Cours d'intégration L3-mass

Renaud Leplaideur

Année 2014-2015
UBO

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur l'intégrale de Riemann et les limites croissantes

1.1 L'intégrale au sens de Riemann et les principaux résultats

1.1.1 Trois aspects de l'intégration selon Riemann

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction *continue*, et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, il y a (au moins) trois façons différentes de considérer la quantité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$:

1. L'opération est vue comme l'opérateur inverse de la dérivation $f \mapsto f'$. On parle alors de primitives, et on a
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$
où F est une primitive de f, c'est à dire qu'elle vérifie $F'(x) = f(x)$. On s'intéresse dans ce cas au calcul de primitives non triviales (par exemple des fractions rationnelles), les résultats principaux seront par exemple les formules de changement de variable ou d'intégration par partie.
2. Si on définit $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$, I devient une forme linéaire ($I(\lambda f + g) = \lambda I(f) + I(g)$) sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b])$ des fonctions continues définies sur $[a, b]$. On cherche à étudier si l'opérateur I est continue (et pour quelle topologie), c'est à dire qu'on veut avoir des résultats du type
$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f) \text{ si } \lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$
La question consiste à déterminer ce que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ signifie.
3. On s'intéresse à l'ensemble des fonctions f, pas nécessairement continues, pour lesquelles on peut définir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, d'une façon qui étende la définition pour f continue. On sait pas exemple que si $[c, d]$ est un intervalle dans $[a, b]$ on peut calculer $\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]}(x)\,dx$, où $\mathbb{1}_{[c,d]}$ est la fonction *indicatrice* de l'intervalle $[c, d]$, c'est à dire

qu'elle vaut 1 sur l'intervalle et est nulle en dehors de $[c, d]$. Cet aspect est souvent plus caché, mais il se voit par exemple dans le vraie définition de l'intégrale de Riemann, qui est valide pour les fonctions réglées (voir plus bas).

Si le premier aspect est souvent celui qu'on retient le plus, ce n'est pas celui que nous allons retenir dans ce cours. **Ce serait une erreur de se focaliser sur ce point de vue et de ne retenir et/ou voir l'intégration que comme une opération inverse de la dérivation.** Dans ce cours, nous allons définir une nouvelle intégration, dite au sens de Lebesgue. Bien sûr cette nouvelle intégration étend celle de Riemann mais, le lien intégrale-primitive-dérivée est beaucoup plus délicat.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons plutôt au second aspect, c'est à dire l'intégration comme forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0([a, b])$. La plupart des résultats auront donc la forme

$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f) \text{ si } \lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$

Les limites que nous étudierons serons des limites *monotones.*

Dans une seconde étape, nous verrons que cette nouvelle intégration permet de définir un nouvel ensemble de fonctions f pour lesquelles on peut calculer $\int_a^b f(x)\,dx$. Ceci fera donc le lien avec le troisième aspect de l'intégration. Cet ensemble permettra de définir à son tour un ensemble de sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$, les ensembles dits *mesurables.* On verra alors que ce point de vue est le "bon" pour faire des probabilités.

Le premier aspect, c'est à dire intégrale-primitives sera peu abordé, du fait de sa complexité.

1.1.2 Pour quelles f peut-on définir $\int_a^b f(x)\,dx$ au sens de Riemann ?

Si on considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, la quantité $\int_a^b f(t)\,dt$ représente la surface (algébrique) comprise entre le graphe et l'axe des abscisses.

Elle se calcul comme une limite d'une somme de Darboux, c'est à dire en obtenant la fonction f comme limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux.

Bien que souvent construire uniquement pour les fonctions continues, cette théorie permet en fait de définir l'intégrale d'une fonction f pour un ensemble plus gros que celui des fonctions continues : l'ensemble des *fonctions réglées.*

On rappelle qu'une fonction $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *constante par morceaux* s'il existe une subdivisions

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_p = b,$$

telle que sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ ψ est constante de valeur c_i. La valeur de ψ aux points a_i n'est pas importante, on peut choisir la valeur c_i, c_{i-1}. . . .

On note ensuite $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\,dt := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$.

Définition 1.1.1. *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux.*

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann s'il existe deux suites de fonctions constantes par morceaux, (φ_n) et (ψ_n) telles que

$$\forall\, t,\ |f(t)-\varphi_n(t)| \le \psi_n(t),\ \ et\ \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)\,dt = 0.$$

Enfin, on remarque que la définition s'étend sans difficultés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en prenant φ_n aussi à valeur dans $\mathbb{R}^d$.

1.1.3 Principaux résultats

Méthodes de calculs : lien intégration-dérivation

Le théorème fondamental du calcul différentiel établit un lien entre dérivation et intégration :

Théorème 1.1.2. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit F la fonction définie par*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F est dérivable et pour tout t dans $[a,b]$, $F'(t) = f(t)$.

Ce théorème permet de calculer des intégrales, soit par la méthode de l'intégration par partie :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = G(b)f(b) - G(a)f(a) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt,$$

soit par la méthode du changement de variable :

$$\int_a^b f\circ g(t)g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Passages à la limite

On rappelle que $||\ \ ||_\infty$ est la norme infinie définie par

$$||g||_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Si g est continue, cette borne supérieure est atteinte. Cette norme s'appelle aussi la norme de la convergence uniforme puisque dire $\lim_{n\to+\infty} ||f-\varphi_n||_\infty = 0$ signifie que la suite (φ_n) converge uniformément vers f :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N \text{ tel que } \forall\, n\ge N,\ \forall\, t\in[a,b],\ |f(t)-\varphi_n(t)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.3. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues (sur $[a,b]$) qui converge uniformément vers f, alors f est continue et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,d(t).$$

Ce résultat s'écrit aussi :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,d(t),$$

ce qui signifie qu'on peut inverser la limite uniforme et l'intégrale.

Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère un intervalle $I = [a, b]$ avec $a < b$. La lettre J désignera un autre intervalle de $\mathbb{R}$. On considère la fonction continue $f : I \times J \to \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.4 (continuité sous le signe somme)**.** *La quantité* $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *définit sur* J *une fonction continue.*

Remarque 1. Le théorème 1.1.3 peut se voir comme un cas particulier de ce théorème en considérant $x = n$ et une suite d'application au lieu d'une fonction de 2 variables. ■

Théorème 1.1.5 (dérivation sous le signe somme)**.** *Supposons que l'intervalle* J *soit ouvert et que la fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *existe et soit continue sur* J*. Alors la fonction définie par* $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *est de classe* C^1 *et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

1.1.4 Intégrales généralisées : le cas non compact

L'intégration (au sens de Riemann) a aussi été étudiée sur des intervalles du type $[a, +\infty[$. Elle a aussi été vue pour des fonctions présentant des singularités sur le compact $[a, b]$ (par exemple $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$). On sait que ce dernier cas peut se ramener au cas précédent par un changement de variable (qui envoie la singularité à l'infini, dans notre exemple on fera $u := \frac{1}{x}$).

