Cours de Topologie L3-math

Renaud Leplaideur

Année 2014-2015
UBO

Table des matières

Chapitre 1

Rappels, préliminaires

1.1 Rappels sur les ensembles

1.1.1 Formalisme ensembliste

Un ensemble E est une collection (éventuellement vide) *d'éléments*. L'ensemble vide se note $\emptyset$. Un ensemble décrit à partir de ses élément se note avec des accolades. Pour signifier que x est un élément de E on écrit $x \in E$.

Exemple 1. $\{0, 1, 2\}$ désigne l'ensemble composé des 3 éléments, 0, 1 et 2.

On dispose d'opération sur les ensembles :

1. L'intersection, $\cap$. Si A et B sont deux ensembles, $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.
2. L'union, $\cup$. Si A et B sont deux ensembles, $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (c'est à dire à au moins l'un des deux).
3. L'inclusion, $\subset$. Si A et B sont deux ensembles, écrire $A \subset B$ signifie que tous les éléments de A sont aussi éléments de B. On dit alors que A est un *sous-ensemble ou une partie* de B.
4. Le produit, $A \times B$, désigne l'ensemble des *couples* dont la première coordonnée est dans A et la deuxième dans B, c'est à dire

$$A \times B = \{(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Nier l'inclusion, $A \not\subset B$ signifie que A contient un élément qui n'est pas dans B. Ainsi, $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.

L'intersection et l'union peuvent se faire sur une famille quelconque. Ainsi, l'intersection de deux ensembles permet de définir par récurrence l'intersection d'un nombre fini d'ensembles. Mais on peut aussi avoir une intersection (ou une union) infinie :

Exemples 2.
$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ désigne l'intersection que tous les ensembles A_n c'est à dire

$$x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{si et seulement si } \forall n,\ x \in A_n.$$

$\bigcup_{x\in I} A_x$ désigne l'union des A_x, c'est à dire que y appartient à cette union si et seulement si y appartient à l'un (au moins) des A_x.

Exercice 1

1/ Décrire $\cap_{x\in]-1,1[}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.
2/ Décrire $\cup_{x\in]-1,1[}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.
3/ Décrire $\cap_{x\in]-\varepsilon,\varepsilon[}[x-1, x+1]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.

L'inclusion est une relation d'ordre partielle sur les ensembles. Relation d'ordre signifie que

1. l'inclusion est réflexive : $A \subset A$, .
2. L'inclusion est transitive : si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
3. L'inclusion est antisymétrique : si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.

Remarque 1. Cette dernière propriété permet de vérifier dans la pratique l'égalité de deux ensembles. On montre la double inclusion.

Dire $A \subsetneq B$ signifie que A est inclus strictement dans B, c'est à dire $A \subset B$ et $B \not\subset A$.

Si E est un ensemble, on définit un nouvel ensemble, appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$ qui est l'ensemble des sous-ensembles de E. Comme $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide ; il contient $\emptyset$ et E (si celui-ci n'est pas vide).

Si x est un élément de E, $\{x\}$ est un *singleton*, c'est à dire un ensemble qui ne contient qu'un unique élément, cet élément étant x. Ainsi $\{x\} \subset E$, ce qui s'écrit aussi $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$. **On prendra soin de ne pas confondre x et $\{x\}$**. L'un est un élément de E, l'autre un sous-ensemble de E.

Exemple 3. Ainsi les écritures $x \subset E$ et $\{x\} \in E$ n'ont aucun sens.

Dans ce cours on utilisera souvent des chaînes d'appartenance du type :

$$\boxed{x \in U \subset A}$$

ce qui signifie que x est un élément d'un ensemble U qui est lui un sous-ensemble de A.

Exemple 4. On pourra écrire $x \in \{x\} \subset E$.

Lemme 1.1.1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On pose $B_i := E \setminus A_i$. Alors*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = E \setminus \bigcup_{i\in I} B_i$$

Démonstration. Par définition du complémentaire un élément de E appartient à exactement l'un des ensembles A_i ou B_i. Dire $x \in \cap A_i$ signifie que x est dans tous les A_i donc dans aucun B_i donc dans le complémentaire de $\cup B_i$.

Réciproquement, dire $x \in E \setminus \cup B_i$ signifie que x n'est dans aucun B_i dans dans tous les A_i. □

1.1.2 Applications

Premières définitions

Étant donnés deux ensembles E et F, on appelle *application* de E vers F toute opération qui consiste à associer à chaque élément x de E un élément (et un seul) dans

F. Souvent, on donne un nom à l'application, et souvent ce sera f, et l'élément associé à x se note $f(x)$. On note aussi

$$f : x \mapsto x$$

pour dire qu'on considère l'application f. L'ensemble E est l'ensemble de départ, l'ensemble F est l'ensemble d'arrivée. Ils ne sont pas nécessairement identiques (ni de "même nature").

Si x est un élément de E et $f : E \to F$ une application, $f(x)$ s'appelle *l'image* de x par f. Si y est un élément de F (ensemble d'arrivée) et si on a $y = f(x)$, alors on dire que x est **un** *antécédent* de y par x. Si x n'a qu'une seule image, l'élément y peut lui avoir plusieurs antécédents (ou aucun).

Une application $f : E \to F$ se caractérise par son *graphe*. Le graphe de f est l'ensemble des éléments de $E \times F$ de la forme $(x, f(x))$.

Il est courant de parler d'une application à partir de son expression en x lorsque celle ci existe. C'est cependant un **abus de langage source d'erreurs de d'incompréhensions**.

Exemple 5. On parle de x^2 pour décrire l'application qui associe à chaque x de $\mathbb{R}$ son carré, $x^2 = x.x$. On voit aussi e^x pour $x \mapsto e^x$ ou encore $\sin(x)$ pour l'application sinus ou sin.

On rappelle que $f : E \to F$ est dite :

1. *injective* si chaque y de l'ensemble d'arrivée a **au plus** un antécédent par f. Cela signifie aussi que toute paire d'éléments x et x' différents dans E, $f(x) \neq f(x')$, ou encore, que si $f(x) = f(x')$, alors (nécessairement) $x = x'$.
2. *surjective* si tout élément y de l'ensemble d'arrivée a **au moins** un antécédent par f.
3. *bijective* si elle est injective et bijective.

Exemple 6. exp une une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. $x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective lorsqu'on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle est injective si on restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{R}_+$ et surjective si on restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}_+$ également.

Si $f : E \to F$ est une bijection, chaque y de F admet un unique antécédent par f. Cela définit une autre application, inverse de f, notée (souvent) f^{-1}. Elle vérifie

$$\boxed{f(x) = y \iff y = f^{-1}(x)}$$

Images et préimages d'ensembles

On considère une application f de E vers F.

Définition 1.1.2. *Si A est une partie de E, l'ensemble des points images par f des éléments de A se note $f(A)$. Si B est une partie de F, l'ensemble des éléments de E ayant une image par f dans B se note $f^{-1}(B)$.*

Remarque 2. Il s'agit de **notations**. Il faut apprendre à distinguer $f(x)$ de $f(\{x\})$, $f^{-1}(y)$ (valable seulement si f est bijective) et $f^{-1}(\{y\})$. ■

Question 1. Les opérations ensemblistes $\cap$ et $\cup$ sont-elles préservées par f ?

On retiendra : les opérations ensemblistes ne sont pas nécessairement préservées par les images directes mais le sont par les images réciproques :
$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,
$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

1.1.3 Ensemble et structure

Rappels sur $\mathbb{R}$

On rappelle que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$ et que tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.

On rappelle que $\mathbb{R}$ est caractérisé par la propriété de la borne supérieure : toute partie non vide majorée admet une borne supérieure (c'est à dire un plus petit majorant).

Structure

On prendra soin de ne pas confondre un ensemble E avec ce même ensemble E *muni d'un structure*. Par exemple l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut-être muni (ou non) de plusieurs structures :

1. $\mathbb{R}$ est groupe (muni de la loi $+$).
2. $\mathbb{R}$ est un anneau (muni des lois $+$ et $\times$).
3. $\mathbb{R}$ est un corps.
4. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.
5. $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.
6. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie non-dénombrable.

Lorsque l'ensemble est muni d'une structure, on a des opérations qui ont du sens, d'autres qui n'en n'ont pas.

Exemple 7. A-t-on l'égalité $2 = \frac{4}{2}$?

Oui si on travaille dans $\mathbb{Q}$, non si on travaille dans $\mathbb{Z}$. Plus précisément, $\frac{4}{2}$ n'existe pa dans $\mathbb{Z}$.

Étant donnés deux ensembles E et F équipés d'une même structure, on est naturellement amené à étudier les applications allant de E vers F et qui préservent la structure, c'est à dire qui transporte la structure sur E vers la structure sur F. On parle de morphisme (qui préserve la forme).

Exemple 8. Morphismes de groupes, d'anneaux, de corps, applications linéaires, etc.

Dans ce cours, la structure s'appellera une topologie et les applications qui préservent cette structure sont les applications continues.

On cherche aussi à caractériser les morphismes injectifs, surjectifs et bijectifs, et aussi les morphismes bijectifs dont l'application réciproque est aussi un morphisme.

1.2 Cardinalités, ensembles compliqués

1.2.1 Cardinal d'un ensemble-Ensemble (non)-dénombrable

Lorsqu'un ensemble a un nombre fini d'élément, ce nombre s'appelle de *cardinal* de l'ensemble. Les choses deviennent plus compliquées dès que l'on passe en cardinalité infinie.

Définition 1.2.1. *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$.

Rappelons que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Avec cette définition un ensemble de cardinal n est dénombrable, puisqu'il est en bijection avec $\{0, \ldots, n-1\}$. Parfois, la définition de dénombrable sous-entend que l'ensemble est de cardinal infini.

Lorsque le cardinal est fini, il y a des relations claires entre injection surjection et bijection : il ne peut y avoir de surjection d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de carinal $m > n$, il ne peut y avoir d'injection d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal $m < n$ et si deux ensembles de cardinal finis sont en bijection, alors ils on tel même cardinal (c'est aussi une condition suffisante).

Exemples 9.
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Pourtant on a $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

Exercice 2
L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Contre-exemple 10. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Pour le vérifier, il suffit de montrer que l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Pour montrer cette assertion, on montre que $[0, 1]$ contient une copie de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Comme ce dernier n'est pas dénombrable, alors la proposition est démontrée. Pour vérifier que $[0, 1]$ contient une copie de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, il suffit de se souvenir que tout réel s'écrit en binaire sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-(n+1)},$$

avec les x_i dans $\{0, 1\}$.

En fait cette écriture n'est pas unique, à cause des dyadiques $(011111111\ldots = 100000\ldots)$. Mais cet ensemble est dénombrable et donc le complémentaire ne l'est pas.

1.2.2 Ensembles compliqués

Escalier du diable

On peut dissocier les dyadiques en considérant leur écriture avec des zéro à la fin ou avec des 1 à la fin. Pour cela on introduit un petit intervalle entre les 2 valeurs et on fait décroître la taille de cet intervalle en fonction l'ordre du dyadique.

Si la décroissance est exponentielle, on récupère un intervalle de longueur finie. Il peut servir pour construire un escalier du diable :

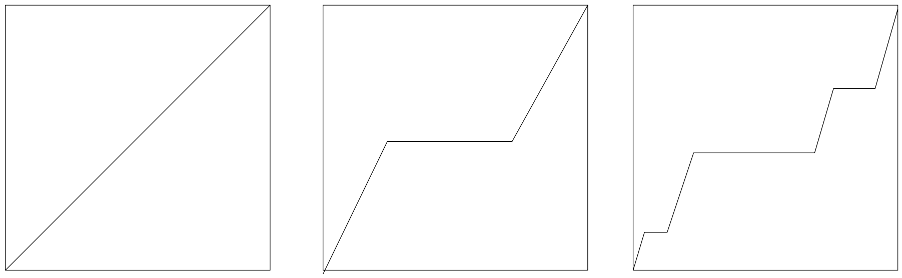
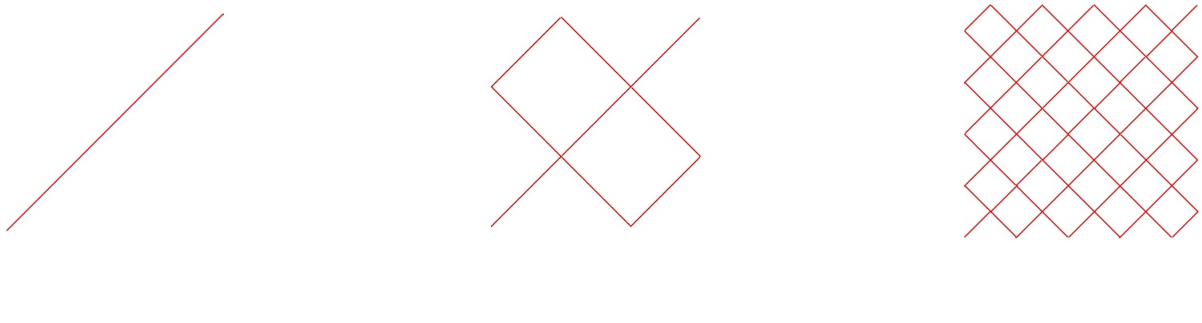


Figure 1.1 – Escalier du diable

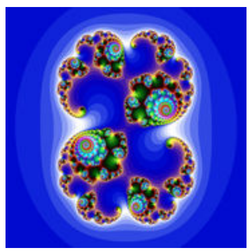
Peigne de Dirac

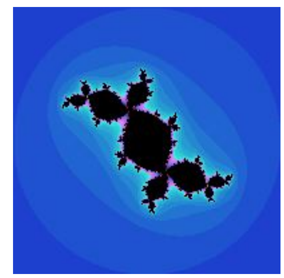
L'ensemble $\mathbb{Q} \times [0,1]$ vu dans $\mathbb{R}^2$.

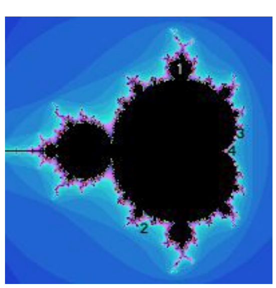
courbe de Peano



Fractales







1.3 Objectifs du cours

Question 2. Brest est situé à 500km de Paris. Marseille est situé à 660km de Paris. Le train Brest-Paris met 4h30 (le plus rapide), le Marseille-Paris met 3h20. J'ai rendez-vous avec un collègue marseillais à Paris. Qui est y le plus proche ?

