Existence d'une mesure de *Sinai-Ruelle-Bowen* pour des systèmes non-uniformément hyperboliques.

RENAUD LEPLAIDEUR[1]

Résumé. Si M est une variété Riemannienne compacte, et f un $C^{1+\alpha}$-difféomorphisme de M, on prouve que si un ensemble de Pesin (voir [5]) vérifie certaines propriétés, et si le système (M, f) est conservatif pour le volume riemannien, *Leb*, alors il existe une mesure *SRB* f-invariante et σ-finie.

Existence of a *Sinai-Ruelle-Bowen*-measure for non-uniformly hyperbolic systems.

Abstract. Let M be a smooth Riemannian manifold, and f be a $C^{1+\alpha}$-diffeomorphism onto M. Let Λ be a Pesin's set (see [5]). We prove that under some assumptions on Λ, and if the system (M, f) is conservative for the Lebesgue measure, then there exist a *SRB*-measure, f-invariant and σ-finite.

1 Présentation du résultat

On désignera par M, une variété Riemannienne, C^∞, compacte, de dimension finie et sans bord. L'application f, désignera un $C^{1+\alpha}$-difféomorphisme sur M. On définit un ensemble de points de M, ayant une propriété d'hyperbolicité, de la manière suivante.

Définition 1.1 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $0 < \varepsilon << \lambda/100$. On appelle ensemble de Pesin, l'ensemble Λ_λ de points x de M qui vérifient :*

(i) Il existe une décomposition f-invariante de $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$;

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $v \in E^s(x)$, $|Df_x^n v| \leq C(x)\, e^{-n(\lambda-\varepsilon)}|v|$, et pour tout $v \in E^u(x)$, $|Df_x^{-n} v| \leq C(x)\, e^{-n(\lambda-\varepsilon)}|v|$;

(iii) Angle($E^u(x), E^s(x)$)$\geq \frac{1}{C(x)}$;

[1]Université Paris-Sud, Laboratoire de Topologie et Dynamique, Bât. 425, 91405 Orsay cedex . e-mail : leplaide@topo.math.u-psud.fr

(iv) $x \mapsto C(x)$ *est à variations lentes, ie,* $e^{-\varepsilon} \leq \frac{C \circ f(x)}{C(x)} \leq e^{\varepsilon}$.

Les points de Λ_λ *seront appelés points réguliers.*

L'ensemble des points réguliers étant fixé, on construit une application borélienne $l : \Lambda_\lambda \longrightarrow [1, +\infty]$ à variations lentes liée à la fonction C, puis un atlas de Lyapunov (voir [3] ou [7]) $\{\Phi_x : B(0, l(x)^{-1}) \subset \mathbb{R}^d \to M\}$. On définit ensuite les variétés instables locales, $W_l^u(x)$, pour tout x régulier, en posant

$$W_l^u(x) = \{y \in M,\ \forall n \leq 0,\ f^n(y) \in \Phi_{f^n(x)} B(0, l^{-1}(f^n(x)))\}.$$

On définit de même $W_l^s(x)$ en changeant n et $-n$. Si l_0 est fixé, on note $\Lambda(0) \stackrel{déf}{=} \{x \in \Lambda_\lambda\ ,\ l(x) \leq l_0\}$, et pour tout $n > 0$, $\Lambda(n) \stackrel{déf}{=} \{x \in \Lambda_\lambda\ ,\ l_0 e^{(n-1)\varepsilon} < l(x) \leq l_0 e^{(n)\varepsilon}\}$.

Hypothèse : On dira que l'ensemble Λ_λ vérifie une hypothèse de non intersection brutale s'il existe une constante universelle $K_H < 1$, telle que pour Lebesgue-presque tout x dans $\Lambda(n)$, il existe un entier $m(x)$ tel que pour tout entier $p \geq m(x)$ et pour tout $y \in \Lambda(p)$,

$$W_l^s(x) \cap B(y, K_H\, e^{-p\varepsilon}) = \emptyset.$$

Définition 1.2 *On dira qu'une mesure borélienne,* σ*-finie,* f*-invariante,* μ*, est une mesure* σ*-SRB, si ses mesures désintégrées instables,* $\{\mu_x^u\}$*,sont absolument continues par rapport au mesures* $\{Leb^u_{W^u(x)}\}$.

Le but est de présenter le résultat suivant.