Ainsi, nous pouvons nous limiter au cas $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Dans ce cas, il s'agit de calculer une aire reposant sur un intervalle de longueur infinie. Les résultats évoquaient la *convergence* de l'intégrale ou son *absolue convergence.*

Ici réside une différence significative entre l'intégrale déjà vue (au sens de Riemann) et celle que nous allons voir (au sens de Lebesgue). Des fonctions continues pourront avoir une intégrale convergente au sens de Riemann mais pas au sens de Lebesgue. La différence disparaîtra lorsqu'on s'intéressera (ou se limitera) aux intégrales absolument convergentes.

Cette différence s'explique par le fait que l'intégrale de Lebesgue que nous allons voir permet d'unifier les résultats et les techniques de démonstrations entre le cas compact ($[a, b]$) et le cas non-compact ($[a, +\infty[$). En quelque sorte, la démarche est donc inverse de celle de deuxième année :

On a définit en deuxième année $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ à partir de $\int_a^b f(x)\, dx$ en faisant $b \to +\infty$; On va ici définir directement $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et voir que cela permet de calculer $\int_a^b f(x)\, dx$ pour des fonctions plus générales que les seules fonctions continues ou réglées.

Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Comme nous l'avons dit plus haut, l'aspect privilégié est celui de l'opérateur linéaire continu. Nous rappelons donc les deux principaux résultats sur l'interversion entre limite et intégration dans le cas non compact.

Théorème 1.1.6. *Soient $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a < b$* [1] *et J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque x, et pour chaque t, $|f(t,x)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $x \in J \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ définit une fonction continue sur J.

Théorème 1.1.7. *Soit J un intervalle ouvert. Soit $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue et il existe une fonction continue g vérifiant*

1. *pour chaque x l'intégrale $\int_a^b f(t,x)dt$ converge.*
2. *pour chaque x, et pour chaque t, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t)$,*
3. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Nous insistons sur le point commun dans ces deux théorèmes. Dans les deux cas, il a une hypothèse de domination uniforme. C'est typiquement le type d'hypothèses que nous allons retrouver dans la théorie de l'intégration selon Lebesgue.

1.2 Rappels sur les limites et les convergences de suites de fonctions

1.2.1 Limites monotones. Valeurs d'adhérences

On rappelle le théorème issue de la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: l'existence d'une borne supérieure pour tout ensemble non vide majoré. On rappelle qu'une suite (u_n) dans $\mathbb{R}$ est *croissante* si pour tout n,

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Théorème 1.2.1. *Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}$ croissante majorée. Alors (u_n) converge.*

On peut avoir une version un peu plus fine :

Théorème 1.2.2. *Soit (u_n) une suite croissante dans $\mathbb{R}$. Si elle est majorée, alors elle converge vers $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, sinon elle diverge vers $+\infty$.*

1. Penser à $b = +\infty$

Dans les deux cas on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_k,\ k\in\mathbb{N}\},$$

en commettant un abus de notation sur le "sup".

Une suite réelle ne converge pas nécessairement. On rappelle qu'une *valeur d'adhérence de la suite* (u_n) est une limite d'une suite extraite de (u_n).

Théorème 1.2.3 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

Exercice 1
En commettant l'abus de langage qui consiste à considérer qu'une suite qui diverge vers $\pm\infty$ en fait converge vers $\pm\infty$ (dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$), montrer que toute suite réelle possède au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.2.4. *Soit* (u_n) *une suite réelle.*

Si elle est majorée on note $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *sa plus grande valeur d'adhérence. Dans la cas contraire on écrit* $\limsup_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*.*

Si elle est minorée on note $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ *sa plus petite valeur d'adhérence. Dans le cas contraire on écrit* $\liminf_{n\to+\infty} u_n = -\infty$*.*

Exercice 2
Soit une suite réelle (u_n).
1/ Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ existent toujours (dans $\overline{\mathbb{R}}$).
2/ Montrer l'inégalité $\limsup_{n\to+\infty} u_n \geq \liminf_{n\to+\infty} u_n$
3/ Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n$.

1.2.2 Convergences de suites de fonctions

Nous avons revu précédemment la notion de *convergence uniforme* d'une suite de fonction (f_n). On rappelle une notion plus faible.

Définition 1.2.5. *La suite de fonctions* (f_n) *définies sur un intervalle* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *converge simplement vers la fonction* f *si pour tout* x*, la suite numérique* $(f_n(x))$ *converge vers* $f(x)$*.*

Exercice 3
Écrire "avec des epsilons" la définition de la convergence simple. Montrer que la convergence uniforme entraine la convergence simple. Donner un contre-exemple à la réciproque.

Exercice 4
Construire une suite d'applications f_n définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, toutes continues mais qui ne converge pas vers une application continue/ qui converge vers une application non continue.

1.3 Rappels sur les ensembles

Un *ensemble* est une collection *d'éléments*. On écrit $x \in E$ pour dire que x est un élément de l'ensemble E. Lorsqu'on liste les éléments ou caractérise un ensemble par une propriété sur ces éléments, on écrit l'ensemble avec des accolades. Ainsi $\{x\}$ est l'ensemble composé du seul élément x et $\{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ est l'ensemble des réels strictement positifs aussi noté $\mathbb{R}_+^*$. L'ensemble vide, $\emptyset$ est l'ensemble qui n'a aucun élément.

On dit que E est *inclus* dans F si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. On note alors $E \subset F$ et E est un sous-ensemble de F.

La *fonction indicatrice* de l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est notée $\mathbb{1}_E$. Elle est définie par

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On rappelle qu'étant donné deux ensembles E et F, $E \cup F$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un des ensembles et $E \cap F$ est l'ensemble des éléments (éventuellement vide) appartenant aux deux. De plus $E \setminus F$ est l'ensemble des éléments appartenant à E mais pas à F.

Exercice 5
Donner $\mathbb{1}_{E\cup F}$, $\mathbb{1}_{E\cap F}$ et $\mathbb{1}_{E\setminus F}$ en fonction de $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_F$.

Retour sur le troisième aspect de l'intégrale

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, indicatrice de l'ensemble des rationnels n'est pas réglée. En effet, si elle l'était, on trouverait une suite de fonctions constante par morceau qui converge uniformément vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Considérons donc $\varepsilon = \frac{1}{3}$ et φ en escalier (= constante par morceaux) qui est ε-proche de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Soit $[a, b]$ l'un des morceaux où φ est constante ; on suppose que le morceau est d'intérieur non vide, *i.e.,* $a < b$ (par définition, de tels morceaux existent). Si x est dans $\mathbb{Q} \cap [a, b]$, on doit avoir $\varphi(x) > \frac{2}{3}$. Si y est dans $[a, b] \setminus \mathbb{Q}$, on doit avoir $\varphi(y) < \frac{1}{3}$. Ceci donne une contradiction.

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\,dx$ n'a pas de sens puisque la fonction n'est pas réglée. Nous verrons que l'intégrale de Lebesgue permet de donner un sens à $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)\,dx$.

Chapitre 2

Ensembles négligeables et définition de l'intégrale de Lebesgue

2.1 Ensembles dénombrables, ensembles négligeables

2.1.1 Ensembles dénombrables

Définition 2.1.1. *Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.*

En d'autre termes, un ensemble est dénombrable si on peut compter ses éléments.