Question 3. Entre les fonctions e^x, $\ln x$ et x^2, quelles sont les plus proches ?

Question 4. Suite de fonction qui converge $\mathcal{C}^0$ mais pas $\mathcal{C}^1$ (PhSP).

Question 5. distance entre feuilles qui s'accumulent ?

Chapitre 2

Espaces métriques

2.1 Notions, objets et propriétés topologiques

2.1.1 Définition d'une distance, exemples et contre-exemples

Espace métrique

Soit E un espace non vide.

Définition 2.1.1. *On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *pour tout x et pour tout y, $d(x, y) = d(y, x)$,*
2. *$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,*
3. *pour tout x, y, z $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).*

Un espace équipé d'une distance s'appelle un espace métrique.

Exemples et contre-exemples

• Dans $\mathbb{R}$ la valeur absolue est une distance.

• Dans $\mathbb{R}^2$, la métrique SNCF La distance entre A et B vaut $AO + OB$. La distance entre C et D vaut CD.

• Dans le demi-plan (ouvert) supérieure la métrique hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Si A et B sont sur la même verticale la distance vaut

$$\int_{[A,B]} \frac{dy}{y^2}.$$

Sinon, ils sont nécessairement sur un unique cercle centré sur la droite $y = 0$, et la distance vaut

$$\int_{\widehat{AB}} \frac{dt}{y^2}.$$

• Dans l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Un élément x est une suite (x_n) (on parle aussi de mot infini) de 0 et de 1. La distance "usuelle" est donnée par le temps de coïncidence/séparation :

$$d(x, y) = 2^{-min\{k,\ x_k \neq y_k\}}.$$

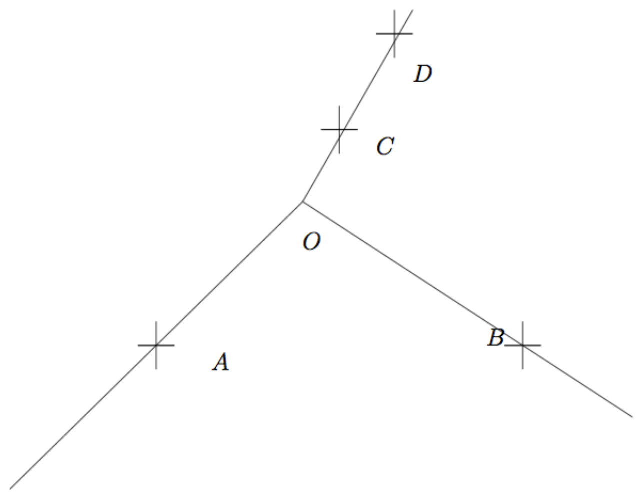


Figure 2.1 – Métrique SNCF

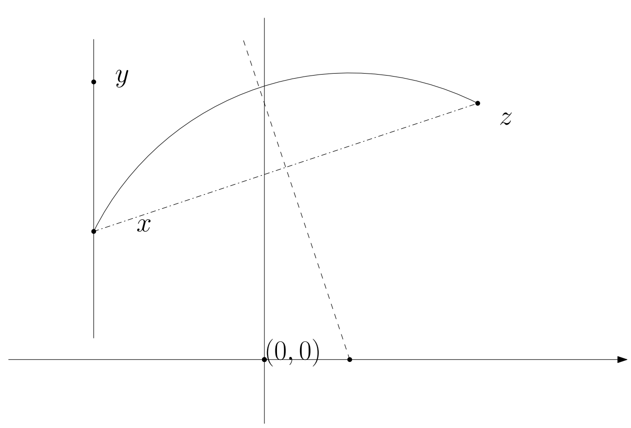


Figure 2.2 – Métrique de Poincaré

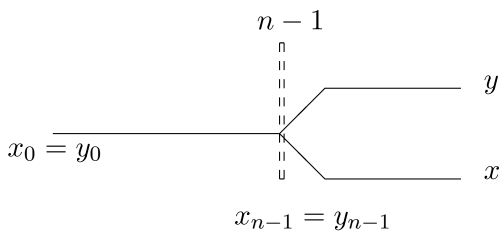


FIGURE 2.3 – x and y coincident pour n digits puis se séparent.

Il n'est cependant pas évident qu'un espace possède une métrique. Voyons quelques exemples moins évidents.
- espace de feuilles (issues d'un équation diff $y' = ay$ et $y(0) = 1$).
- Espace de feuilles qui s'accumulent.

Question 6. Quelle distance sur $\mathbb{R}$ quotienté par $\mathbb{Q}$?

On considère un irrationnel α puis la relation

$$x \sim y \iff x - y \in \alpha\mathbb{Q}.$$

C'est une relation d'équivalence et on considère alors l'ensemble des classes d'équivalences. Il y a une projection naturelle de $\mathbb{R}$ sur cet ensemble noté $\mathbb{R}_{/\sim}$. On voudrait mettre une distance "naturelle" sur cet espace. Comment faire ?

Boules ouvertes et fermées

Définition 2.1.2. *Soit (E, d) un espace métrique (non-vide). Soient $x \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$. On appelle* boule ouverte *de centre x et de rayon ε l'ensemble $\{y \in E,\ d(x, y) < \varepsilon\}$. On le note $B(x, \varepsilon)$.*

On appelle boule fermée *de centre x et de rayon ε l'ensemble $\{y \in E,\ d(x, y) \leq \varepsilon\}$. On le note $\overline{B(x, \varepsilon)}$.*

Exemples 11.
Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $|\ \ |$, $B(0, \varepsilon)$ est l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\overline{B(x, \varepsilon)}$ est l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

Dans $\mathbb{R}^2$+ SNCF ?

Dans $\mathbb{H}^2$?

Remarque 3. La définition de boule considère que ε peut être négatif. On prendra soin de vérifier qu'une boule (ouverte ou fermée) de rayon $\varepsilon < 0$ est vide, ainsi qu'une boule ouverte de rayon nul. Que vaut $\overline{B(x, 0)}$? ■

Lemme 2.1.3. *Si x est dans E, pour $\varepsilon < \varepsilon'$, $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon')$ et $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset \overline{B(x, \varepsilon')}$.*

Exercice 3
Montrer qu'on a aussi $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset B(x, \varepsilon')$.

2.1.2 Ensembles ouverts, ensembles fermés

À partir de maintenant on considère un espace métrique (non-vide) (E, d).

Définition 2.1.4. *Un ensemble $A \subset E$ est dit* ouvert *si pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$B(x, \varepsilon) \subset A.$$

Un ensemble A est dit fermé *si $E \setminus A$ est ouvert.*

Exemples 12.
Une boule ouverte est ouverte, une boule fermée est fermée.

Dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$, tout intervalle ouvert $]a, b[$ est ouvert.

Proposition 2.1.5.

1. *Les parties E et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermées.*
2. *Toute union d'ouverts est encore un ouvert.*
3. *Toute intersection* **finie** *d'ouverts est un ouvert.*
4. *toute intersection de fermés est un fermé.*
5. *toute union* **finie** *de fermés est un fermé.*

Démonstration. Si x est un point de E, par définition $B(x, 1) \subset E$ et donc E est ouvert. Montrons que E est aussi fermé. Si A est une partie de E, dire que A n'est pas un ouvert signifie :

$$\exists x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \not\subset A.$$

Ceci montre que $\emptyset$ est un ouvert puisqu'aucun élément de $\emptyset$ ne peut vérifier cette proposition. Ainsi $E = E \setminus \emptyset$ est fermé. De même $\emptyset = E \setminus E$ et est donc fermé.

Les deux dernières assertions se montrent par passage au complémentaire des deux précédentes.

Considérons donc une union d'ouverts, U_i (avec $i \in I$). Si x est dans $\cup_i U_i$, il existe $j = j(x)$ tel que $x \in U_j$. Comme U_j est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Donc

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset U_j \subset \bigcup_i U_i.$$

Pour traiter l'intersection finie, il suffit de traiter le cas d'une intersection de deux ouverts. Soient A et B deux ouverts. Si $A \cap B = \emptyset$ c'est terminé. Sinon, soit $x \in A \cap B$. L'ensemble A est ouvert donc on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon_A)$ incluse dans A. De même, on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon_B)$ incluse dans B. Posons

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_B).$$

La boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans A et dans B donc dans $A \cap B$. $\square$

Attention. Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées. Par exemple tout intervalle semi-ouvert $[a, b[$ (non vide) n'est ni ouvert ni fermé.

Il existe aussi des parties qui sont ouvertes et fermées (comme E et $\emptyset$).

On peut légitimement se demander si une intersection quelconque d'ouvert est un ouvert ou non. Pour comprendre l'obstruction il faut regarder la preuve et comprendre ce qui ne passe pas au cas d'une intersection infinie (dénombrable ou non).

Le problème vient du fait que dan sel cas d'une intersection infinie il faudra considérer un inf et non plus un min. Cet inf peut être nul, même si tous les ε_i sont strictement positifs.

Exemple 13. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[= \{0\}$ qui est fermé.

Exercice 4
Donner des exemples d'intersection infinies d'ouverts qui sont ouvertes ou ni ouvertes ni fermées. Pareil pour des union de fermés.

À quoi ça sert ? La question n'a pas vraiment de sens mais on peut quand même y apporter quelques éléments de réponse :

1. Les ouverts (et les fermés) permettront de définir la continuité et donc toute l'analyse.
2. Moralement, les ouverts autorisent une petite erreur. Les fermés emprisonnent/capturent.

En guise d'illustration voici deux exemples :

Exemples 14.
Lors de la création de l'univers il y avait presque autant de matière que d'anti-matière. Ici ce qui est important c'est la légère différence qui est devenue maintenant une très grande différence. Si $|k| < 1$ (condition ouverte) $k^n \to 0$ si $n \to +\infty$.

Une suite de réels positif qui décroît converge vers un réel positif. Ici on utilise que $[0, +\infty[$ est fermé.

2.1.3 Intérieur, adhérence, ensembles denses

définitions et premières caractérisations

Nous venons de voir qu'il y a des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés. Cependant, on peut tout de même leur associer des ouverts et fermés particuliers :

Définition 2.1.6 (et proposition)**.** *Soit A une partie de E. On appelle* intérieur de A *et on le note $\mathring{A}$ le plus grand ouvert*[1] *inclus dans A. Tout point $x \in \mathring{A} \subset A$ est dit intérieur à A.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'union (éventuellement vide) de tous les ouverts inclus dans A. Par la Proposition 2.1.5 c'est un ouvert, inclus dans A et c'est nécessairement le plus grand possible. □

Exemple 15. L'intérieur de $[a, b[$ est l'intervalle $]a, b[$.

1. la partie proposition de cet énoncé est qu'un tel ouvert existe

Remarque 4. Si x appartient à $\mathring{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset \mathring{A} \subset A$. ■

Exercice 5
Montrer que si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset A$ alors $x \in \mathring{A}$.

Définition 2.1.7 (et proposition)**.** *Soit A une partie de E. On appelle adhérence de A et on la note $\overline{A}$ le plus petit fermé qui contient A. Un point x de $\overline{A}$ est dit adhérent à A.*

Démonstration. Considérer l'intersection de tous les fermés qui contiennent A. □

Théorème 2.1.8. *Soit A une partie de E. Alors $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E - A}}$.*

Démonstration. Si F est un fermé qui contient A, $E \setminus F$ est un ouvert contenu dans $E \setminus A$. Réciproquement, si U est un ouvert contenu dans $E \setminus A$, $E \setminus U$ est un fermé qui contient A. Cela signifie que indexer par les fermés qui contiennent A revient à indexer par les ouverts qui sont contenus dans $E \setminus A$. Ainsi, le Lemme 1.1.1 montre que l'on a :

$$\bigcap_{F \supset A} F = \bigcap_{U} E \setminus U = E \setminus \bigcup_{U \subset E \setminus A} U = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}.$$

□

Corollaire 2.1.9. *Un point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ intersecte A.*

Démonstration. Ne pas être dans $\overline{A}$ signifie être dans son complémentaire, c'est à dire l'intérieur de $E \setminus A$. Dans ce cas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans $E \setminus A$. Ainsi, $x \in \overline{A}$ signifie qu'aucune boule $B(x, \varepsilon)$ n'est incluse dans $E \setminus A$, ce qui revient à dire que toutes les boules rencontrent A. □

Exemple 16. L'adhérence de $[a, b[$ est $[a, b]$.

Propriétés

- Par définition on a $\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}}$.
- $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert.

  Si $A \subset \mathring{A}$ alors A est contenu dans le plus grand ouvert qu'il contient, il est donc égal à cet ouvert donc est ouvert. Si A est ouvert, il est bien le plus grand ouvert qu'il contient.
- $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

  Si A est fermé, il est le plus petit fermé qui le contient. Réciproquement, s'il est le plus petit fermé qui le contient il est fermé.
- $\boxed{E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}}$ (Théorème 2.1.8).
- $\boxed{\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}}$.

  Si x est dans $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, il existe ε tel qu'on ait $x \in B(x, \varepsilon) \subset A \cap B$. Donc $B(x, \varepsilon)$ est dans A et dans B et x est dans $\mathring{A}$ et dans $\mathring{B}$. Réciproquement si x est dans $\mathring{A}$ et dans $\mathring{B}$ on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon)$ qui sera dans A et dans B donc x est dans $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

- $\boxed{\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$.

  $\overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{B}$ sont des ouverts respectivement inclus dans A et B, donc leur union est incluse dans $A \cup B$ dans dans le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$.
- L'inclusion inverse n'a pas forcément lieu, comme le montre l'exemple $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- par passage au complémentaire on obtient $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$.

Exercice 6
Montrer ces deux dernières propriétés à l'aide de la caractérisation par les boules des adhérences.

Partie dense

Définition 2.1.10 (et proposition)**.** *Une partie A de E est dite dense si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

1. *$\overline{A} = E$,*
2. *Tout ouvert (non vide) de E rencontre A.*

Démonstration. Supposons que tout ouvert de E rencontre A. considérons x dans E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la boule (ouverte) $B(x, \varepsilon)$ rencontre A, donc x est dans $\overline{A}$. Cela montre $E \supset \overline{A}$, l'autre inclusion étant immédiate.