Théorème 1.3 *On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.*

(H_1*)* $Leb_M(\Lambda_\lambda) > 0$ *;*

(H_2*) le système* (M, f) *est conservatif pour la mesure de Lebesgue ;*

(H_3*) Pour tout* λ *suffisamment petit,* Λ_λ *vérifie une hypothèse de non intersection brutale.*

Alors, il existe une mesure borélienne, μ*,* σ*-finie,* f*-invariante et* σ*-SRB.*

2 Principaux lemmes techniques

Une des étapes importante de la preuve du théorème est d'obtenir l'existence d'un rectangle de points réguliers qui vérifie une propriété de Markov. Pour cela nous reprenons les idées de Bowen dans [2], et établissons un lemme de poursuite.

Lemme 2.1 *Posons* $\beta' = \min(1, \alpha, \dfrac{2\lambda}{\max(\log ||df^{-1}||, \log ||df||)})$. *Pour tout* $\beta < \beta'$*, les applications* $x \mapsto E^u(x)$ *et* $x \mapsto E^s(x)$ *sont* β*-höldériennes sur chaque* $\Lambda(n)$*. La constante de Hölder est alors égale à une constante* C *multipliée par* $l(x)$*.*

Pour un tel β, il nous apparaît deux constantes C, et p, qui permettent de définir pour tout x dans Λ, $\varepsilon_1(x) \stackrel{déf}{=} \inf\left((C\varepsilon)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{l^p(x)}, \frac{1}{l^3(x)}\right)$. Cette valeur permet alrs, de donner les définitions des pseudo-orbites et orbites pistantes.

Définition 2.2 *Soit* $\gamma \in]0, 1[$*. On appelle* γ*-pseudo orbite de* M *toute suite de points* $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ *telle que pour tout* i

(1) x_i *est un point de* Λ*,*

(2) $e^{-\varepsilon} l(x_{i+1}) \leq l(f(x_i)) \leq e^{\varepsilon} l(x_{i+1})$*,*

(3) $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \gamma.\varepsilon_1(x_{i+1})$ *et* $d(x_i, f^{-1}(x_{i+1})) \leq \gamma.\varepsilon_1(x_i)$*.*

On dira que l'orbite $(f^i(x))_{i\in\mathbb{Z}}$ *δ-piste la pseudo orbite* $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *si et seulement si pour tout i* $f^i(x) \in \Phi_(x_i)(B(0, \delta l(x_i)^{-2}))$.

Le lemme 2.1 nous garantie que si $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une γ-pseudo orbite, alors pour tout i les angles du type $Angle(E^u(f(x_i)), E^u(x_{i+1}))$ sont petits, ce qui nous permet d'utiliser la théorie de transformation de graphe. On prouve alors le résultat suivant.

Lemme 2.3 (lemme de poursuite) *Pour tout* $\delta > 0$ *il existe* $\gamma > 0$*, tel que toute* γ*-pseudo orbite soit* δ*-pistée par une orbite d'un point de* $\Lambda' \overset{déf}{=} \Lambda_{\lambda-4\varepsilon}$.

On recouvre ensuite un ensemble $\widehat{\Lambda} \supset \Lambda_\lambda$ de points par un nombre dénombrable de "rectangles", $\{T_i\}$, qui sont ensuite découpés en sous-rectangles du type $T^k_{i,j}$, comme dans [2]. L'hypohèse de non-intersection brutale introduite, ainsi que l'hypothèse de conservativité du système permettent alors de montrer le résultat suivant.

Lemme 2.4 *Il existe un ensemble* $R \subset \Lambda'$*, de mesure de Lebesgue positive tel que*

- *pour tout* $(x, y) \in R^2$, $W^u_{l'}(x) \cap W^s_{l'}(y) = \{z\}$*, et* $z \in R$ *;*
- *pour tout* $x \in R$*, il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^n(x) \in R$ *et* $f^{-m}(x) \in R$ *;*
- *pour tout* $x \in R$*, si* $f^n(x) \in R$*, avec* $n \geq 0$*, alors*

$$f^n\left(W^u_l(x) \cap R\right) \supset W^u_l(f^n(x)) \cap R \quad et \quad f^n\left(W^s_l(x) \cap R\right) \subset W^s_l(f^n(x)) \cap R.$$

3 Étapes de la preuve du théorème

La preuve du théorème repose essentiellement sur l'idée qu'une mesure SRB est caractérisée localement. Nous présentons ici les étapes principales de la preuve. Une démonstration plus complète pourra être trouvée dans [4].