Exemple. . $\mathbb{N}$ ainsi que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est dénombrable. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Aucun intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) n'est dénombrable.

Exemple. . L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 2. Un ensemble fini est donc dénombrable.

Parfois on parlera d'ensemble infini dénombrable pour spécifier qu'il n'est pas fini [1]. ■

Théorème 2.1.2. *Un produit fini d'ensembles dénombrables et une union dénombrable d'ensembles dénombrables sont dénombrables.*

L'exemple de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ montre qu'un produit infini d'ensembles dénombrables n'est pas nécessairement dénombrable.

Convention. Dans toutes les preuves utilisant un ensemble dénombrable, par soucis de simplification nous supposerons toujours que l'ensemble est infini. Le cas d'un ensemble fini étant généralement beaucoup plus simple à traiter. De plus, nous supposerons toujours que l'ensemble est en *bijection* avec $\mathbb{N}$ au lieu de simplement supposer l'existence d'une injection.

2.1.2 Ensembles négligeables

Définition 2.1.3. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit négligeable (*au sens de Lebesgue*) s'il peut être recouvert par une famille dénombrable d'intervalles de longueur totale arbitrairement petite.*

1. Dans certains livres on peut trouver comme condition supplémentaire dans la définition qu'un ensemble dénombrable est nécessairement infini ; dans ce cas un ensemble fini n'est pas dénombrable.

Exemple. Nous allons voir que tout ensemble dénombrable est négligeable.

Contre-exemple. Un intervalle non vide n'est pas négligeable. En effet, la somme des longueurs devra au minimum être égale à la longueur de l'intervalle pour le recouvrir. Elle ne peut donc pas être aussi petite que voulue.

Auparavant nous allons explicité chaque terme de la définition afin de bien la comprendre. On rappelle qu'un *recouvrement* par une famille dénombrable d'intervalles d'un ensemble E est une famille d'intervalle I_n (donc de la forme $[a_n, b_n]$ les crochets pouvant être ouverts ou fermés) tels que tout x de E appartient à au moins un intervalle I_n.

La *longueur totale* du recouvrement est $\sum_n (b_n - a_n)$.

Bien évidemment, un recouvrement dénombrable (I_n) étant fixé, celui-ci a une longueur également fixée. Le terme *arbitrairement petite* signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un recouvrement (I_n) de longueur totale inférieure à ε.

Ainsi la définition s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ (I_n),\ I_n = [a_n, b_n],\ \text{t.q. } E \subset \bigcup_n I_n \text{ et } \sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Exercice 6
Vérifier qu'on peut se restreinte au cas où chaque intervalle I_n est fermé.

Terminologie : par soucis de simplification, dans un premier temps, nous parlerons juste d'ensemble négligeable (*tout court*) au lieu de dire *négligeable au sens de Lebesgue.*

Enfin, on dit qu'un propriété $\mathcal{P}$ a lieu **presque partout** (*au sens de Lebesgue*) si elle a lieu partout sauf sur un ensemble négligeable.

Lemme 2.1.4. *Un ensemble dénombrable est négligeable.*

Démonstration. Considérons un ensemble dénombrable $E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Fixons $\varepsilon > 0$. On considère pour chaque n l'intervalle $I_n := [x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}]$.

Chaque x_n appartient à I_n donc $E = \bigcup_n \{x_n\} \subset \bigcup_n I_n$. De plus la longueur totale du recouvrement est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon.$$

□

La définition 2.1.3 permet d'obtenir immédiatement :

Lemme 2.1.5. *Tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est lui-même négligeable. Une intersection d'ensembles négligeables est négligeable. Une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Remarque 3. Il existe des ensembles négligeables qui ne sont pas dénombrables. Par exemple l'ensemble de Cantor triadique. ■

On donne aussi une définition équivalente d'un ensemble négligeable. La démonstration est laissée en exercice.

Lemme 2.1.6. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est négligeable si et seulement s'il peut être recouvert par un famille dénombrable d'intervalles de longueur totale finie et telle que chaque point de E appartient à une infinité d'intérieurs de ces intervalles.*

2.2 Intégrale au sens de Lebesgue

2.2.1 Intégrale pour des fonctions en escalier à support borné

Dans toute cette section on se fixe un intervalle I qui peut être ouvert, fermé, semi-ouvert semi-fermé, de longueur finie ou infinie. On notera cet intervalle $I = (a, b)$ les parenthèses étant mises à la place des crochets pour ne pas avoir à différencier les cas ouverts ou fermés.

Définition 2.2.1. *Une fonction f définie sur I est dite en escalier à support borné (e.s.c.en abrégé) si*

- *Il existe une famille finie (éventuellement vide) de sous-intervalles disjoints (sauf sur les bords) I_k, chacun de longueur $|I_k|$ finie et telle que sur chaque I_k f est constante de valeur $c_k \neq 0$,*
- *en dehors des I_k f est nulle.*

*On notera $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des fonctions e.s.c.(*définies sur l'intervalle *I).*

Si l'intervalle I est de longueur finie alors une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux. Si l'intervalle I est de longueur infinie, par exemple si $a = -\infty$, alors une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux telle que le "premier" morceau soit de la forme $]-\infty, a_1]$ et la fonction est nulle sur cet intervalle.

Comme pour les fonctions constantes par morceaux, la valeur aux bords des intervalles I_k peut ne pas être bien définie. Nous insistons sur le fait que cet ensemble de points pour lesquels la fonction peut être mal définie est un ensemble fini donc dénombrable donc négligeable. Comme nous n'utiliserons que des propriétés vraies *presque partout*, la valeur exacte de la fonction *e.s.c.*en ces points problématique n'importera pas.

Définition 2.2.2. *Soit f une fonction e.s.c.définie sur I, de valeur c_k sur les sous-intervalles I_k. On pose*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_k c_k |I_k|.$$

Nous avons précisé qu'une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux, avec éventuellement quelques contraintes sur les valeurs pour le premier et le dernier morceaux si l'intervalle est de longueur infinie. La définition de l'intégrale est exactement la même que pour une fonction constante par morceaux en respectant cette contrainte.

Voici maintenant les deux lemmes essentiels dans la théorie d'intégrations de Lebesgue.

Lemme 2.2.3 (Lemme A)**.** *Soit (φ_n) une suite décroissante de fonctions e.s.c.qui converge presque partout vers 0. Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ décroît aussi vers 0.*

On précise que la suite est décroissante si pour tout n et pour tous les x à l'intérieur des intervalles de subdivision,

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x).$$

Comme pour chaque n, il n'y a qu'un nombre fini de points qui sont dans les bords des "étages", leur union lorsque n décrit $\mathbb{N}$ est dénombrable donc négligeable.

Lemme 2.2.4 (Lemme B)**.** *Soit (φ_n) une suite croissante de fonctions e.s.c.sur $I = (a, b)$ telle que la suite des intégrales $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ est majorée. Alors pour presque tout x de I, la suite $(\varphi_n(x))$ converge (vers une valeur $\varphi(x)$).*

Avant de voir les preuves de ces lemmes, attachons nous à bien comprendre leur énoncé. Le lemme A dit que pour tout x (à part ceux qui sont points de discontinuité) la suite $(\varphi_n(x))$ décroît et qu'on dispose d'un ensemble négligeable E dans I tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$, la suite numérique $(\varphi_n(x))$ décroît vers 0. La conclusion dit que la suite des intégrales décroît aussi vers 0.