Réciproquement, si $\overline{A} = E$, si U est une ouvert de E (non vide) alors il contient un point x et on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon)$ incluse dans U. cette boule rencontre A, donc U rencontre A. □

Exemples 17.
$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle).

On verra le théorème de Stone-Weierstrass (**??**) qui stipule que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un segment pour la norme de la convergence uniforme.

La théorie de séries de Fourier résulte de la densité des fonctions $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ dans les fonctions 1-périodiques (mais pour une distance plus compliquée).

Définition 2.1.11. *Un espace est dit séparable s'il existe une famille dénombrable dense.*

Exemple 18. Les fonctions 1-périodiques pour la distance (en fait une norme) citée précédemment est séparable.

La séparabilité est une propriété pratique : lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les points de l'espace, si cette propriété est "continue" il suffit de la vérifier sur une famille dénombrable dense. c'est souvent plus facile.

2.2 Suites dans un espace métrique-Espaces complets

2.2.1 Convergence-divergence

Formellement une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Au lieu de noter les images $f(n)$ on les note souvent x_n. La suite est la donnée de tous ses éléments et elle se note

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou souvent tout simplement (x_n)). On prendra soin de différencier le terme x_n de la suite (x_n).

Les suites permettent de caractériser qu'un ensemble est ouvert ou fermé. Mais surtout, les suites sont plus faciles pour appréhender l'idée de limite car elles ne considèrent qu'un ensemble dénombrable de points.

Définition 2.2.1. *Soit (x_n) une suite définie dans un espace métrique (E, d). On dit qu'elle converge vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ x_n \in B(l, \varepsilon). \tag{2.1}$$

Le point l s'appelle **la** *limite de la suite. Une suite qui converge est dite convergente. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.*

Exercice 7

1/ Vérifier qu'on retrouve la notion connue dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$.
2/ Vérifier que le point l est unique ce qui permet de définir **la** limite.

Exercice 8
Donner des exemples de suites convergentes ou divergentes dans $\mathbb{R}^2$ + sncf

Exercice 9
Donner un exemple de suite qui converge dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une métrique d mais qui ne converge pas dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une autre métrique d'.

2.2.2 Caractérisation des adhérences et des fermés

Théorème 2.2.2. *Soit A une partie (non vide) de E. Un point x appartient à $\overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers x.*

Démonstration. Si x est dans $\overline{A}$, pour chaque n, la boule $B(x, \dfrac{1}{n+1})$ rencontre A. On choisit au hasard un point de $A \cap B(x, \dfrac{1}{n+1})$ qu'on appelle x_n.

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe N tel que $\dfrac{1}{N+1} < \varepsilon$, et donc pour chaque $n \geq N$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Cela montre que (x_n) converge vers x.

Réciproquement, si (x_n) converge vers x, la proposition 2.1 montre immédiatement que pour chaque $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ rencontre A, donc x est dans $\overline{A}$. □

Comme une partie A est fermée si et seulement si elle vaut son adhérence, on obtient facilement la caractérisation suivante d'un fermé :

Théorème 2.2.3. *Une partie A est fermée si et seulement si toute suite à valeur dans A qui converge a sa limite dans A.*

Remarque 5. On utilise souvent un sens de l'équivalence : une suite à valeurs dans un fermé et qui converge a sa limite dans le fermé. C'est ce que “capturer” voulais exprimer (voir plus haut). ■

Exemples 19.
Une suite de réels positifs qui converge converge vers une limite positive (au sens large).

Si pour tout n $x_n < y_n$ (ou $x_n \leq y_n$) et si les suites convergent vers x et y, alors $x \leq y$ (noter l'inégalité large, signe de fermeture).

Le théorème des gendarmes.

2.2.3 Caractérisation des intérieurs (et des ouverts)

Voici la caractérisation des points intérieurs avec les suite. Elle est cependant peu utile car elle demande des hypothèses fortes.

Théorème 2.2.4. *Soit A une partie de E. Un point x est dans $\mathring{A}$ si et seulement pour toute suite convergente vers x, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans A.*

Que tous les termes à partir d'un certain rang soit dans A s'écrit en terme de quantificateur de la manière suivante :

$$\exists N, \forall n \geq N, x_n \in A.$$

Les hypothèses sont fortes car il faudrait les vérifier pour toute suite convergente. Il y a beaucoup de suites et il faut aussi qu'elles soient convergentes.

On utilise souvent une version plus faible (qui ne caractérise donc pas les intérieurs) : si x est dans $\mathring{A}$ et si (x_n) converge vers x alors à partir d'un certain rang tous les termes sont aussi dans A.

Preuve du Théorème 2.2.4. Si x est dans $\mathring{A}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset A$. La convergence $x_n \to x$ signifie qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans $B(x, \varepsilon)$ donc dans A.

La réciproque se fait par la contraposée. On suppose que x n'est pas dans $\mathring{A}$ et on montre qu'il existe une suite (x_n) convergente vers x et dont aucun point n'est dans A. Dire que x n'est pas dans $\mathring{A}$ signifie qu'il est dans $\overline{E \setminus A}$. On peut donc trouver une suite (x_n) d''éléments de'$E \setminus A$ qui converge vers x (Théorème 2.2.2). □

À partir de ce théorème on peut "caractériser" les ouverts en utilisant le fait que A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$. Mais c'est un peu artificiel et peu pratique.

2.2.4 Complétude

Définition

La question vraiment importante est de trouver un critère de convergence pour une suite. Bien sûr, si on connait *a priori* la limite on peut tenter de démontrer la convergence mais, dans la pratique, le problème consiste plutôt à construire une suite et essayer de voir si elle peut converger (sans avoir idée de sa limite). Le seul critère connu s'appelle le critère de Cauchy. Il n'implique cependant pas la convergence de la suite dans tous les espaces.

Définition 2.2.5. *Soit (E, d) un espace métrique On dit qu'une suite (x_n) vérifie le critère de Cauchy*[2] *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n, m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Vérifier le critère de Cauchy signifie que tous les termes s'agglutinent à partir d'un certain rang. On espère alors qu'il s'accumuleront autour d'une limite :

Proposition 2.2.6. *Une suite convergente vérifie le critère de Cauchy.*

Démonstration. Laissée en exercice □

Définition 2.2.7. *Un espace métrique (E, d) est dit* complet *si toute suite de Cauchy converge.*

Remarque 6.

1. Dans un espace complet, il y a donc équivalence entre converger et être de Cauchy.
2. Il existe des espaces qui ne sont pas complets. Dans un espace complet, une suite de Cauchy ne converge pas nécessairement (mais ne diverge pas nécessairement).
3. Être complet dépend de la métrique. Un ensemble E peut être complet lorsqu'on le munit d'une métrique d mais pas si on le munit d'une autre métrique d'. nous verrons des exemples au chapitre 5.

■

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Pour montrer que $\mathbb{R}$ est complet on se ramène à utiliser la propriété de la borne supérieure.

On commence par montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. Si elle est située dans l'intervalle $[-a, a]$ on considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des réels qui n'ont qu'un nombre fini de terme de la suite plus petit qu'eux-même. Cet ensemble est non-vide (il contient $]-\infty, -a]$) et majoré (par a). On en prend la borne supérieure qu'on appelle l.

On se fixe $\varepsilon > 0$ et on considère la boule $B(l, \varepsilon/2) =]l - \varepsilon/2, l + \varepsilon/2[$. Par définition de la borne supérieure, il existe un élément de $\mathcal{A}$ dans l'intervalle $]l - \varepsilon/2, l]$. Soit α un tel élément. Par définition il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de la suite qui sont plus petit que α. À partir d'un certain rang, tous les termes sont plus grands.

Comme l est la borne supérieure de $\mathcal{A}$, $l + \varepsilon/2$ n'est pas dans $\mathcal{A}$ et il y a une infinité de termes de la suite qui lui sont inférieurs. Si parmi cette infinité on se restreint à ceux qui sont supérieurs à α, on n'en retire qu'un nombre fini. On utilise alors la propriété de Cauchy avec $\varepsilon/2$ et on arrive ainsi à montrer qu'à partir d'un certain rang, fou sels termes sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon/2, l + \varepsilon[$. Cela montre la convergence de la suite vers l.

Pour voir que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, on construit n'importe quelle suite de rationnelle qui converge vers un irrationnel ($\sqrt{2}$ par exemple ou mieux e qu'on encadre par deux suites adjacentes).

2. on dit aussi “est de Cauchy”.

Une construction de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs façons de construire $\mathbb{R}$. Nous donnons ici une méthode, basée sur la complétion de $\mathbb{Q}$; l'objectif n'étant pas de faire un cours, et qui plus est, la méthode utilisant des notions revues ultérieurement, nous nous contenterons de ne donner que quelques étapes.

Rappelons cependant que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, c'est à dire l'ensemble des fractions du type $\frac{p}{q}$, avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$. On peut donc construire $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$ (c'està dire $(\mathbb{Z}, +, \times)$) commme corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

1. On appelle suite de rationnels, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Une telle suite se notera généralement $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Une suite de rationnels, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente vers $a \in \mathbb{Q}$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N,\ \forall\ n \geq N\ |x_n - a| < \varepsilon.$$
Une suite de rationnels est dite de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N,\ \forall\ n, p \geq N\ |x_n - x_p| < \varepsilon.$$
Une suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse. À ce stade il est primordial de se demander où vit ε ; comme il s'agît de construire $\mathbb{R}$ **on ne peut évidemment pas prendre ε dans $\mathbb{R}$**. On le choisit donc dans $\mathbb{Q}$!
3. Une suite de Cauchy est bornée. On note $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites de Cauchy ; $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ est une algèbre.
4. L'ensemble $\mathcal{I}$ des suites de rationnels qui convergent vers 0 est un idéal de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. On note $\mathbb{R}$ l'anneau quotient $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{I}$. C'est un corps.
5. On note ϕ la surjection canonique entre $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ et $\mathbb{R}$. On appelle alors $\mathbb{R}_+$ l'image par ϕ des suites de Cauchy dont tous les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
6. On définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ par
$$X \leq Y \iff Y - X \in \mathbb{R}_+.$$
Cette relation d'ordre est totale sur $\mathbb{R}$. On peut aussi définir $>$ et $<$, et donc les intervalles ouverts, fermés ou semi-ouverts.
7. On peut ainsi définir la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. On peut aussi plonger $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ prolonge celle sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (tout intervalle $]A, B[$ contient un rationnel). Enfin, $\mathbb{R}$ est complet (toute suite de Cauchy converge).
8. Si A est un sous-ensemble de l'ensemble totalement ordonné E, un élément a de E est appelé majorant de A si pour tout b dans A, $b \leq a$(resp. un élément c de E est appelé minorant de A si pour tout b dans A, $b \geq a$) ; a est dit *borne supérieure* de A si c'est le plus petit des majorants de A (*i.e.* c'est un majorant et tout élément plus petit que lui n'est pas un majorant de A). On définit de même la borne inférieure comme le plus grand des minorants. Avec cette définition, le corps totalement ordonné $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure :

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Applications et/ou caractérisation de $\mathbb{R}$.

La propriété de la borne supérieure est très importante. Elle permet de montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien et complet :

Proposition 2.2.8. *Pour tout réel x, il exsite un unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$ et montrons qu'il est non vide et majoré. Si $x \geq 0$ l'ensemble est non vide. Si $x < 0$, et si l'ensemble était vide, on aurait alors montré que $\mathbb{Z}$ est minoré dans $\mathbb{R}$. Il admettrait alors une borne inférieure, notée N. Par définition, il existerait un entier n vérifiant

$$N \leq n < N + 1.$$

Ceci donnerait alors $n - 1 < N$, ce qui est une contradiction ; ainsi A est non vide, et par définition il est majoré. Notons $[x]$ sa borne supérieure. Par définition, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_ε dans A tel que

$$[x] - \varepsilon < n_\varepsilon \leq [x].$$

Pour ε et ε' fixés, on aura $|n_\varepsilon - n_{\varepsilon'}| < \varepsilon + \varepsilon' < 1$, dès que ε et ε' sont suffisament petits. En considérant tous les $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on montre que $[x]$ est un entier. □

Exercice 10
Montrer que si on suppose $\mathbb{R}$ archimédien et complet, alors on peut montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure.

Exercice 11
Montrer que le seul isomorphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ est l'identité.

étapes de la solution. On montre qu'un tel isomorphisme de corps laisse nécessairement $\mathbb{Z}$ ponctuellement invariant ($\phi(n) = n$ pour tout entier).
On montre que cela est encore vrai pour tous les rationnels.
On montre qu'il est forcément positif, c'est à dire que l'image d'un réel positif doit être positif.
On trouve 2 suites de rationnels qui approchent un réel x par valeur inférieure et supérieure. L'image de x doit être comprise entre les 2 suites images qui convergent vers la valeur x.

2.2.5 Application de la complétude : le théorème de Baire

Le théorème de Baire est un théorème très puissant pour démontrer qu'un ensemble n'est pas vide. Au lieu de se contenter que l'ensemble en question n'est juste pas vide, on montre qu'il est en fait très gros.

Théorème 2.2.9 (Baire)**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit U_n une famille (dénombrable) d'ouverts denses. Alors $\bigcap_n U_n$ est dense.*

Remarque 7. On ne dit pas que $\bigcap_n U_n$ est ouvert. ■

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\bigcap_n U_n$ rencontre n'importe quel ouvert. Comme un ouvert contient des boules, il suffit de démontrer que $\bigcap_n U_n$ rencontre n'importe quelle boule (ouverte).

On considère donc une boule $B(x, \varepsilon)$. U_0 est dense donc rencontre cette boule. L'intersection est d'ailleurs un ouvert et on peut trouver une boule $B(x_0, \varepsilon_0)$ dans $B(x, \varepsilon) \cap U_0$. Quitte à réduire celle-ci, on peut supposer que l'on a

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset B(x, \varepsilon).$$

L'ouvert U_1 est dense, donc il rencontre $B(x_0, \varepsilon_0)$, et le même argument permet de construire une boule $B(x_1, \varepsilon_1)$ dans l'intersection avec $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ et $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset B(x_0, \varepsilon_0)$.