3.1 Création d'un sous-système associé

On crée une suite de trois systèmes :

$$(M, f) \longrightarrow (R, g) \xrightarrow{\pi_F} (F, g_F)$$

Le passage du système global (M, f) au système (R, g) se fait par induction : pour tout point x de R, on définit $r(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) \in R\}$, premier temps de retour dans R. Ensuite on pose $g(x) \overset{déf}{=} f^{r(x)}(x)$. De plus, toute mesure f-invariante, m, telle que $m(R) > 0$, se restreint en une mesure g-invariante. Réciproquement, on a :

Lemme 3.1 *Si* μ *est mesure de probabilité* g*-invariante et ergodique, alors il existe une mesure* m*,* σ*-finie,* f*-invariante et ergodique telle que* m *restreinte à* R *soit égale à la mesure* μ*. Si de plus* $\int r\, d\mu < +\infty$*, alors la mesure* m *est finie.*

Dans le rectangle R, on choisit un point x_0 quelconque, puis on pose $F = W^u_l(x_0) \cap R$. La structure rectangle de R prouve qu'on peut définir une projection continue sur F, π_F. On définit alors l'application $g_F = \pi_F \circ g$. On établit aussi le lien entre le système induit (F, g_F) et le système (R, g) :

Lemme 3.2 *Si* ν *est une mesure de probabilité sur* F*,* g_F*-invariante et ergodique, alors il existe une unique mesure* μ *sur* R*,* g*-invariante, de probabilité et ergodique telle que*

$$(R, g, \mu) \xrightarrow{\pi_F} (F, g_F, \nu).$$

Le système (F, g_F) est un système qui s'apparante à un revêtement topologique expansif, à un nombre infini-dénombrable de feuillets. Si $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble de ses feuillets, alors l'application $g_{F,i} : F_i \to F$ égale à $g_{F|F_i}$ est un homéomorphisme höldérien pour tout i.

Définition 3.3 *Pour tout x de F, on appellera $Ant(x)$ l'ensemble des antécédents de x par l'application g_F.*

On remarque que pour tout $i$et pour tout x, F_i contient exactement un élément de $Ant(x)$.

3.2 Étude du système (F, g_F)

L'idée est d'utiliser la théorie des opérateurs de Perron-Frobenius comme dans [1] et [6]. Pour cela il faut d'abord étudier l'invariance de la mesure de Lebesgue sur F. La propriété d'absolue continuité des deux feuilletages, stable et instable, entraine deux résultats importants.

Lemme 3.4 *Pour tout borélien B de F, le terme $Leb^u_{W^u_l(x_0)}(B)$ est nul si et seulement si le terme $Leb_R(\pi_F^{-1}(B))$ est nul.*

Ce lemme prouve que F est de mesure de Lebesgue (sur $W^u_l(x_0)$) strictement positive, ce qui permet de définir la restriction renormalisée de la mesure de Lebesgue sur F, Leb_F.

Lemme 3.5 *La mesure Leb_F est conforme pour la transformation g_F : il existe une application borélienne sur F, J, telle que pour tout borélien B sur lequel g est injective, $Leb_F(g_F(B)) = \int_B e^{-logJ}\, dLeb_F$.*

Le lemme 2.1 prouve que l'application J est Hölder sur chaque F_i. En posant
$\mathcal{L}(\varphi)(x) = \sum_{y\in Ant(x)} e^{-\log J(y}\varphi(y)$, on définit un opérateur sur les fonctions L^1. De plus, la famille $\{\mathcal{L}^n(\mathbb{1}_F)\}$ est bornée dans L^∞, et Comme la boule unité B_∞ est compacte pour la topologie faible de (L^∞, L^1), on en déduit l'existence d'une fonction, φ_0, invariante par $\mathcal{L}$ dans L^∞. La mesure définie par $d\mu = \varphi_0\, dLeb_F$ est alors g_F-invariante, et équivalente à Leb_F. En "épaississant" la mesure comme dans le lemme 3.2 puis en "dépliant" comme dans le lemme 3.1, on achève la preuve du théorème.

Références

[1] R. Bowen. Some Systems with Unique Equilibrium States. *Mathematical Systems Theory*, 8(3) :193–202, 1974.

[2] R. Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic theory of Anosov Diffeomorphisms*, volume 470 of *Lecture notes in Math.* Springer-Verlag, 1975.

[3] F. Ledrappier and L.-S. Young. The metric entropy of diffeomorphisms Part I : Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula. *Annals of Mathematics*, 122 :509–539, 1985.

[4] R. Leplaideur. *Structure locale produit de mesures hyperboliques.* PhD thesis, Université Paris-Sud, 1997.

[5] Ya. B. Pesin. Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. *Russian math. Surveys*, 32(4) :55–114, 1977.

[6] D. Ruelle. Thermodynamic formalism for maps satisfying positive expansiveness and specification. *nonlinearity*, 5 :1223–1236, 1992.

[7] Lai-Sang Young. Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems. In *Proceedings of the NATO ASI*, 1995.