Le lemme B dit qu'on dispose d'un ensemble E' négligeable tel que pour tout $x \in I \setminus E'$, la suite $(\varphi_n(x))$ est croissante. Alors, si en outre la suite des intégrales est majorée, il existe un ensemble négligeable E'' tel que pour tout $x \in I \setminus E''$ la suite $(\varphi_n(x))$ converge vers une valeur notée $\varphi(x)$.

Preuve du lemme A. Le résultat porte sur les intégrales et la définition 2.2.2 montre que la valeur de l'intégrale d'une fonction *e.s.c.*ne dépend pas de la valeur prise par la fonctions aux points de discontinuité. On considère donc que pour chaque n et pour chaque point de discontinuité de φ_n, la valeur est la plus grande des 2 possibles (limite à gauche et limite à droite).

Pour chaque x de I, la suite $(\varphi_n(x))$ décroît. En vertue du théorème 1.2.2, la suite $(\varphi_n(x))$ tend, soit vers un réel, soit vers $-\infty$. Considérons $n \geq 1$ et un intervalle $I_{k,n}$ sur lequel φ_n est constante de valeur $c_{k,n}$. Alors, nécessairement $c_{k,n} \geq 0$, sinon pour tout x de cet intervalle $I_{k,n}$ la suite $\varphi_p(x)$ serait strictement négative à partir du rang n et donc tendrait vers une valeur strictement négative. Ceci contredirait l'hypothèse que presque partout $(\varphi_p(x))$ tend vers 0.

Ainsi, pour tout n, le graphe de φ_n est sous celui de φ_1 mais au-dessus de l'axe des abscisses. En conséquence, la suite de terme général $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ est décroissante et positive. Elle converge donc et il suffit de montrer que la limite est négative pour avoir démontré le lemme.

Par définition, la fonction φ_1 est nulle en dehors d'un ensemble $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. L'hypothèse de décroissance dit que pour tout n, le graphe de φ_{n+1} est sous le graphe de φ_n. Ainsi, pour tout n, φ_n est nulle sur $(a, a_1[$ ainsi que sur $]b_1, b)$. Les contributions des intégrales sont donc restreintes au compact $[a_1, b_1]$.

Sur cet intervalle, notons que chaque φ_n est majorée par M, borne supérieure de φ_1. Considérons l'ensemble négligeable E en dehors duquel $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = 0$. On peut aussi ajouter à E l'ensemble des points de discontinuité de toutes les φ_n (qui est négligeable comme union dénombrables d'ensembles finis).

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit x dans $[a_1, b_1] \setminus E$. La suite $(\varphi_n(x))$ converge vers 0 (en décroissant) et il existe donc un entier $N_{x,\varepsilon}$ tel que pour tout $n \geq N_{x,\varepsilon}$,

$$0 \leq \varphi_n(x) < \varepsilon.$$

Par définition $x \notin E$ donc x n'est pas un point de discontinuité des φ_p. Il existe donc un intervalle $I_{k,n}$ contenant x en son intérieur et sur lequel φ_n est constante. Nous venons de voir que la valeur $c_{k,n} = \varphi_n(x)$ est inférieure stricte à ε. À x nous associons donc l'intervalle ouvert $\mathring{I}_{k,n}$ que nous notons $U(x)$. Il contient x. Ainsi,

$$\forall y \in \ U(x), \forall n \geq N_{x,\varepsilon},\ 0 \leq \varphi_n(y) < \varepsilon.$$

Par définition il existe un recouvrement de E dénombrable en intervalles fermés de la forme $[\alpha_k, \beta_k]$ tels que la longueur total soit intérieure à ε. À chaque intervalle $[\alpha_k, \beta_k]$ on associe un intervalle $]\alpha'_k, \beta'_k[$ qui contient strictement $[\alpha_k, \beta_k]$ et de longueur plus petite que deux fois $\beta_k - \alpha_k$. Si x est un point de E, il appartient à l'un des $[\alpha_k, \beta_k]$ et donc à l'un des $]\alpha'_k, \beta'_k[$. On choisit l'un d'entre eux et on le note $V(x)$.

Nous venons donc de construire un recouvrement d'ouverts de l'intervalle compact $[a_1, b_1]$. Par définition de la compacité on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Ce recouvrement fini contient des intervalles de la forme $U(x)$ ou des intervalles de la forme $V(x)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'intervalle de la forme $U(x)$ on peut prendre un entier N plus grand que tous les $N_{x,\varepsilon}$ associés à ces intervalles.

Choisissons alors $n \geq N$ et y dans $[a_1, b_1]$. Si y est dans l'un des $U(x)$, alors $\varphi_n(y) < \varepsilon$. Sinon, y est dans l'un des $V(x)$ et $\varphi_n(y) < M$. Mais la somme des longueurs des intervalles $V(x)$ est inférieure à ε.

Par conséquent, pour $n \geq N$,

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_n(y)\, dy \leq \varepsilon(b_1 - a_1) + M\varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Preuve du lemme B. Considérons $\varepsilon > 0$ et A un majorant de la suite des intégrales $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\, dx$. Quitte à considérer $\varphi_n - \varphi_1$ on peut toujours considérer que toutes les fonctions φ_n sont positives.

Soit E_0 l'ensemble des points x tels que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = +\infty$. Pour x dans E_0, il existe $N(x)$ tel que pour tout $n \geq N(x)$, $\varphi_n(x) \geq \dfrac{A}{\varepsilon}$. Soient donc $E_{\varepsilon,n}$ l'ensemble des points y tels que $\varphi_n(y) \geq \frac{A}{\varepsilon}$ et E_ε l'ensemble des points x tels qu'il existe $N(x)$ tel que pour tout $n \geq N(x)$, $\varphi_n(x) \geq \dfrac{A}{\varepsilon}$.

Nous venons de voir $E_0 \subset E_\varepsilon$ et nous avons aussi $E_\varepsilon \subset \bigcup_n E_{\varepsilon,n}$.

La croissance des φ_n implique $E_{\varepsilon,n} \subset E_{\varepsilon,n+1}$. Enfin, pour chaque n, $E_{\varepsilon,n}$ est une union d'intervalles (là où φ_n est plus grande que $\dfrac{A}{\varepsilon}$) de longueur totale inférieur à ε car φ_n est positive et $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\, dx \leq A$.