Par récurrence, on construit une suite de boules

$$B(x, \varepsilon) \supset B(x_0, \varepsilon_0) \supset B(x_1, \varepsilon_1) \supset \ldots \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \ldots,$$

où chaque $B(x_i, \varepsilon_i)$ est dans U_i et avec

$$0 < \varepsilon_{i+1} < \frac{\varepsilon_i}{2} \text{ et } \overline{B(x_{i+1}, \varepsilon_{i+1})} \subset B(x_i, \varepsilon_i).$$

Par construction $B(x_n, \varepsilon_n)$ est en fait incluse dans $U_1 \cap \ldots \cap U_n$. La décroissance des ε_n montre que la suite (x_n) est de Cauchy donc convergente (**ici on utilise la complétude**).

Si x est sa limite, comme $\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_n)} \subset B(x_n, \varepsilon_n)$, nécessairement x est aussi dans chaque $B(x_n, \varepsilon_n)$ donc dans $\bigcap_n U_n$. □

Remarque 8. En passant au complémentaire, on montre qu'une union de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. ■

Définition 2.2.10. *Un ensemble qui est une intersection dénombrable d'ouverts est dit un G_δ. S'il est une intersection dénombrable d'ouverts denses il est dit G_δ-dense.*

Un ensemble qui est une union dénombrable de fermés est dit un F_σ. Si tous les fermés sont d'intérieur vide, c'est un F_σ-vide.

Grâce au théorème de Baire on montre que si une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable, alors sa dérivée est continue sur un G_δ-dense.

Chapitre 3

Continuité-Homéomorphismes

3.1 Définition. La continuité préserve la topologie

3.1.1 Définition. Caractérisation avec les ouverts et les fermés

Dans tout ce chapitre on se donne deux espaces métriques (E, d) et $F(\delta)$. On considère une application $f : E \to F$. On va voir que la continuité est la propriété de morphisme entre ces espaces métriques. Toutefois, le morphisme ne préserve pas la métrique mais une notion plus générale, nommée topologie.

La continuité signifie "moralement" que $f(x) \to f(y)$ si $x \to y$. Comme nous n'avons pas défini $x \to y$ nous allons utiliser les suites, ce qui est souvent bien plus intuitif.

Définition 3.1.1. *La fonction $f : E \to F$ est dite continue en $x \in E$ si pour toute suite (x_n) qui converge vers x, la suite image $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ (dans F). La fonction f est dite continue si elle est continue en chacun de ses points.*

Théorème 3.1.2. *Soit $f : E \to F$ continue. Alors la préimage (par f) de n'importe quel ouvert (reps. fermé) de F est un ouvert (reps. fermé). Réciproquement si la préimage de tout ouvert (rap. fermé) est un ouvert (reps. fermé) alors f est continue.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Comme un fermé est le complémentaire d'un ouvert et que l'on a

$$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A),$$

il suffit de prouver l'assertion sur les ouverts ou sur les fermés. Notre définition de continuité repose (pour le moment) sur les suites,il est donc souvent plus pratique de travailler avec des fermés.

Soit K un fermé de F. On suppose que $f^{-1}(K)$ n'est pas vide. Soit (x_n) une suite dans $f^{-1}(K)$ qui converge (dans E) vers un point x. Alors $(f(x_n))$ est une suite à valeurs dans le fermé K convergente vers $f(x)$ (ici on utilise la continuité). Donc par le Théorème 2.2.3, $f(x)$ est dans K, donc x est dans $f^{-1}(K)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. On veut montrer que f est continue. La définition des ouverts permet de nous ramener aux boules :

Si y appartient à V ouvert de F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon)$ soit incluse dans V. Comme $B(y, \varepsilon)$ est une boule ouverte, $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ est aussi un ouvert dans E. Supposons que l'on ait $f(x) = y$. Alors x est dans l'ouvert $f^{-1(B(y,\varepsilon))}$ et donc il existe $\rho > 0$ tel que

$$B(x,\rho) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon)).$$

Ceci implique qu'on a la propriété :

$$\forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ /\ d(x',x) < \rho \Longrightarrow \delta(f(x'), f(x)) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Si (x_n) converge vers x, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on construit ρ donné par (3.1). À partir d'un certain rang, tous les termes x_n sont dans $B(x,\rho)$ ce qui entraine que tous les termes $f(x_n)$ sont dans $B(y,\varepsilon)$. Donc f est bien continue (selon la définition 5.2). $\square$

Remarque 9. On reconnaîtra dans (3.1) la définition "classique" de la continuité (dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$ par exemple). $\blacksquare$

3.1.2 Images directes d'ouverts ou de fermés

On aimerait que la continuité se caractérise par le fait que les images d'ouvert (resp. fermés) sont ouvertes (reps. fermées). C'est cependant faux comme le montre l'exemple :

Exemple 20. $E = F = \mathbb{R}$ munis de $|\quad|$, $f(x) = \sin x$. L'intervalle $]0, 2\pi[$ est ouvert et son image est $[-1, 1]$ qui n'est pas ouvert. De même si on pose $g(x) = (1 - e^{-x^2}) \sin x$, l'image du fermé $[0, +\infty[$ est $]-1, 1[$ qui n'est pas fermé.

Mais si la propriété n'est pas en général vraie, rien n'interdit qu'elle le soit parfois. Ainsi, l'image par sin du fermé $[0, 2\pi]$ est le fermé $[-1, 1]$ et l'image de l'ouvert $]0, \frac{\pi}{2}[$ est l'ouvert $]0, 1[$.

À défaut de préserver les images directes, on a cependant une propriété sur les adhérences :

Proposition 3.1.3. *Si $f : E \to F$ est continue, alors pour toute partie $A \subset E$,*

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Démonstration. Il suffit de se souvenir que $x \in \overline{A}$ est caractérisé par l'existence d'une suite (x_n) dans A qui converge vers x. La suite image définie par $y_n = f(x_n)$ est à valeurs dans $f(A)$ et converge (par continuité) vers $y := f(x)$. Donc $f(x)$ est dans $\overline{f(A)}$. $\square$

3.1.3 Notion de topologie. Distances équivalentes

Topologie

À partir de la métrique d sur E, nous avons défini les ouverts. La collection $\mathcal{T}$ d'ouverts vérifie les 3 propriétés suivantes :

1. E et $\emptyset$ sont des ouverts.
2. Une union quelconque d'ouverts est encore ouverte.
3. Une intersection finie d'ouvert est ouverte.

On peut inverser la démarche et partir de cette propriété pour définir un objet.

Définition 3.1.4. *Soit E un espace et $\mathcal{T}$ une partie*[1] *de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une* topologie *sur E si elle vérifie*

1. *E et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{T}$.*
2. *$\mathcal{T}$ est stable par union (quelconque).*
3. *$\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts *de la topologie.*

Exemples 21.
La topologie définie à partir d'une distance.
La topologie grossière qui n'a que deux ouverts, E et $\emptyset$.
La topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$.

Retour sur la continuité

Si on se donne deux espaces métriques (E, d) et (F, δ), chaque distance définie une topologie (c'est à dire une collection d'ouverts) dans les espaces respectifs. Notons les $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(F)$.

La continuité de $f : E \to F$ se caractérise par le fait que les images réciproques des ouverts de F sont des ouverts de E. Cela signifie que si A appartient à $\mathcal{T}'$ alors $f^{-1}(A)$ est dans $\mathcal{T}$, ce qui se note (par abus d'écriture) $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$.

On comprend mieux pourquoi c'est ainsi qu'il faut définir la continuité : les opérations sur les ensembles $\cup$ et $\cap$ ne **sont pas préservées par les images directe mais le sont par les images inverses**. Or, pour définie une topologie, il faut que la collection satisfasse certaines stabilisés pour ces opérations. Elle doit donc se définir sur les préimages et non pas sur les images.

Définition 3.1.5. *Soient d et d' deux distances sur un même espace E. on dit qu'elles sont* topologiquement équivalentes *si elles définissent la même topologie*[2].

Exercice 12
Soit (E, d) un espace métrique. On pose $d'(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$.
1/ Montrer que d' est une distance sur E.
2/ Montrer qu'elle est équivalente à d.

Exercice 13

1/ Est-ce que dans $\mathbb{R}^2$ la norme euclidienne (distance usuelle) est équivalente à la distance sncf ?
2/ Même question avec $\mathbb{H}^2$ muni de la métrique hyperbolique et le demi-plan supérieur muni de la métrique usuelle ?

Exercice 14
Soient E un espace, d et d' deux distances. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels

1. ce qui signifie que $\mathcal{T}$ est une collection de sous-ensembles de E.
2. ce qui signifie que tous les ouverts de l'une sont aussi ouverts de l'autre.

que

$$\forall\, x, y, \quad \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y).$$

Montrer que d et d' sont équivalentes.

3.2 Homéomorphismes

3.2.1 Définition

Nous venons de voir que le “morphisme” considéré ici est donné par les applications continues. il est naturelle de chercher à comprendre les isomorphismes, c'est à dire les morphismes bijectifs.

Il y a cependant une obstruction : si $f : E \to F$ est continue et bijective, rien ne garanti que la bijection réciproque f^{-1} est aussi continue, comme le montre l'exemple suivant :

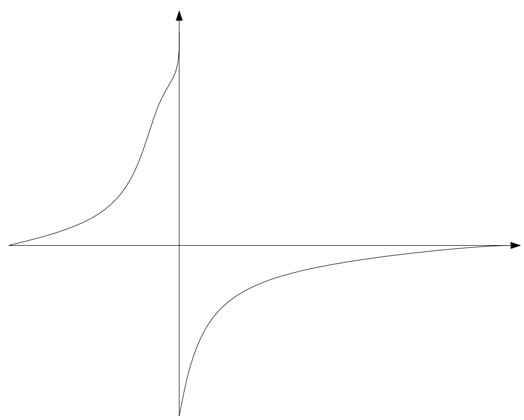


FIGURE 3.1 – Application continue bijective à réciproque non-continue

L'application f est définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$, est strictement croissante sur chaque intervalle et vérifie

$$f([-1, 0[) = [0, +\infty[, : f(]0, +\infty[) =]-\infty, 0[.$$

Elle est continue bijective de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathbb{R}$ mais la bijection réciproque n'est pas continue en 0. Cela justifie une définition supplémentaire :

Définition 3.2.1. *Une application $f : E \to F$ est un homéomorphisme si c'est une bijection* bi-continue*, c'est à dire telle que f et f^{-1} sont continues.*

Deux espaces (E, d) et (F, δ) sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un vers l'autre.

La caractérisation de la continuité à l'aide des images réciproques d'ouverts et de fermés permet d'obtenir immédiatement une caractérisation des homéomorphismes :

Théorème 3.2.2. *Une bijection $f : E \to F$ est un homéomorphisme si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

1. *U est ouvert dans E si et seulement si $f(U)$ un ouvert dans F.*
2. *K est fermé dans E si et seulement si $f(K)$ est fermé dans F.*

3.2.2 Exemples

Intervalles de $\mathbb{R}$

• *Tous les intervalles* **ouverts** *de* $\mathbb{R}$ *sont homéomorphes.* Soient deux intervalles $I_1 =]a, b[$ et $I_2 =]c, d[$. s'ils sont de longueur fini chacun, on trouve une translation et une homothétie qui envoie I_1 sur I_2. Sil'un est de longueur infinie, on le transforme (de façon homéomorphique) en un intervalle de longueur finie via l'application arctan. On est ramené au cas précédent.

• *Les deux intervalles* $]a, b[$ *et* $[c, d]$ *ne sont pas homéomorphes.* On verra une démonstration simple au chapitre 4.

Projections stéréographiques

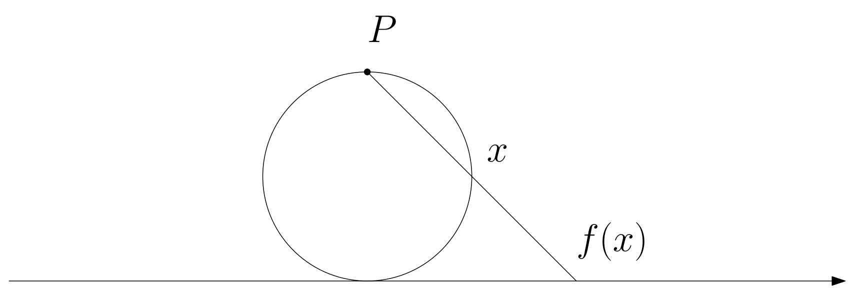


FIGURE 3.2 – Projection stéréographique de $\mathbb{S} \setminus \{P\}$ sur $\mathbb{R}$

Entre un cercle et un carré dans le plan

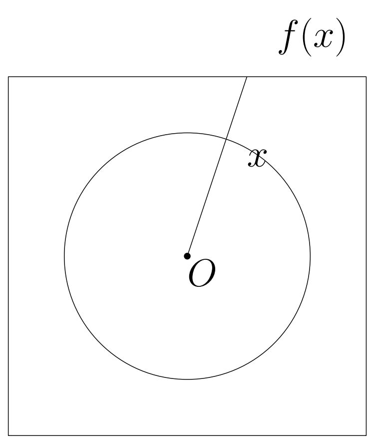


FIGURE 3.3 – Homéomorphsime entre un cercle et un carré

3.3 Continuité uniforme

Question 7. On se donne une application $f : E \to F$. On imagine qu'on ne connait en fait f que sur une partie A dense dans E et qu'elle y est continue. La question est de savoir si cela suffit pour prolonger f par continuité.

La question se justifie puisque tout point de E appartient à $\overline{A}$, c'est à dire qu'on peut trouver une suite (x_n) de points de A qui converge vers x. La continuité assurerait alors

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Il se trouve que la simple continuité ne suffit pas, comme le montre l'exemple suivant : La fonction $x \mapsto \sin 1/x$ est connue sur l'ensemble dense $]0, 1]$ y est continue mais on ne

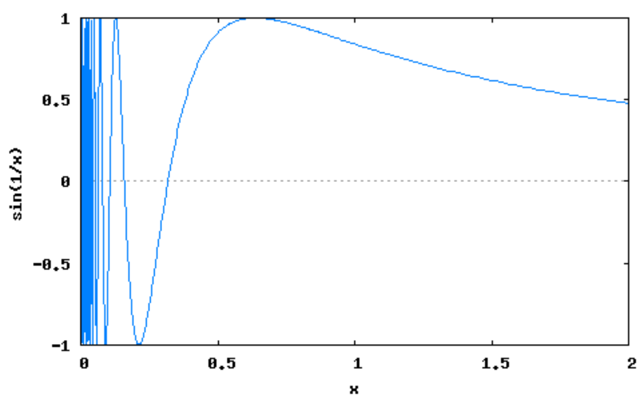


FIGURE 3.4 – Graphe de $x \mapsto \sin 1/x$

peut pas la prolonger par continuité sur $[0, 1]$ tout entier.

