soient $0<\varepsilon<1$ et $f: E\to[\varepsilon,+\infty[$ une fonction intégrable sur E.

1/ Soit $\alpha\in[0,1]$. Montrer que f^α est intégrable. On pourra majorer $f(x)^\alpha$ de deux manières différentes, selon que $f(x)\geq 1$ ou non.

2/ Montrer que pour tout $t\geq 1$, $\ln t\leq \sqrt{t}$. Montrer alors que $\ln f$ est dans $L^2(\mu)$.

On pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_E f^\alpha\,d\mu$.

3/ Calculer $F(0)$.

4/ Montrer que F est dérivable sur $[0,\frac{1}{2}[$. Calculer sa dérivée.

5/ En déduire la valeur de $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{1}{\mu(E)}\displaystyle\int_E f^\alpha\,d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1. On pourra par exemple imaginer $E=[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, mais on écrira toujours E et μ.