Ainsi, pour chaque N, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} E_{\varepsilon,n} = E_{\varepsilon,N}$ est inclus dans une union d'intervalles de longueur totale ε. Plus exactement, c'est une union des intervalles où φ_n est plus grande que $\dfrac{A}{\varepsilon}$. La croissance de la suite (φ_n) montre que si x est dans un tel intervalle, alors, pour tout $p \geq 1$, $\varphi_{n+p}(x) \geq \dfrac{A}{\varepsilon}$. Ainsi $E_{\varepsilon,N}$ est une suite croissante d'union d'intervalles disjoints (sauf sur leur bord éventuellement), de longueur totale inférieure à ε. L'union sur N de ces intervalles est encore de longueur totale inférieure à ε, ce qui montre que E_ε est inclus dans une union d'intervalles dont la longueur totale n'excède pas ε. Cette même union contient $E_0 \subset E_\varepsilon$, et ce qui montre que E_0 un ensemble négligeable. $\square$

2.2.2 Les fonctions sommables

L'espace $\mathcal{E}_1$

Considérons une suite croissante de fonctions *e.s.c.*comme dans le lemme B. On suppose que les intégrales ont un majorant commun. Il existe donc une fonction φ *définie seulement presque partout* telle que $\varphi_n \to \varphi$ (presque partout). On notera $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions, définies presque partout que l'on peut obtenir de cette manière.

Pour une telle fonction φ, le lemme B nous incite à poser [2]

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Ceci n'a de sens que si nous montrons auparavant que la limite ne dépend pas du choix de la suite (φ_n).

Proposition 2.2.5. *Soient (φ_n) et (ψ_m) deux suites de fonctions e.s.c., chacune étant croissante et chaque suite d'intégrale étant majorée. Soient φ et ψ les limites (définies presque partout). On suppose que l'on a pour presque tout x,*

$$\psi(x) \geq \phi(x).$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \leq \lim\limits_{m\to+\infty} \int_a^b \psi_m(x)\,dx.$

Démonstration. On fixe n et on considère la suite de fonctions

$$h_m(x) := \max(\varphi_n(x) - \psi_m(x), 0).$$

Il s'agit d'une suite (lorsque m varie) de fonctions *e.s.c.*décroissante et qui converge presque partout vers 0 (puisque pour presque tout x $\varphi_n(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$).

Le lemme A montre donc que l'on a $\lim\limits_{m\to+\infty} \displaystyle\int_a^b h_m(x)\,dx = 0$. Notons que pour chaque m, $\varphi_n - \psi_m \leq h_m$ et est une fonction *e.s.c.*et

$$\int_a^b h_m(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi_n(x) - \psi_m(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx - \int_a^b \psi_m(x)\,dx.$$

Le terme de droite et le terme de gauche convergent lorsque $m \to +\infty$, on peut donc passer à la limite et l'on a

$$\forall\, n,\ \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \leq \lim_{m\to+\infty} \int_a^b \psi_m(x)\,dx.$$

On passe ensuite à la limite en n. $\square$

2. Remarquer que la croissance des φ_n entraine la croissance de la suite des intégrales et donc sa convergence car la suite est majorée.

En appliquant la proposition 2.2.5 au cas $\psi \geq \varphi$ puis $\varphi \geq \psi$ on montre le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.6. *Soient φ dans $\mathcal{E}_1$ et (φ_n) et (ψ_m) deux suites de fonctions e.s.c.comme dans le lemme B qui convergent (presque partout) vers φ. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_a^b \psi_m(x)\,dx.$$

Ceci permet donc de définir $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx$ par (2.1).

Exercice 7

Montrer que si f et g sont deux fonctions dans $\mathcal{E}_1$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi dans $\mathcal{E}_1$.

Exemples

• Nous allons construire un exemple de fonction dans $\mathcal{E}_1$ qui n'est pas réglée. Ceci montrera que l'espace construit est plus gros que l'espace des fonctions pour lesquelles on savait calculer l'intégrale de Riemann.

On considère la suite de fonctions f_n définies de la manière suivante : pour chaque $n \geq 1$, on ordonne les rationnels de l'intervalle $[0,1]$ qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $q \leq n$. Ils sont en nombre fini, et cela fournit une subdivision de l'intervalle $[0,1]$. On définit alors la fonction $f_n(x)$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ n'est pas un point de la subdivision,} \\ 1 \text{ si } x \text{ est l'un des points de la subdivision.} \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite croissante de fonctions *e.s.c.*. Elles vérifient toutes $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. Si x est rationnel, donc de la forme $x = \dfrac{p}{q}$, pour tout $n \geq q$, $f_n(x) = 1$. Au contraire, si x est irrationnel, pour tout n, $f_n(x) = 0$. Ainsi, la limite f est la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas intégrable au sens de Riemann [3] mais l'est au sens que nous venons de définir.

• Il est assez facile de voir que l'indicatrice d'un intervalle borné , qu'il soit ouvert ou fermé ou semi-ouvert est sommable. Plus exactement, $\mathbb{1}_{(c,d)}$ est dans $\mathcal{E}_1$ car c'est une fonction *e.s.c.*.

Fonctions sommables

Définition 2.2.7. *Une fonction définie presque partout sur (a,b) sera dite sommable si elle s'écrit sous la forme*

$$f = f_1 - f_2,$$

avec f_1 et f_2 dans $\mathcal{E}_1$. On notera $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des fonctions sommables (sur (a,b)).

Pour une telle fonction on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$

3. à faire !

Remarque 4. Comme la fonction nulle est dans $\mathcal{E}_1$, on en déduit que $\mathcal{E}_2$ contient $\mathcal{E}_1$. On admettra (ou on en fera la preuve en tant qu'exercice) que la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas du choix des fonctions f_1 et f_2 [4]. ■

> Cette définition des fonctions sommables permet de définir $\mathcal{E}_2$ ainsi que l'intégrale sur $\mathcal{E}_2$. Toutefois, **dans la pratique il est très rare qu'on utilise cette définition** pour montrer qu'une fonction est sommable. On verra plus loin d'autres façons pour établir qu'une fonction est dans $\mathcal{E}_2$.

Proposition 2.2.8. *Soient f une fonction sommable et g une fonction presque partout égale à f. Alors g est sommable, de même intégrale que f.*

Démonstration. On écrit $f = f_1 - f_2$. La fonction f_1 est (modulo un ensemble négligeable) limite croissante de fonctions *e.s.c.*(à intégrales bornées). On pose $g_1(x) = f_1(x)$ si $g(x) = f(x)$. La fonction g_1 est modulo un ensemble négligeable lite croissante de la même suite de fonctions *e.s.c.*. On fait pareil avec f_2. □

Cela montre que l'exemple précédent ($\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$) est très artificiel car $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \equiv 0$ presque partout !

Propriétés complémentaires

On admettra [5] aussi la linéarité de l'intégrale :

Proposition 2.2.9. *Soient f et g deux fonctions sommables, soient α et β deux réels. Alors $\alpha.f + \beta.g$ est aussi sommable et*

$$\int_a^b \alpha.f(x) + \beta.g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Proposition 2.2.10 (Formule de Chasles)**.** *Soient c dans (a,b) et f sommable sur (a,b). Alors f est sommable sur (a,c) et (c,b) et*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Comme on peut écrire $f = f_1 - f_2$, et comme $\mathbb{1}_{(a,c)}f = \mathbb{1}_{(a,c)}f_1 - \mathbb{1}_{(a,c)}f_2$, on peut supposer que f est dans $\mathcal{E}_1$.