Définition 3.3.1. *Une fonction continue $f : E \to F$ est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon\, \exists \rho,\ \forall x, x'\ d(x, x') < \rho \Longrightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

On verra au chapitre 4 des arguments pour montrer qu'une fonction est uniformément continue. On peut en attendant vérifier qu'une fonction C-Lipschitz [3] est uniformément continue.

Théorème 3.3.2. *Soient A une partie dense de (E, d) et (F, δ) un espace métrique complet. Soit $f : A \to F$ uniformément continue. Alors on peut la prolonger par continuité en une fonction $\widetilde{f} : E \to F$ qui est encore uniformément continue.*

Démonstration. Pour montrer que $\widetilde{f}$ est bien définie, il faut d'abord montrer que si deux suites (x_n) et (y_n) à valeurs dans A convergent vers le même point x, alors $\delta(f(x_n), f(y_n))$ tend vers 0.

On se fixe $\varepsilon > 0$, et on trouve ρ associé selon (3.2). Ensuite, on trouve N tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x) < \dfrac{\rho}{2}$ et $d(y_n, x) < \dfrac{\rho}{2}$. Cela entraine, pour $n \geq N$,

$$d(x_n, y_n) < \rho$$

3. C'est à dire $\delta(f(x), f(x')) \leq C d(x, x')$ pour tout x et x'.

et donc $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Cela achève le premier point.

Cela pourrait suffire à définir $\widetilde{f}$, sauf qu'il faut pouvoir montrer que $(f(x_n))$ converge si (x_n) converge vers x. C'est ici qu'on utilise le fait que F est complet, car l'uniforme continuité montre que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy (il suffit de prendre $y_n = x_p$ avec $p \geq N$ auparavant).

Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est uniformément continue. Les passages à la limite montrent que l'on a

$$\forall \varepsilon\, \exists \rho,\ \forall x, x'\ d(x, x') < \rho \Longrightarrow \delta(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')) \leq \varepsilon.$$

□

3.4 Théorème du point fixe pour les applications contractantes

Voici un théorème extrêmement important. C'est ce théorème qui est utilisé pour prouver l'existence de solutions pour une équation différentielle, pour le théorème de la fonction implicite, ou encore pour la méthode de Newton qui donne une approximation de la racine d'une fonction réelle sur un intervalle.

Théorème 3.4.1. *Soit (E, d) un espace métrique* **complet**. *Soit $f : E \to E$ qui est* contractante *:*

$$\exists k \in]0, 1[\ /\ \forall\, x, x'\ d(f(x), f(x')) \leq kd(x, x').$$

Alors il existe un unique $y \in E$ tel que $f(y) = y$.

Démonstration. L'unicité est immédiate ; si y et y' sont deux points fixes de f alors la contraction donne

$$d(y, y') = d(f(y), f(y')) \leq kd(y, y'),$$

ce qui donne $(1 - k)d(y, y') \leq 0$. comme$1 - k$ est positif, on doit avoir $d(y, y') = 0$, d'où $y = y'$.

L'existence utilise la complétude. On choisit un point x_0 quelconque et on construite la suite définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

On montre, en utilisant la contraction, que cette suite est de Cauchy. Elle converge donc. Comme f est contractante (*i.e.,* k-Lipschitz) elle est continue, donc la limite de la suite vérifie $f(y) = y$. □

Application : méthode Newton

Soit f continue et dérivable dans l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

On suppose que f' ne s'annule pas dans $[a, b]$. Soit g définie par $g(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Si x vérifie $g(x) = x$, alors on doit avoir $f(x) = 0$, et réciproquement. Trouver une racine de f sur $[a, b]$ est donc équivalent à trouver un point fixe pour g. Pour cela, on espère prouver que g est contractante (voir pb-1 capes 1999).

Chapitre 4

Espaces compacts

4.1 Définition à l'aide des recouvrements

4.1.1 Préliminaires : topologie induite

Nous allons introduire dans ce chapitre une des notions les plus fondamentales en topologie. Tout le calcul différentiel (formules de Taylor, développements limités, relations entre les variations de la fonction et le signe de sa dérivée, etc) est basée sur la compacité.

Or les compacts seront caractérisés par des propriétés "internes". Pour cela il faut donc réfléchir un peu à la notion de topologie induite : si A est un sous-ensemble de l'espèce métrique (E, d) on peut regarder la restriction de d à A. C'est une distance sur l'ensemble A. On peut donc parler de boules ouvertes, boules fermées et plus généralement d'ouverts, de fermés d'intérieur et d'adhérence dans A. La question est donc de savoir quelles sont les relations entre ces objets définis dans A comme si on ne voyait pas E et les objets définis précédemment dans E.

Exemples 22.
Qu'est-ce qu'une boule ouverte dans $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$? Qu'est-ce qu'un boule ouverte dans $\mathbb{Q}$?

Il n'y a pas d'ambiguïté, une boule dans A est la restriction à A d'une boule dans E (ouverte ou fermée). Par ailleurs le complémentaire dans A d'une partie K n'est rien d'autre que l'intersection du complémentaire de K avec A.

Les boules permettent de définir les ouverts, les passages au complémentaire permettent de définir les fermés et on a donc le principe général :

> Un ouvert de A, un fermé de A, l'intérieur et l'adhérence d'une partie K dans A est juste la restriction à A d'un ouvert de E, d'un fermé de E de l'intérieur ou de l'adhérence de K dans E.

Exemple 23. Ainsi $]0, 1]$ est un fermé de $]0, 2]$ puisqu'il vaut $[0, 1]\cap]0, 2]$. Mais ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

4.1.2 Recouvrement d'ouverts, intersections de fermés

Question 8. Étant donné une suite d'ensembles A_n, y-a-t-il un moyen de garantir que l'intersection $\bigcap_n A_n$ est non vide ?

Exemples 24.
Il est facile de "bricoler" des exemples avec une intersection vide : $A_n = [n, +\infty[$ ou encore $A_n =]n, +\infty[$.

Il est tout aussi facile de trouver des exemples avec une intersection non vide $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

L'exemple utilisé pour démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (en dissociant les points dyadiques) est cependant moins trivial. Dans ce cas la question demeure sans réponse.

On va donc se concentrer sur le cas des A_n fermés (qui *a priori* a plus de chance de donner une intersection non vide).

Commençons par remarquer que si on a une famille $(A_i)_i$ de fermés avec une intersection vide, on peut lui associer un *recouvrement* par des ouverts de E : si $U_i = E \setminus A_i$, alors U_i est ouvert (complémentaire d'un fermé) et $\bigcap_i A_i = \emptyset$ signifie que $E = \bigcup_i U_i$.

Définition 4.1.1. *Si A est une partie de E, on appelle recouvrement de A par des ouverts, toute famille d'ouverts (U_i) telle que*

$$A \subset \bigcup_i U_i$$

Exemples 25.
La famille $]n, n+2[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ recouvre $\mathbb{R}$.

La famille des boules $B(x, 7)$ avec x décrivant l'ensemble A recouvre A.

$\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on peut construire un recouvrement de $\mathbb{Q}$ par des boules ouvertes dont la longueur totale est aussi petite que voulue.

Proposition 4.1.2. *Soit (E, d) un espace métrique*[1]*. Soit A une partie de E Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *De tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
2. *De toute famille de fermés dont l'intersection dans A (globale) est vide on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection dans A est vide.*

Il suffit de passer aux complémentaires.

Remarque 10. On utilise ici Fortement la topologie induite (c'est à dire restreinte à A). En particulier pour les fermés. ■

Définition 4.1.3. *Une partie A de E vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes de la Proposition 4.1.2 sera dite compacte (ou est un compact de E).*

En guise d'exemple, voici un résultat important :

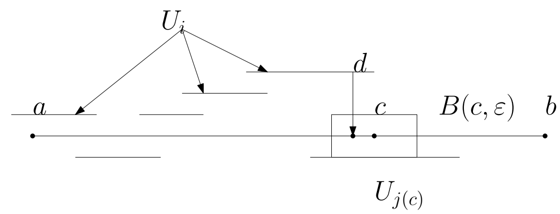
Théorème 4.1.4 (Borel-Lebesgue)**.** *Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, le segment $[a, b]$ est compact.*

Démonstration. On considère un recouvrement de A par des ouverts (de E puisqu'on peut s'y ramener) U_i. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des points x de $[a, b]$ tel que l'intervalle $[a, x]$ est recouvrable par un nombre fini de U_i.

1. En fait on ne va pas utiliser la distance mais seulement la topologie qu'elle engendre.

La partie $\mathcal{A}$ n'est pas vide car elle contient a : l'intervalle $[a,a]$ vaut le singleton $\{a\}$ qui est recouvert par n'importe quel ouvert U_i qui contient a (il en existe au moins 1).

Elle est majorée, par définition, et donc admet une borne supérieure. Appelons-la c. Par définition c est un point de $[a,b]$. Il existe donc $U_{j(c)}$ qui contient c. Comme $U_{j(c)}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(c,\varepsilon)$ soit incluse dans $U_{j(c)}$. Par ailleurs, c est la borne supérieur de $\mathcal{A}$ donc il existe un point de $\mathcal{A}$ dans $]c-\varepsilon, c]$. Notons le d. Par définition, $[a,d]$ est recouvrable par un nombre fini de U_i, et par construction $]d, c+\varepsilon[$ est inclus dans $U_{j(c)}$. Donc $c = b$ sinon on obtiendrait une contradiction sur le fait que c est la borne supérieure de $\mathcal{A}$.



□

4.1.3 Quelques propriétés des compacts et caractérisations des compacts de $\mathbb{R}$. Exemple du Cantor triadique

commençons par un résultat immédiat :

Proposition 4.1.5. *Une union finie de compacts est encore compacte*

Démonstration. On peut se contenter d'une union de deux compacts K et K'. Un recouvrement par des ouverts de $K \cup K'$ recouvre K et K'. On en extrait un sous-recouvrement fini de chacun es deux compacts, et l'union de ces ouverts est encore une union finie. □

Proposition 4.1.6. *Un compact $K \subset E$ est borné et fermé.*

Démonstration. Prenons un recouvrement de K par des boules de rayon 1. On peut en extraire un recouvrement fini. Soient $x_1, \dots x_n$ les centres de ces boules. Alors K est inclus dans la boule de centre x_1 et de rayon $\max d(x_1, x_i) + 2$.

Pour montrer que K est fermé, on montre que $E \setminus K$ est ouvert. Soit x dans $E \setminus K$. Pour chaque y dans K, $d(x,y) > 0$ et donc on peut trouver une boule ouverte de diamètre inférieur à $\frac{d(x,y)}{2}$. l'ensemble de ces boules forme un recouvrement ouvert de K. On en extrait un sous-recouvrement fini. Par construction, x est hors de ce recouvrement et se situe même à une distance positive de chacune des boules. De façon plus formelle, si $y_1, \dots y_n$ sont les centres des boules (en nombre finis) si on pose

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \min(d(x, y_i)),$$

alors $B(x,\varepsilon)$ ne rencontre pas les boules du recouvrement, donc a fortiori ne rencontre pas K. Cela montre que $B(x,\varepsilon)$ est dans $E \setminus K$. □

Proposition 4.1.7. *Un fermé dans un compact est compact.*

Démonstration. Soit F un fermé inclus dans un compact K. Soit (F_i) une famille de fermés de F d'intersection vide. C'est donc aussi une famille de fermés de K d'intersection vide. On peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide dans K donc *a fortiori* dans F. □

Corollaire 4.1.8. *Les compacts de* $(\mathbb{R}, |\quad|)$ *sont les fermés bornés.*

Démonstration. Un compact est fermé et borné. Réciproquement, un fermé borné est un fermé dans un compact (voir Th. 4.1.4) de la forme $[-M, M]$ donc compact (Prop. 4.1.7). □

Remarque 11. Attention, cela n'est valable que dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle. Nous verrons plus loin (Chap 5) que c'est aussi valable dans les EVN de dimension fini mais pas dans un EVN de dimension infinie.

On peut trouver une topologie sur $\mathbb{R}$ telle que des fermés et bornés ne soient pas compacts (*e.g.* topo discrète). ■

Corollaire 4.1.9. *Une intersection (quelconque) de compacts et encore compacte.*

Démonstration. C'est une intersection de fermés, donc est fermée, dans un compact, donc compacte. □

4.1.4 Le Cantor Triadique

On coupe l'intervalle $[0, 1]$ en trois segments $[0, \frac{1}{3}] \sqcup]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\sqcup [\frac{2}{3}, 1]$. On retire l'ouvert du milieux et on réitère ce processus.

On obtient ainsi une suite décroissante de fermés, chacun étant une union disjointe de segments. comme $[0, 1]$ est compact et qu'à aucun moment (fini) l'intersection est vide, l'intersection limite est non-vide.

Elle est homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance "usuelle".

4.2 Compacts et suites

4.2.1 Valeur d'adhérence d'une suite

Nous introduisons ici la notions de valeur d'adhérence d'une suite. il faudra faire attention à ne pas confondre cette notion avec l'adhérence d'un ensemble. Une valeur d'adhérence d'une suite n'est pas un point dans l'adhérence de l'ensemble des points de la suite.

Définition 4.2.1. *On appelle suite extraite d'une suite* (x_n) *(ou sous-suite) une nouvelle suite* (y_n) *qui vérifie*

$$y_n = x_{\varphi(n)},$$

avec φ *une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exemple 26. la sous-suite des indices pairs (ou impairs) : on pose $\varphi(n) = 2n$ qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{N}$ et on considère la suite définie par $y_n = x_{2n}$.

Exercice 15
montrer que si φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors pour tout n, $\varphi(n) \geq n$.