Si φ_n est une fonction *e.s.c.*sur (a,b), alors $\mathbb{1}_{(a,c)}\varphi_n$ est *e.s.c.*sur (a,c). Si on considère une suite croissante convergente vers f de fonctions *e.s.c.*, $(\mathbb{1}_{(a,c)}\varphi_n)$ est une suite croissante convergente vers f sur (a,c) presque partout. Enfin, si $\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_{(a,c)}(\varphi_n - \varphi_0)(x)\,dx$ est inférieur à $\displaystyle\int_a^b (\varphi_n - \varphi_0)(x)\,dx$ (car $\varphi_n - \varphi_0$ est positive), donc majorée si les intégrales $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ sont majorées. □

---

4. Indication. Remarquer que $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ s'écrit aussi $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$.
5. ou on peut faire la preuve en tant qu'exercice.

Nous terminerons cette partie avec un résultat étonnant sur les fonctions sommables :

Proposition 2.2.11. *Soit f une fonction sommable sur (a, b). Alors $|f|$ l'est aussi.*

Démonstration. Posons $f^+(x) := \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) := \min(f(x), 0)$. Alors

$$|f| = f^+ - f^-.$$

Écrivons $f = f_1 - f_2$ avec $f_i \in \mathcal{E}_1$. L'exercice 2.2.2 montre que $\max(f_1, f_2)$ et $\min(f_1, f_2)$ sont aussi dans $\mathcal{E}_1$. Or,

$$f^+ = \max(f_1, f_2) - f_2 \text{ et } f^- = \min(f_1, f_2) - f_2.$$

Donc ce sont des fonctions dans $\mathcal{E}_2$. □

Remarque 5. Au passage on a aussi montré que f^+ et f^- sont sommables. ■

2.2.3 Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue : cas d'une fonction continue sur un segment

Si on se donne une fonction continue sur le segment (intervalle fermé borné) $[a, b]$, il est naturel de vouloir comparer l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue. Comme l'écriture est la même, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, il serait souhaitable que la valeur soit la même !

Proposition 2.2.12. *Si f est une fonction continue sur le compact $[a, b]$, alors f est sommable et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann.*

Démonstration. Il suffit de prendre une suite croissante de subdivisions [6] de l'intervalle $[a, b]$ dont le pas tend vers 0. À chaque rang, on considère la fonction en escalier qui vaut sur chaque segment de la subdivision le minimum de f sur ce même segment. Cela forme une suite croissante de fonctions en escaliers, donc *e.s.c.*, qui converge uniformément vers f, donc presque partout ! En d'autres termes, une fonction continue sur un segment est dans $\mathcal{E}_1$. □

6. C'est à dire que la subdivision au rang $n + 1$ raffine celle du rang n

Chapitre 3

Théorèmes de passage à la limite

3.1 Interversion d'une limite et de l'intégrale

Nous allons voir deux théorèmes et plusieurs corollaires qui permettent d'avoir l'interversion de limites :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

3.1.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 3.1.1 (Beppo Lévi)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables croissante. Si la suite des intégrales $\int_a^b f_n(x)\,dx$ est majorée, alors $(f_n(x))$ converge presque partout vers une fonction f qui est sommable. De plus,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Démonstration. On suppose que chaque f_n est dans l'espace $\mathcal{E}_1$. Pour chaque n, il existe donc une suite de fonctions *e.s.c.*$(\varphi_{n,m})_m$ croissante de limite f_n.

Pour chaque n on pose

$$\psi_n(x) := \sup_{k\leq n} \varphi_{k,n}(x).$$

Il faut d'abord vérifier que cette définition a du sens.

Tout d'abord, chaque f_n est bien définie sauf sur un ensemble négligeable. L'union (en n) de ces ensembles négligeables est encore négligeable. Pour toute la suite on considèrera donc x en dehors de cet ensemble négligeable.

Chaque $\varphi_{k,n}(x)$ avec $k \leq n$ est majoré par $f_k(x) \leq f_n(x)$; ainsi $\psi_n(x)$ est bien défini. Comme $\varphi_{k,n}(x) \leq \varphi_{k,n+1}(x)$, la suite (ψ_n) est croissante. Enfin, toutes les intégrales sont majorées par une même constante car

$$\int_a^b \psi_n(x)\,dx \leq \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Nous pouvons appliquer le Lemme B et en déduire que (ψ_n) converge presque partout vers une fonction sommable, f et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

Comme nous avons $\psi_m(x) \geq \varphi_{n,m}(x)$ (et $n \leq m$), en faisant $m \to +\infty$ pour n fixé, on montre l'inégalité (presque partout)

$$f(x) \geq f_n(x).$$

On a donc la double inégalité

$$\psi_n \leq f_n \leq f.$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure, ponctuellement $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$ et en moyenne

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans le cas général, la démonstration est admise. □

Corollaire 3.1.2. *Si l'intégrale de Riemann* $\int_a^b |f(x)|dx$ *est convergente sur l'intervalle* (a,b) *alors* f *est sommable (au sens de Lebesgue) et les deux intégrales coïncident.*

Démonstration. Considérons le cas $a = 0$ et $b = +\infty$ et f continue (éventuellement juste par morceaux). On pose $f_n(x) := |f(x)|.\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. La suite est croissante et chaque f_n est sommable comme fonction continue définie sur un compact. De plus l'intégrale coincide avec $\int_0^n |f(x)|dx$. La limite existe, par hypothèse, donc la suite des intégrales est bornée. Ainsi f_n converge presque partout vers une fonction $\widetilde{f}$ qui est sommable d'intégrale la limite des intégrales des f_n. La convergence presque partout des f_n montre qu'en fait $\widetilde{f} = |f|$ (presque partout) et la limite des intégrales donne

$$\int_0^{+\infty} \widetilde{f}(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n |f(x)|dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Cela montre que f est sommable. □

Corollaire 3.1.3. *Soit* (k_n) *une suite de fonctions sommables. On suppose que la série de terme général* $\int_a^b |k_n(x)|\,dx$ *est convergente. Alors la série converge presque partout et*

$$\int_a^b \sum_n k_n(x)\,dx = \sum_n \int_a^b k_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de B. Levi à la série des parties positives et à la série des parties négatives des k_n. □

Application. Nous allons montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On commence par remarquer que pour tout $x > 0$, e^{-x} est dans $[0, 1[$, donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = xe^{-x}\frac{1}{1 - e^{-x}} = xe^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nx}.$$

Ensuite on pose $k_n(x) := xe^{-(n+1)x}$. Une intégration par partie montre

$$\int_0^{+\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2},$$

et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi $\sum_n k_n(x)$ converge presque partout (en fait, on savait déjà qu'elle converge partout sur $]0,+\infty[$) et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8
On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$.
1/ Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer que la suite définie par $(1 - \frac{x^2}{n})^n$ converge vers e^{-x^2} et est croissante à partir d'un certain rang. Pour établir la croissance, on pourra faire le développement limité du logarithme du rapport de deux termes successifs de la suite.
2/ On considère la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x).$$

Montrer que la suite est croissante et converge presque partout vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3/ En déduire l'égalité $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\, dx$.
4/ On rappelle que les intégrales de Wallis, définies par

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \, d\theta$$

vérifient $I_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}}$ lorsque m tend vers $+\infty$. Conclure à l'aide d'un changement de variable dans le calcul de $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\, dx$.

Corollaire 3.1.4. *Soit f sommable. Si $\int_a^b |f(x)|\, dx = 0$ alors f est nulle presque partout.*

Démonstration. Si la fonction est nulle presque partout, alors son intégrale est nulle (d'après Prop 2.2.8).

Réciproquement, supposons que l'intégrale est nulle. On rappelle qu'une fonction mesurable est finie presque partout (puisque c'est une différence de fonctions de $\mathcal{E}_1$ et chaque élément de $\mathcal{E}_1$ est fini presque partout).

On applique alors le corollaire précédent à $k_n(x) = |f(x)|$. Chaque somme partielle (finie) a son intégrale nulle et donc la série est supposée converger presque partout. Si pour x, $f(x) \neq 0$, la somme partielle en x vaut $n.f(x)$ qui diverge. Ainsi, f est nulle presque partout. $\square$

3.1.2 Théorème de convergence dominée

Énoncé du théorème de Lesbesgue

Théorème 3.1.5 (Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables sur (a,b). On suppose que*

1. *Il existe une fonction sommable g telle que pour tout n,*

$$|f_n| \leq g.$$

2. *La suite (f_n) converge (presque partout) vers une fonction f.*

Alors f est sommable et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Démonstration. On construit à partir de la suite (f_n) deux suites monotones de fonctions sommables qui convergent vers f, l'une en croissant l'autre en décroissante.

Première étape. Soit g_1 la fonction définie par

$$g_1(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)\,^1.$$

Nous affirmons que c'est une fonction sommable.

Tout d'abord, comme, presque partout la suite $(f_n(x))$ converge, elle est bornée. Donc g_1 est bien définie (presque partout). De plus, $\max(f_1, f_2) = [f_1 - f_2]^+ + f_2$ et donc c'est une fonction sommable (voir la remarque 5). Par conséquent, pour tout n,

$$\phi_n := \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

est sommable. Enfin, la suite (ϕ_n) est croissante (lorsque n croît on augmente l'ensemble sur lequel on prend le maximum) et toutes ces fonctions sont majorées par g. Ainsi, pour tout n,

$$\int_a^b \psi_n(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Le théorème de convergence monotone (th. 3.1.1) s'applique, et donc g_1 est une fonction sommable.

Plus généralement, on pose $g_n(x) := \sup_{m\geq 0} f_{n+m}(x)$. La même démonstration permet de voir que chaque g_n est sommable, que la suite est décroissante et que toutes les g_n sont majorées par g. On a aussi

$$g_n \geq f_n.$$

Deuxième étape. On procède de même avec

$$h_n := \inf_{m\geq 0} f_{n+m}.$$

c'est une suite croissante de fonctions sommables, toutes majorées par g et satisfaisant

$$f_n \geq h_n.$$

1. Noter que ce sup est un max presque partout.

Troisième étape. On note que g_n et f_n sont monotones et convergent presque partout vers f. Ainsi f est sommable et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b h_n(x)\,dx.$$

La double inégalité $h_n \leq f_n \leq g_n$ et le théorème des gendarmes montrent que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Exemple. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) := \min\left\{\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right\}.$$

Chaque f_n est continue sur $(0,1)$. La suite converge presque partout vers la fonction nulle (en fait il y a convergence simple). On remarque aussi que l'on a

$$||f_n||_\infty = n,$$

donc la convergence n'est pas uniforme. En revanche, pour tout $x \in]0,1]$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La fonction g est sommable sur $(0,1)$. On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Contre-exemple. Ce théorème ne permet pas de conclure dans tous les cas puisqu'il est parfois impossible de trouver une fonction sommable dominante. L'exemple classique est celui de la bosse glissante.

On considère une fonction continue, nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$, positive et d'intégrale non nulle (donc la fonction n'est pas identiquement nulle !). On pose $f_n(x) := \dfrac{f(x+n)}{n}$, ce qui signifie qu'on propage la "bosse" en l'atténuant d'un paramètre $\dfrac{1}{n}$ sur chaque intervalle $[n, n+1]$.

La suite de fonction converge simplement vers 0 puisque pour tout x, à partir d'un certain rang $f_n(x) = 0$. La convergence a donc lieu presque partout.

Cependant il n'existe pas d'application dominante et sommable. En effet, une telle application g devrait vérifier

$$g(x) = \sup_n |f_n(x)| = \frac{f(x-[x])}{[x]},$$

et son intégrale sur $\mathbb{R}$ serait donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_n \frac{1}{n}\int_0^1 f(y)\,dy = +\infty.$$

Exercice 9
Donner une bosse glissante qui admet une application dominante sommable.

Exercice 10
Revenir sur l'exercice de l'intégrale de Gauss.

Applications

En guise d'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous allons voir les théorèmes de continuité et dérivation sous le signe somme.

Tout d'abord, nous allons voir qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas sommables sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3.1.6. *Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge mais $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge (au sens des intégrales de Riemann). Alors f n'est pas sommable.*

Démonstration. Faisons une démonstration par l'absurde. Supposons que f est sommable. Alors, la proposition 2.2.11 montre que $|f|$ est sommable. Considérons $f_n(x) := \mathbb{1}_{[0,n]}(x)f(x)$. On a évidemment

$$|f_n| \leq |f|.$$

Le théorème de Lebesgue assure que $(|f_n|)$ converge vers une fonction sommable et que l'intégrale de cette fonction est la limite des intégrales. Mais la suite $(|f_n|)$ converge vers $|f|$ simplement (donc partout) et la limite des intégrales diverge. □

Le même argument (tronquer) permet de montrer que $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ n'est pas sommable.

Remarque 6. Ce résultat complète le corollaire 3.1.2. Pour un intervalle infini et une fonction continue (par morceaux) la sommabilité est équivalente à l'absolue convergence au sens de Riemann. ■

Théorème 3.1.7. *Soit $f : I \times (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On suppose que*

1. *pour tout $t \in I$ la fonction d'une variable $x \mapsto f(t,x)$ est sommable sur (a,b) ;*
2. *pour presque tout x, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue ;*
3. *il existe une fonction $x \mapsto g(x)$sommable telle que pour tout t, $|f(t,x)| \leq g(x)$.*

Alors la fonction $t \mapsto F(t) := \int_a^b f(t,x)\,dx$ est continue.

Démonstration. La continuité de F en t_0 est équivalente à :

Pour toute suite (ε_n) qui tend vers 0, $\lim_{n\to+\infty} F(t_0+\varepsilon_n) = F(t_0)$.

Fixons t_0 et une suite (ε_n) tendant vers 0. On pose

$$f_n(x) := f(t_0+\varepsilon_n, x) \text{ et } f(x) := f(t_0, x).$$

Il faut alors démontrer $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Les deux dernières hypothèses permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

Le même genre d'astuce permet de démontrer le théorème de dérivation sous le signe somme :

Théorème 3.1.8. *Soit $f : I \times (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On suppose que*

1. *pour tout $t \in I$ la fonction d'une variable $x \mapsto f(t, x)$ est sommable sur (a, b) ;*
2. *pour presque tout x, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;*
3. *il existe une fonction $x \mapsto g(x)$sommable telle que pour tout t, $\left|\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$.*

Alors la fonction $t \mapsto F(t) := \displaystyle\int_a^b f(t, x)\, dx$ est dérivable et $F'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\, dx$.