Définition 4.2.2. *On appelle valeur d'adhérence d'une suite (x_n) à valeur dans un espace métrique (E,d) toute limite d'une suite extraite de (x_n).*

Théorème 4.2.3. *Un point x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) si et seulement si toute boule $B(x,\varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ contient une infinité de termes de la suite.*

Avant de faire la démonstration, traitons un exemple. La suite définie dans $\mathbb{R}$ par $x_n := (-1)^n$ prend 2 valeurs mais une infinité de termes sont égaux à 1 et une infinité sont égaux à -1. Cette suite a deux valeurs d'adhérence, qui sont -1 et 1.

Preuve du Théorème 4.2.3. Le théorème s'écrit avec des quantificateurs

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \exists n \geq N,\ d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

En effet, dire qu'il y a une infinité de termes de la suite dans $B(x,\varepsilon)$ signifie qu'il y a un infinité d'indices n tels que $d(x_n,x) < \varepsilon$ (que les valeurs x_n soient différentes ou non). Ce qui caractérise une partie finie de $\mathbb{N}$ c'est qu'elle est majorée, non dire qu'il y a une infinité d'indice signifie que l'ensemble des ces indices n'est pas majoré.

Si x est une valeur d'adhérence, la définition de la limite montre que (4.1) est vraie. Réciproquement, si (4.1) est vraie, on construit par récurrence une suite extraite en construisant par récurrence φ. Pour cela on choisit une famille de ε_n qui décroît vers 0 et qui exclut les termes déjà construits. □

Proposition 4.2.4. *Si une suite (x_n) converge alors elle a une unique valeur d'adhérence (qui est sa limite).*

Démonstration. Par la contraposée, si (x_n) admet plusieurs valeurs d'adhérences, les termes "s'agglutinent" autour de deux valeurs (au moins) et donc la suite ne peut pas converger (unicité de la limite (à faire avec les quantificateurs)). Si elle n'admet aucune valeur d'adhérence, alors la suite "extraite" $y_n = x_n$ ne peut pas converger !

Par ailleurs, si la suite converge, la limite est limite d'une suite extraite et donc une valeur d'adhérence. □

4.2.2 Caractérisation séquentielle d'un compact. Complétude des compacts

Nous avons vu précédemment la définition de suite convergente. Nous avons vu qu'il existe des suites convergentes et d'autres qui sont divergentes. De même, il n'est pas clair qu'une suite possède une valeur d'adhérence. C'est là tout l'intérêt des compacts qui garantissent l'existence de valeurs d'adhérences.

Théorème 4.2.5 (Th. Bolzano-Weiertraß)**.** *Une partie K d'un espace métrique (E,d) est compacte si et seulement si de toute suite à valeurs dans K on peut extraire une sous-suite convergente (dans K).*

Remarque 12. De façon équivalente, K est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence. ■

Démonstration. Supposons que K soit compact et prenons (x_n) à valeurs dans K. On recouvre K par des boules de rayon 1 et on en extrait un sous-recouvrement fini. comme il y un nombre fini de boules et une infinité de termes de la suite, au moins l'une des boules (ouvertes) contient une infinité de termes de la suite. *A fortiori* la fermeture de l'une de ces boules contient une infinité de termes de la suite. On en choisit une, nommée B_1, avec cette propriété et on note K_1 son intersection avec K. Par définition elle contient une infinité de termes de la suite.

Notons que K_1 est un compact, comme fermé dans un compact. On réitère le processus avec K_1 au lieu de K et des boules de rayon inférieurs à $\frac{1}{2}$ et telles qu'elles soient toutes incluses dans $\mathring{B}_1$. On choisit alors une boule B_2 qui contient une infinité de termes de la suite (dans B_1), puis on note K_2 l'intersection de B_2 avec K_2.

On recommence sur K_2 en prenant des boules de rayons $< \frac{1}{4}$ et incluses dans B_2.

On obtient ainsi une suite de compacts (fermés) $K \supset K_1 \subset K_2 \ldots$ qui n'est jamais vide. L'intersection limite contient au moins un point. Elle en contient au plus un car les K_i sont inclus dans des boules de rayon 2^{-i+1}. Notons x ce point. Pour $\varepsilon > 0$, la boule $B(x, \varepsilon)$ contient tous les K_i d'indice i tel que $2^{-i+2} < \varepsilon$. Elle contient donc une infinité de termes de la suite, donc x est une valeur d'adhérence de la suite.

Réciproquement. Supposons que de toute suite on peut extraire une valeur d'adhérence. Considérons une suite décroissante de fermés (K_n) dans K. On suppose que cette suite n'est jamais vide, c'est à dire que pour tout n, on peut trouver un point x_n dans K_n. Cette suite (x_n) est à valeurs dans K, donc elle admet une valeur d'adhérence (dans K). Notons la x et montrons que x est dans l'intersection de K_n.

Soit φ telle que $x = \lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)}$. Comme la suite des K_n est décroissante, pour tout $n \geq N$, x_n est dans K_N. Comme $\varphi(n) \geq n$, pour tout $n \geq N$, $x_{\varphi(n)} \in K_N$. La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq N}$ est à valeurs dans le fermé K_N et converge vers x, ce qui montre (par le Th. 2.2.3) que x est dans K_N. Ceci est vrai pour tout N, donc $x \in \cap K_N$. □

De ce théorème on tire deux résultats précieux. Le premier améliore la proposition 4.2.4 :

Corollaire 4.2.6. *Une suite (x_n) à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. La proposition 4.2.4 montre que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit (x_n) à valeurs dans K qui admet une unique valeur d'adhérence. Notons la x. Nier la convergence vers x s'écrit :

$$\exists \varepsilon, \forall N, \exists n \geq N \ d(x_n, x) \geq \varepsilon,$$

ce qui signifie qu'il existe une infinité de termes de la suite en dehors de la boule $B(x, \varepsilon)$. Cette infinité de terme est une suite-extraite et la compacité permet d'extraire une autre suite qui admet une valeur d'adhérence. Celle-ci ne peut être égale à x puisque tous les termes sont uniformément loin de x. Donc la suite (x_n) admet une autre valeur d'adhérence, et cela créé une contradiction avec l'hypothèse.

Ainsi (x_n) converge vers x. □

Corollaire 4.2.7. *Soient (E, d) un espace métrique et K un compact de E. Alors l'espace métrique (K, d) est complet (même si E ne l'est pas).*

Démonstration. Si (x_n) est une suite de Cauchy à valeurs dans K, elle admet au moins une valeur d'adhérence (selon Th 4.2.5) et au plus une car elle est de Cauchy. Donc elle converge (Cor. 4.2.6). □

4.3 Compacts et continuité

4.3.1 Image d'un compact

Théorème 4.3.1 (Th. de Heine)**.** *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques. Soient $f : e \to F$ continue et $K \subset E$ un compact de E. Alors $f(K)$ est un compact de K.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite à valeurs dans $f(K)$. Pour chaque n il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $K \ni x = \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$. La continuité montre que $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $y = f(x)$. □

Par contre l'image réciproque d'un compact n'a pas de raison d'être compacte. Ainsi, si $E = F = \mathbb{R}$ et $f = \sin$ l'image réciproque du compact $[-1, 1]$ est $\mathbb{R}$ tout entier qui n'est pas compact (puisque non borné).

4.3.2 Applications

Ce théorème permet de montrer plus facilement qu'une bijection est un homéomorphisme :

Proposition 4.3.2. *Si f est une bijection continue d'un compact K vers un espace F alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit en effet de vérifier que f^{-1} est continue. Cela signifie que l'image directe de tout fermé de K est un fermé de F. Un fermé de K est un compact donc son image est compacte donc fermée. □

Proposition 4.3.3. *Soient K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(K)$ est bornée et f atteint ses bornes.*

Démonstration. L'image $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc un fermé borné. Cela signifie que f est bornée. Si $a = \sup\{f(x),\ x \in K\}$, alors il existe une suite (y_n) à valeurs dans $f(K)$ qui converge vers a. Cela signifie que a est dans l'adhérence de $f(K)$ qui est un fermé. Donc il existe $x \in K$ tel que $a = f(x)$. On procède de même pour la borne inf. □

Remarque 13. Cette proposition est le point clef pour démontrer le théorème de Rolle. Ce théorème est alors celui qui permet de prouver tout le calcul différentiel. ■

Corollaire 4.3.4. *Si f est une fonction continue définie sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$, alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $x \in K$,*

$$f(x) \geq \varepsilon > 0.$$

Démonstration. f est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 dans K tel que

$$\forall x \in K, f(x) \geq f(x_0).$$

Comme $f(x_0) > 0$, on peut poser $\varepsilon = f(x_0)$. Il satisfait la double inégalité voulue. □

Corollaire 4.3.5. *Soient K et F des parties (non vides) de E. On suppose que K est compacte et que F est fermée. On suppose en outre que $F \cap K$ est vide. Alors il existe $d > 0$ tel que pour tout x dans K et pour tout y dans F,*

$$d(x, y) \geq d > 0.$$

Démonstration. Pour x dans K on pose $f(x) := \inf\{d(x, y),\ y \in F\}$. On montre que f est bien définie et est continue à valeurs dans $]0, +\infty[$.

L'ensemble $\{d(x, y),\ y \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieure. Ceci définit $f(x)$.

Par définition de la distance, $f(x)$ est ≥ 0. Si $f(x) = 0$, alors la définition de la borne inférieure permet de trouver une suite y_n à valeurs dans F telle que $\lim_{n\to+\infty} d(x, y_n) = 0$, ce qui entraine que x est dans $\overline{F} = F$ et dans K. Cela contredit l'hypothèse $F \cap K = \emptyset$.

Reste à montrer que f est continue. Soient x et x' dans K, y dans F. L'inégalité triangulaire donne

$$f(x) \leq d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y).$$

Ceci est vrai pour tout y donc on obtient $f(x) \leq d(x, x') + f(x')$, ce qui s'écrit aussi $f(x) - f(x') \leq d(x, x')$. En échangeant les rôles de x et x' on obtient

$$|f(x) - f(x')| \leq d(x, x'),$$

ce qui montre que f est continue. On applique alors le corollaire 4.3.4. □

Applications.

Le lemme d'Urysohn : *Soient K un compact dans un espace métrique (E, d) et U un ouvert qui contient K. Alors il existe une application continue ϕ de E dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur $E \setminus U$ et 1 sur K.*

Démonstration. On pose $F = E \setminus U$; c'est un fermé. La fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = d(x, F)$ est continue (à faire en exercice) et vaut 0 sur F. Sur K, φ est continue et donc bornée et atteint ses bornes. Soit δ le minimium de φ sur K ; on pose $\phi(x) = \min(1, \frac{1}{\delta}\varphi(x))$. □

4.3.3 Uniforme continuité

Théorème 4.3.6 (Heine)**.** *Soit $f : K \to F$ une application continue d'un compact K vers F. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. la continuité permet de trouver pour chaque x de K un réel ρ_x tel que

$$y \in B(x, \rho_x) \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela donne un recouvrement de K par les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{2}\rho_x)$. On en extrait un sous-recouvrement fini $B(x_1, \frac{1}{2}\rho_{x_1}) \ldots B(x_n, \frac{1}{2}\rho_{x_n})$ et on considère

$$\rho = \frac{1}{2}. \min \rho_i.$$

Si x et y vérifient $d(x,y) < \rho$, alors x est dans une boule $B(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i})$ et donc y est dans la boule $B(x_i, \rho_{x_i})$. Ainsi

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

Applications : Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier sur un segment

Chapitre 5

Espaces Vectoriels Normés

5.1 Normes sur un espace

5.1.1 Définition et distance associée

Nous allons maintenant considérer un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. il s'agit de mettre une structure topologique qui respecte la structure vectorielle.

Définition 5.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $|| \; || : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout x dans E, $||\lambda.x|| = |\lambda|.||x||$.*
2. *Pour tout x et y dans E, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).*
3. *Si $||x|| = 0$ alors $x = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé.

Définition 5.1.2. *soit $(E, || \; ||)$ un espace vectoriel normé (evn en abrégé). On appelle distance associée à la norme la fonction*

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & ||x - y||. \end{array}$$

On remarquera que l'espace (E, d) est un espace métrique.

Cette distance permet de définir la distance entre un point x de E et une partie non vide A de E en posant

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), \; y \in A\}.$$

On notera que cette borne inférieure est bien définie car l'ensemble considéré n'est pas vide (A est non vide) et est minoré dans $\mathbb{R}$ (par 0).

Exemple 27. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne (norme $|| \; ||_2$) on peut calculer la distance d'un point à une droite.

5.1.2 Exemples

1- L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est une evn.

2- Dans $\mathbb{K}^n$, $||(x_1,\ldots,x_n)||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, $||(x_1,\ldots,x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ et $||(x_1,\ldots,x_n)||_\infty = \max_i(|x_i|)$.

3- Dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$on aura $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ $(= \text{``}\sum_{t\in[0,1]} |f(t)|\text{''})$, $||f||_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||f||_\infty = \sup|f(t)|$. Notez que $||\ ||_\infty$ s'appelle la *norme de la convergence uniforme.*

4- Sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites réelles on pose $||\underline{u}||_p = \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||\underline{u}||_\infty = \sup_n |u_n|$. On introduit alors le sous-espace l^p $(p \leq +\infty)$ des suites $\underline{u}$ définies par

$$\underline{u} \in l^p \iff ||\underline{u}||_p < \infty.$$

Ainsi l^∞ est l'ensemble des suites bornées. Sur l^p, $||\ ||_p$ est une norme.
Il n'est *a priori* pas simple de voir que l^p est un sous-espace vectoriel. En fait on démontre en même temps que c'est une sous-espace et qu'il est normé.

Lemme 5.1.3. *Soit α dans $]0,1[$. Soient u et v deux réels strictement positifs. Alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$, avec égalité si et seulement si $u = v$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u^\alpha v^{1-\alpha} = e^{\alpha\log u+(1-\alpha)\log v}$ et d'utiliser la stricte convexité de l'application exponentielle. □

Lemme 5.1.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont respectivement dans l^p et l^q avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, alors la suite $\underline{uv}$ dont le terme général est u_nv_n est dans l^1.*

Démonstration. On pose $u = \left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p$ et $v = \left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q$. Le lemme 5.1.3 donne

$$u^{\frac{1}{p}}.v^{\frac{1}{q}} = \frac{|u_n|}{||\underline{u}||_p}\frac{|v_n|}{||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q.$$

En sommant sur n on trouve donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|u_nv_n|}{||\underline{u}||_p||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\sum_n |u_n|^p\frac{1}{||\underline{u}||_p^p} + \frac{1}{q}\sum_n |v_n|^q\frac{1}{||\underline{v}||_q^q} = 1.$
D'où

$$\sum |u_nv_n| \leq ||\underline{u}||_p||\underline{v}||_q.$$

□

Lemme 5.1.5 (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont dans l^p, alors $||\underline{u}+\underline{v}||_p \leq ||\underline{u}||_p + ||\underline{v}||_p$*

Démonstration. On écrit $|u_n+v_n|^p = |u_n+v_n|.|u_n+v_n|^{p-1} \leq |u_n||u_n+v_n|^{p-1} + |v_n||u_n+v_n|^{p-1}$. On applique l'inégalité de Hölder avec p et $\frac{p}{p-1}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_n |u_n+v_n|^p &\leq \sum_n |u_n||u_n+v_n|^{p-1} + \sum_n |v_n||u_n+v_n|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_n |v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (5.1) \end{aligned}$$

De plus $(||\underline{u}+\underline{v}||_p)^p = \sum_n |u_n+v_n|^p = \left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}}$. La majoration (5.1) permet donc de conclure la preuve du lemme. □

C'est aussi l'inégalité de Minkowski qui permet de prouver que l^p est un sous-espace vectoriel.

Exercice 16
Si f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est Lipschitz s'il exister C tel que pour tout x et y,

$$|f(x)-f(y)| \leq C.|x-y|.$$

Pour f Lipschitz on définit alors $||f||_{Lip} := ||f||_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$. Montrer que cela définit une norme sur l'espace des fonctions Lipschitz.

5.2 Applications linéaires continues

5.2.1 L'evn $\mathcal{L}(E,F)$

Caractérisation des applications linéaires continues : définition de la triple-norme

Nous rappelons qu'une application f de l'evn $(E, ||\ ||_E)$ dans l'evn$(F, ||\ ||_F)$ est continue si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout x de E, l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.
2. L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

On rappelle aussi que la propriété (1) s'exprime de la façon suivante :

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{t.q. } ||x-y||_E < \rho \Longrightarrow ||f(x)-f(y)||_F < \varepsilon \tag{5.2}$$

On rappelle aussi qu'une application f de E dans F est uniformément continue si elle vérifie la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{ tel que } \forall x \in E,\ y \in B(x,\rho) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

On se fixe deux evn $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$. On s'intéresse aux applications qui sont continues et linéaires (conservation de la structure vectorielle et normée).

Définition 5.2.1. *Soit f dans $L(E,F)$ (f linéaire). On définit (dans $\overline{\mathbb{R}}$)*

$$|||f||| \overset{déf}{=} \sup_{x\in B(0,1)} ||f(x)||_F = \sup_{x\in S(0,1)} ||f(x)||_F = \sup_{x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}.$$

Exercice 17
Montrer l'égalité de ces 3 définitions.

Théorème 5.2.2. *Les conditions suivantes sont équivalents :*

1. *f est continue en* 0.
2. *f est continue*
3. *f est uniformément continue.*
4. $|||f||| < +\infty$

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.

Démonstration. $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ est évident. Faisons $1 \Rightarrow 4$.
Comme f est linéaire on a $f(0_E) = 0_F$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\rho(= \eta(0,\varepsilon))$ tel que pour tout x dans $B(0,\rho)$ on ait $||f(x)||_F < \varepsilon$. Si y est dans $B(0,1)$, alors $\rho.y$ est dans $B(0,\rho)$ et donc

$$||f(y)||_F = ||f(\frac{1}{\rho}\rho.y)||_F = ||\frac{1}{\rho}f(\rho.y)||_F = \frac{1}{\rho}||f(\rho.y)||_F < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

$4 \Rightarrow 3$. Il suffit de remarquer que f est lipschitzienne :

$$||f(x) - f(y)|| = ||f(x-y)|| = ||x-y||.||f(\frac{x-y}{||x-y||})|| \leq |||f|||.||x-y||.$$

□

Exemples 28.
1- Une matrice $m \times n$ va définir une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ (ici nous verrons bientôt que peu importe de préciser les normes).
2- Notion de dual topologique. Si E est une $\mathbb{R}$-ev, l'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ s'appelle le dual topologique de E. Dual, car on regarde les formes linéaires (applications linéaires de E sur son corps de base) et topologique pour marquer qu'on regarde les formes continues. Par exemple si $E = (\mathcal{C}_c, || \, ||_\infty)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie, alors son dual topologique est l'ensemble des mesures de Radon signées (théorème de Riesz).

Exercice 18
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $|| \, ||_\infty$. Montrer que l'application $\varphi E \to \mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) définie par $\varphi(f) = f(0)$ est continue (et linéaire).

Exercice 19
Dans $F = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $|| \, ||_\infty$, montrer que l'application $f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.

La triple-norme est une norme

Proposition 5.2.3. *L'ensemble* $(\mathcal{L}(E,F), ||| \, |||)$ *est un evn. De plus si g est dans $\mathcal{L}(F,G)$ et f dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||.$$

Démonstration. Comme $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans $L(E,F)$ nous allons montrer que c'est un sous-ev. Il est non vide car il contient 0 (l'application nulle).

Soient f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$ et α dans $\mathbb{R}$. A-t-on $\alpha.f+g$ dans $\mathcal{L}(E,F)$? Pour évaluer $|||\alpha.f+g|||$ commençons par nous fixer x dans $E\cap B(0,1)$. On a

$$||(\alpha.f+g)(x)|| = ||\alpha.f(x)+g(x)|| \leq |\alpha|.||f(x)||+||g(x||. \tag{5.3}$$

En majorant chacun des termes de droite de (5.3) par leur triple norme on peut ensuite passer au sup dans le terme de gauche pour obtenir $|||\alpha.f+g||| \leq |\alpha|.|||f|||+|||g|||$. Ceci prouve que $\alpha.f+g$ est dans $\mathcal{L}(E,F)$ et donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-ev.
Reste à prouver que $|||\ |||$ est une norme. C'est laissé en exercice. □

5.2.2 Normes équivalentes

homéomorphismes

Si f est un homéomorphisme de l'evn $(E,||\ ||_E)$ dans l'evn $(F,||\ ||_F)$ la continuité de f et de f^{-1} montrent qu'il existe 2 constantes A et B telles que pour tout x dans E

$$A||x||_E \leq ||f(x)||_F \leq B||x||_E.$$

Equivalence des normes

On se fixe sur E deux normes $||\ ||$ et $|\ |$.

Définition 5.2.4. *Les deux normes sont dites équivalentes si elle vérifient l'une des 2 propriétés (équivalentes) suivantes :*

1. *L'application identité Id de $(E,||\ ||)$ dans $(E,|\ |)$ est un homéomorphisme (linéaire).*
2. *Il existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout x dans E,*

$$a|x| \leq ||x|| \leq b|x|.$$

Prouvons l'équivalence de ces 2 propriétés.
Si Id est un homéomorphisme, elle est continue donc $|||Id|||$ existe. Or par définition de $|||Id|||$ on aura pour tout x non nul de E,

$$|x| = |Id(x)| \leq |||Id|||.||x||.$$

Ceci produit le a. De même Id' de $(E,|\ |)$ dans $(E,||\ ||)$ est continue donc cela produira le b.
Réciproquement, si on a *2* alors Id est continue et bijective et sa bijection réciproque est aussi continue. Donc c'est un homéomorphisme.

Exemples 29.
1- Dans $\mathbb{R}^n$ les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont équivalentes. On a même

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n.||x||_\infty.$$

2- Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ ne sont pas équivalentes. On considère la suite de fonctions f_n définies par $f_n(x)$ qui vaut 1 sur $[0,\frac{1}{n}]$, nulle sur $[\frac{2}{n},1]$ et affine sur $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$. On $||f_n||_\infty = 1$ et $||f_n||_1 = \frac{3}{2n}$.

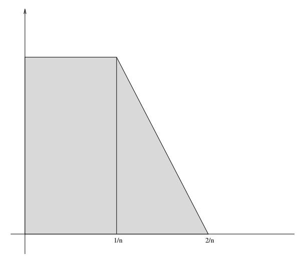


FIGURE 5.1 – Graphe de f_n

5.3 Compacité et EVN

5.3.1 Compacité ou non compacité des boules unités

On considère un evn $(E, || \, ||_E)$. Dans $\mathbb{R}$, nous avons vu que les compacts sont les fermés bornés. On se demande donc si la boule unité (fermée) $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

Théorème 5.3.1. *Dans $\mathbb{R}^k$ la boule unité fermée pour la norme $|| \, ||_1$ est compacte.*

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'une suite (x_n) converge si et seulement si pour chacune des suites coordonnées (dans la base canonique) converge (pour la valeur absolue).

si on considère une suite dans la boule unité, (x_n) on commence par considérer la suite induite sur la première coordonnée, $(x_{n,1}$. Elle est bornée donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Notons la $(x_{\phi(n),1})$. Ensuite on procède de la même manière (puis par récurrence) sur la suite $(x_{\phi(n),2})$. □

Théorème 5.3.2. *En dimension infinie la boule unité fermé n'est pas compacte.*

Démonstration. Elle est basée sur le lemme de Riesz. On choisit y_0 tel que $\|y_0\| = 1$ et on construit une suite (y_n) telle que pour tout n, $\|y_n\| = 1$ et pour tout $p \neq n$, $\|y_n - y_p\| \geq \frac{1}{2}$. Supposons $y_0, \ldots, y_n$ construits et construisons y_{n+1}. L'espace $E_n = Vec(y_0, \ldots, y_n)$ est de dimension au plus $n+1$, donc c'est un fermé de E d'intérieur vide. Il existe donc z dans $E \setminus E_n$, et comme E_n est fermé on a $d(z, E_n) > 0$. L'application définie sur E_n et qui associe à u la valeur $\|u - z\|$ est continue et strictement positive. Si α vaut $d(z, E_n)$, il existe u dan E_n tel que $\|u - z\| \leq 2\alpha$; on pose alors

$$y_{n+1} = \frac{z - u}{\|z - u\|}.$$

Alors $\|y_{n+1}\| = 1$ et pour tout y dans E_n,

$$\|y_{n+1} - y\| = \frac{\|z - u - \|z - u\|.y\|}{\|z - u\|} \geq \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2},$$

car $u+\|z-u\|.y$ est dans E_n. De (y_n) on ne peut extraire aucune sous-suite convergente. $\square$

Remarque 14. Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est donc pas valable dans un Banach en général !

Ce corollaire explique la nécessité de trouver dans les evn des dimension infinie (typiquement $\mathcal{C}(E,F)$) des critères de compacité ; 2 voies peuvent être explorées :

1. Trouver des critères de compacité sur une famille (par exemple Ascoli).
2. Mettre sur E une topologie qui rende la boule unité fermée compacte. Sur un dual topologique on peut mettre la topologie faible * qui rend la boule unité compacte.

5.3.2 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 5.3.3. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On va montrer que sur $\mathbb{R}^n$ toute les normes sont équivalentes à $\| \|_1$.
Première étape. On rappelle que $\| \|_\infty \leq \| \|_1 \leq n.\| \|_\infty$, ce qui prouve que ces 2 normes sont équivalentes. Comme la boule unité fermée est compacte pour $\| \|_\infty$ elle l'est pour $\| \|_1$.
Deuxième étape. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = \max_i N(e_i)$. Si $x = \sum x_i.e_i$, on aura

$$N(x) \leq \sum_i N(x_i.e_i) = \sum_i |x_i|.N(e_i) \leq A.\|x\|_1.$$

Ainsi l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}^n, \| \|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$ est continue. De plus

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq A.\|x-y\|_1,$$

ce qui prouve que l'application N est continue de $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$. Comme la sphère $S^n(0,1)$ (pour $|| ||_1$) est compacte (pour la topologie induite par $|| ||_1$), son image par N est un compact de $\mathbb{R}$; N y est donc bornée et y atteint ses bornes. Il existe alors $a \geq 0$ tel que pour tout x dans $S^n(0,1)$ $N(x) \geq a$. On ne peut pas avoir $a = 0$. En effet, si tel était le cas, il existerait x dans $S^n(0,1)$ vérifiant $N(x) = a = 0$. Or, N est une norme, et $N(x) = 0$ entraine $x = 0 \notin S^n(0,1)$. Ceci prouve donc que Id est un homéomorphisme. $\square$

Remarque 15. On a donc un meilleur résultat que simplement le théorème 5.3.1 : en dimension finie toute boule fermée et compacte pour n'importe quelle norme. ■

5.3.3 Application : Partition de l'unité

Soit K un compact de E (evn de dimension finie) et $V_1, \ldots, V_n$ des ouverts tels que $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Alors il existe $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions continues à valeurs dans $[0,1]$ telles que chaque h_i est nulle sur $E \setminus V_i$ et pour tout x dans K, $h_1(x) + \ldots + h_n(x) = 1$.

Démonstration. Pour chaque x de K il existe $\rho(x)$ tel que la boule fermée $\overline{B(x,\rho(x))}$ soit incluse dans l'un des V_i. On recouvre ainsi K par les boules ouvertes $B(x,\rho(x))$, et on en tire un sous-recouvrement fini :

$$K \subset B(x_1,\rho_1) \cup \ldots \cup B(x_l,\rho_l),$$

en posant $\rho_l = \rho(x_l)$. Chaque boule fermée $\overline{B(x_k,\rho_k)}$ étant dans un V_j, on note pour chaque i, K_i la réunion des boules $\overline{B(x_k,\rho_k)}$ qui sont dans V_i [1]. Le lemme d'Urysohn fournit une application $g_i : E \to [0,1]$ qui vaut 1 sur K_i et est nulle sur $E \setminus V_i$. On pose

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 \\ h_2 &= g_2(1-g_1) \\ h_3 &= \ldots \\ &\vdots \\ h_n &= (1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_{n-1})g_n. \end{aligned}$$

□

Chaque h_i est à valeurs dans $[0,1]$ et nulle en dehors de V_i. On montre par récurrence que $h_1+\ldots+h_n = 1-(1-g_1)(1-g_2)\ldots(1-g_n)$. Si x est dans l'un des K_i, alors $g_i(x)=1$ donc $h_1(x)+\ldots+h_n(x)=1$.

5.3.4 Un critère de compacité dans $\mathcal{C}^0$: théorème d'Ascoli

Retour sur la continuité. Equicontinuité

La continuité d'une fonction f est x s'écrit :

$$\forall\varepsilon, \exists\eta,\ y \in B(x,\eta) \Longrightarrow |f(x)-f(y) < \varepsilon.|$$

On considère une famille d'applications, toutes définies sur le même espace X et on veut introduire une notion de continuité indépendante du choix de la fonctions de la famille.

Définition 5.3.4. *Une famille (f_α) de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est dite* équicontinue *en x si*

$$\forall\varepsilon, \exists\eta, \forall\alpha,\ y \in B(x,\eta) \Longrightarrow |f_\alpha(x)-f_\alpha(y)| < \varepsilon.$$

La famille est dite equicontinue *si elle est équicontinue en chacun des points de X.*

Exemple 30. Toute famille de fonctions 1-Lipschitz est équicontinue.

Le théorème

Théorème 5.3.5 (Ascoli)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ équicontinue. On suppose que pour tout x de $[0,1]$, la suite numérique $(f_n(x))$ est bornée. Alors la suite (f_n) admet au mins une valeur d'adhérence pour la norme $||\ ||_\infty$.*

Démonstration. □

1. Ici on utilise la dimension finie.

5.4 EVN complets : espaces de Banach

5.4.1 Définition, exemples et une description

Définition 5.4.1. *Un evn complet s'appelle un espace de Banach.*

Théorème 5.4.2. *Tout evn de dimension finie est un Banach.*

Démonstration. Il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme puisqu'elles sont équivalentes. Pour montrer qu'un espace de dimension finie est complet, il suffit de constater qu'une suite de Cauchy est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence donc converge. □

$(\mathcal{C}^0([0,1]), || \ ||_\infty)$ est un Banach

Soit (f_n) une suite de Cauchy pour $(\mathcal{C}^0([0,1]), ||||||_\infty)$. Pour x dans $[0,1]$ la suite numérique $(f_n(x))$ est donc de Cauchy. Elle converge vers une valeur limite notée $f(x)$. On a donc une suite (f_n) d'applications continues qui converge uniformément vers une application f. On sait alors que f est continue.

$(\mathcal{C}^{0+1}([0,1]), || \ ||_{Lip})$ est un Banach

Soit (f_n) une suite d'applications Lipschitz qui est de Cauchy pour la norme $|| \ ||_{Lip}$. Elle est donc de Cauchy pour $|| \ ||_\infty$ donc la suite converge vers une application f qui est continue.

Si ε est fixé, la condition de Cauchy entraine

$$\exists N,\ \forall x \forall y \forall n, p \geq N\ |f_n(x) - f_n(y) + f_p(y) - f_p(x)| \leq \varepsilon|x-y|.$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'obtenir $|f_p(x) - f_p(y)| \leq C_{f_n}|x-y| + \varepsilon|x-y|$. En faisant $p \to +\infty$ on montre que f est aussi Lipschitz. Cela permet de passer à la limite dans $|f_n - f_p|_{Lip}$ et montre que la convergence est dans Lip.

Exercice 20
Montrer que l^p est complet.

5.4.2 Théorème de Stone-Weirstraß

Une application de Baire

Un Banach qui n'est pas de dimension finie est de dimension infinie non dénombrable. Nous montrons par l'absurde qu'un Banach ne peut pas être de dimension infinie dénombrable. Si on se donne une base (dénombrable) $(e_1, e_2, \ldots)$ de E, on appelle E_n l'espace engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. C'est un sous-espace de dimension n donc c'est un fermé de E. Montrons que son intérieur $\mathring{E}_n$ est vide. Si tel n'étais pas le cas, il existerait une boule $B(x, \varepsilon)$ incluse dans E_n. En particulier le vecteur $x + \frac{\varepsilon}{2}.e_{n+1}$ serait dans cette boule, et comme x est combinaison linéaire des e_i pour $1 \leq i \leq n$, tout comme n'importe quel vecteur de E_n, on arriverait à prouver que e_{n+1} serait lui aussi combinaison linéaire des e_i, avec $1 \leq i \leq n$, ce qui contredirait le fait que les e_i forment une base de E.
Ainsi E_n est bien d'intérieur vide donc son complémentaire $F_n = E \setminus E_n$ est un ouvert

dense dans E. Par conséquent l'intersection des F_n est dense, ce qui revient à dire que l'intérieur de la réunion des E_n est vide. Or par définition, $E = \bigcup_n E_n$ ce qui est absurde.

Le théorème

Théorème 5.4.3. *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. alors il existe une famille de polynômes qui converge uniformément vers f.*

Remarque 16. En d'autres termes on dit que l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. ■

Démonstration. □

5.4.3 Séries et critère de Cauchy.

Pour une suite (u_n) à valeurs dans l'espace E, on dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

converge. On dit que la série converge absolument si la série réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ converge. Dans un Banach on peut utiliser le critère de Cauchy pour confirmer ou infirmer la convergence d'une suite ; Cela a donc une conséquence pratique pour les séries :
Si (u_n) est à valeurs dans un Banach, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon,\ \exists N\ \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \| < \varepsilon.$$

Théorème 5.4.4. *Une série à valeurs dans un Banach qui est absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\|.$$

□

On peut trouver des contre-exemples : la suite définie par $u_n = f_{n+1} - f_n$, où les f_k sont celles du premier exemple du chapite, ne peut pas donner une série convergente car cela équivaudrait à la convergence de la suite (f_n). Par ailleurs la série est absolument convergente car $\|u_n\| \sim \frac{1}{n^2}$.

Application : exponentielle de matrice.

On choisit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle. On pose

$$e^A \overset{déf}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette série converge car elle est absolument convergent et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un Banach (car de dimension finie). On a en effet $\sum \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$.
Ceci permet de résoudre des systèmes différentiels :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $n \times n$. Les solutions sont du type $Y(t) = e^{t.A} \times Y_0$.

Chapitre 6

Espaces connexes

6.1 Définition

6.1.1 Un titre à trouver

Définition 6.1.1. *Un espace métrique E est dit connexe si E et $\emptyset$ sont les seule spartes à la fois ouvertes et fermées.*

Exemples 31.
1-Nous verrons plus loin que $\mathbb{R}$ est connexe.
2- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas connexe. En effet toute boule ouverte et aussi fermée. Par exemple $B(0^\infty, 1)$.

Proposition 6.1.2. *Soit (E,d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *E n'est pas connexe.*
2. *il existe une partition de E en 2 ouverts.*
3. *Il existe une partition de E en 2 fermés.*

Démonstration. Si E n'est pas connexe, il existe une partie $A \subsetneq E$ non vide qui est ouverte et fermée. Donc $E \setminus A$ est aussi ouverte et fermée et $E = A \sqcup E \setminus A$. Cela montre $1 \Longrightarrow 2$ et $1 \longrightarrow 3$.

L'équivalence $2 \iff 3$ est immédiate par passage au complémentaire.

L'implication $2 \Longrightarrow 1$ est aussi immédiate : si $E = A \sqcup B$ avec A et B ouverts (et non vides), alors A et B sont aussi fermés et donc E n'est pas connexe. □

Définition 6.1.3. *On appelle partie connexe d'un espace E toute partie qui munie de la topologie induite est connexe. On appelle domaine une partie ouverte et connexe.*

Exemple 32. Il est plus facile (à ce stade) de dessiner des parties non connexes de $\mathbb{R}^2$

6.1.2 Caractérisation des connexes

Proposition 6.1.4. *Un espace (métrique) E est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0,1\}$ est constante*

Démonstration. Supposons qu'il existe $f : E \to \{0,1\}$ continue non constante. Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ forment une partition de E en deux parties non vides. Chacune est ouverte (ou fermée) comme image réciproque d'un ouvert (ou fermé).

Réciproquement, si E n'est pas connexe, on écrit $E = A \sqcup B$ avec A et B non vides et ouvertes. On pose

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in B. \end{cases}$$

C'est une application continue (à vérifier) non constante à valeurs dans $\{0,1\}$. □

Corollaire 6.1.5. *L'image par une application continue d'un connexe est un connexe.*

Démonstration. Sinon, on pourrait construire une application $h = g \circ f$ non constante et continue à valeurs dans $\{0,1\}$. □

Théorème 6.1.6 (Arbre et écorce)**.** *Soit A une partie connexe de E. Alors pour tout B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$, B est aussi connexe. En particulier $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que B ne soit pas connexe. Soit $f : B \to \{0,1\}$ continue et non-constante. Soit x dans B tel que $f(x) = 1$. Il existe ε tel que pour tout y dans $B(x,\varepsilon)$, $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2}$. Comme$f$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, cela entraine que f vaut 1 sur la boule $B(x,\varepsilon)$.

De même, si $y \in B$ est tel que $f(y) = 0$, on peut trouver une boule $B(y,\varepsilon')$ sur laquelle f est constante de valeur 0.

Comme B est dans $\overline{A}$, chaque boule rencontre A, donc f n'est pas constante sur A. Cela contredit la connexité de A. □

Théorème 6.1.7 (Des Bananes)**.** *Soit (A_i) une famille de connexes dans l'espace E. Si $\bigcap_i A_i$ n'est pas vide, alors $\bigcup_i A_i$ est connexe.*

Démonstration. Si f est une application continue à valeurs dans $\{0,1\}$ définie sur $\bigcup_i A_i$, f est constante sur chaque A_i et donc aussi sur l'intersection des A_i. Elle est donc globalement constante.

□

Théorème 6.1.8 (Des Saucisses)**.** *Si (A_n) est une suite de connexes telle que pour tout n, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_n A_n$ est connexe.*

Démonstration. Presque pareil que la preuve précédente. □

6.2 Connexes de $\mathbb{R}$

6.2.1 Les connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 6.2.1. *l'ensemble $\mathbb{R}$ est connexe (pour la topologie de la valeur absolue).*

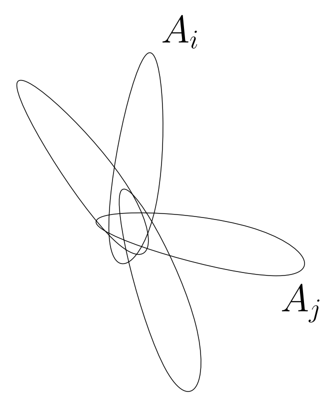


FIGURE 6.1 – intersection de connexes

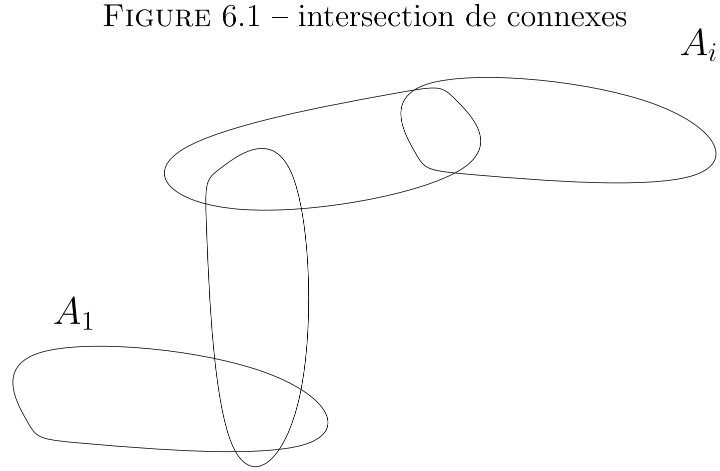


FIGURE 6.2 – suite de connexes

Démonstration. Première étape : une partie A non vide ouverte et fermée ne peut pas être minorée (ni majorée). En effet si elle est minorée elle admet une borne inférieure. Notons la a. Comme A est fermée, $a \in A$. Comme A est ouverte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est dans A. Cela contredit le fait que a minore A.

On procède de même pour la majoration.

Deuxième étape : on suppose que $\mathbb{R}$ n'est pas connexe. Soit A qui n'est ni vide ni $\mathbb{R}$ entier à la fois ouverte et fermée. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Les ensembles $A \cap [x, +\infty[$ et $A \cap]-\infty, x]$,e peuvent pas être tous les deux vide. Supposons que $A' := A \cap [x, +\infty[$ n'est pas vide. C'est une intersections de fermée, elle est donc fermée. Comme x n'appartient pas à A, on a aussi $A' =]x, +\infty[\cap A$ et c'est donc une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Elle est donc ouverte, fermée et minorée, c'est en contradiction avec le premier point de la preuve. □

Théorème 6.2.2. *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Un intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$ il est donc connexe (par Cor. 6.1.5). Le théorème 6.1.6 montre que tout intervalle est connexe.

Réciproquement, si I n'est pas un intervalle, par définition, il existe a, b, c avec a et b dans I et $c \notin I$ tels que

$$a < c < b.$$

Alors $I = (I \cap]-\infty, c]) \sqcup (I \cap [c, +\infty[)$ et chaque partie est ouverte et fermée. Donc I n'est pas connexe. □

Théorème des valeurs intermédiaire

Le théorème des valeurs intermédiaire dit que l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle. Ce n'est rien d'autre que la combinaison du corollaire 6.1.5 et du théorème 6.2.2.

6.2.2 connexité par arc

Définition 6.2.3. *Soit (E, d) un espace métrique. On appelle arc dans E l'image de toute application continue $f : [0,1] \to E$. On dire que c'est un arc (ou chemin) qui joint l'origine $f(0)$ à l'extrémité $f(1)$.*

Théorème 6.2.4. *Si E est tel pour tout (x, y) dans E^2 il existe un arc d'origine x et d'extrémité y, alors E est connexe.*

Démonstration. Soit $g : E \to \{0, 1\}$ continue. Soient x et y quelconque dans E. Soit f qui définit un arc joignant x à y. Cet arc est connexe (comme image continue d'un connexe) donc g y est contante. Cela montre que g est constante sur E. □

Corollaire 6.2.5. *Tout espace $\mathbb{R}^n$ est connexe.*