Une autre application : une presque primitive. On considère une fonction sommable f sur (a, b). Pour $c \in (a, b)$ on pose

$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_c^x f(t)\, dt \text{ si } x \geq c, \\ \displaystyle\int_x^c f(t)\, dt \text{ si } x \leq c. \end{cases}$$

Alors la fonction F est continue. Pour le voir, on utilise la formule de Chasles, ce qui permet de supposer $c = a$. La fonction F devient alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b \mathbb{1}_{(a,x)}(t) f(t)\, dt.$$

La fonction de deux variables $g(x, t) = \mathbb{1}_{(a,x)}(t) f(t)$ satisfait les hypothèses du théorème de continuité sous les signe $\displaystyle\int$ (Th 3.1.7).

3.2 D'autres théorèmes de sommabilité-Intégrale d'une dérivée

3.2.1 Le Lemme de Fatou

Nous terminons ce chapitre avec l'énoncé de plusieurs résultats qui permettent de garantir la sommabilité d'une fonction limite sans avoir pour autant l'interversion des limites.

Théorème 3.2.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables qui converge presque partout vers f. S'il existe une fonction sommable g telle que pour presque tout x,*

$$|f(x)| \leq g(x),$$

alors f est sommable.

Remarque 7. On ne dit pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$. ■

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions définies par
$$g_n(x) := \min\{g(x), \max\{f_n(x), -g(x)\}\}.$$
Cette suite converge vers f.

En effet, notons que g est positive. Si n est grand, pour x tel que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors on a presque $f_n(x) \sim f(x)$. L'inégalité $|f| \leq g$, signifie $-g \leq f \leq g$, donc $\max\{f(x), -g(x)\} = f(x)$ et $\min\{g(x), \max\{f(x), -g(x)\}\} = f(x)$. Il suffit ensuite de vérifier que pour tout n, $|g_n| \leq g$. □

Théorème 3.2.2 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions positives et sommables qui converge presque partout vers f. S'il existe A tel que pour tout n,*
$$\int_a^b f_n(x)\, dx \leq A,$$
alors f est sommable et $\int_a^b f(x)\, dx \leq A$.

Démonstration. Poser $\varphi_n := \inf_{k \geq n} f_k$. Alors $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ et φ_n converge presque partout vers f. On a aussi pour tout n,
$$\int_a^b \varphi_n(x)\, dx \leq \int_a^b f_n(x)\, dx \leq A.$$
On utilise le théorème 3.1.1. □

Remarque 8. Là non plus on ne dit pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$. Par ailleurs, l'hypothèse $f_n \geq 0$ sert à définir φ_n. ■

Exercice 11
Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions f_n positives.

3.2.2 Intégrale d'une dérivée

Application 1. Une majoration de l'intégrale de la dérivée. On se donne une fonction croissante continue sur $[0, 1]$. On admet que ceci implique que f est presque partout dérivable. Nous allons démontrer que la dérivée est sommable et qu'elle vérifie l'inégalité suivante :
$$\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0). \tag{3.1}$$
Pour cela on considère la suite d'applications définies par
$$f_n(x) := \begin{cases} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) \text{ si } x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$
Les applications f_n sont toutes positives car f est croissante et la suite converge presque partout vers $f'(x)$.

Calculons $\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Pour cela on introduit la primitive F de f définie par $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ (ici on parle d'intégrale de Riemann car f est continue).

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x+\frac{1}{n})dx - n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx \\
&= n\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx - n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx \\
&= nF(1) - nF(\frac{1}{n}) - nF(1-\frac{1}{n}) + nF(0) \\
&= n(F(1) - F(1-\frac{1}{n})) - n(F(\frac{1}{n}) - F(0)) \\
&\to_{n\to+\infty} F'(1) - F'(0) = f(1) - f(0).
\end{aligned}$$

Pour utiliser la version du Lemme de Fatou que nous avons, il faut être un peu plus précis. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq f(1) - f(0) + \varepsilon.$$

On applique alors le lemme de Fatou, qui montre d'une part que f' est sommable et d'autre part qu'elle vérifie l'inégalité

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0) + \varepsilon.$$

Celle-ci est vraie pour tout ε, on fait donc $\varepsilon \to 0$. CQFD

Application 2. Une égalité pour l'intégrale de la dérivée. Soit f une application continue dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors f' est sommable et

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0). \tag{3.2}$$

Notez que l'on ne dit rien sur la continuité de f', donc sur le fait qu'elle soit Riemann-intégrable ou non. La preuve utilise le théorème de convergence dominée. On reprend la même suite de fonctions (f_n) que précédemment [2]. Le théorème des accroissements finis montre qu'il existe M tel que pour tout n,

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Le théorème de convergence monotone s'applique et on a donc

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

2. pour obtenir l'inégalité 3.1.

Remarque 9. L'hypothèse ici est que la fonction est dérivable partout, ce qui permet d'utiliser le théorème des accroissements finis. On n'a donc pas besoin de la croissance de f pour obtenir la positivité de f_n, c'est la domination qui est utilisée.

Toutefois, le résultat est faux si on suppose juste que f est dérivable presque partout et sa dérivée bornée (presque partout). L'escalier du diable est un contre-exemple classique. ■

Chapitre 4

Espaces L^p

4.1 Inégalités de convexité

Étant données deux fonctions f_1 et f_2 sommables sur (a, b), la linéarité permet d'en déduire la sommabilité de toute combinaison linéaire de ces deux fonctions. On veut maintenant s'intéresser à leur produit, et plus généralement à des produits de puissances.

Les théorèmes vus au chapitre précédent ne permettent pas de conclure. On rappelle la formule pour $x > 0$,

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Proposition 4.1.1. *Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\beta := 1 - \alpha$. Soient f et g deux fonctions sommables sur (a, b). Alors $|f|^\alpha |g|^\beta$ est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)|^\alpha |g(x)|^\beta \, dx \le \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^\alpha \left(\int_a^b |g(x)| \, dx \right)^\beta .$$

Démonstration. C'est une application "classique" de la convexité, laissée en exercice et/ou admise. □

À partir de cette inégalité, nous pouvons définir des nouveaux espaces.

Définition 4.1.2. *Soit p un réel strictement positif. On note L^p l'ensemble des applications f définies (presque partout) sur (a, b) telle que $|f|^p$ soit sommable.*

Pour $p > 1$, on appelle conjugué le réel $q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Remarque 10. On notera que L^1 est exactement l'ensemble des fonctions sommables. ■

Exercice 12
Montrer que le conjugué de q est p.

Il y a une relation naturelle entre L^p et L^q. Elle découle de l'inégalité de Hölder.

Proposition 4.1.3. *Soient $p > 1$ et q son conjugué Soient f et g respectivement dans L^p et L^q. Alors fg est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{4.1}$$

Démonstration. On utilise la proposition 4.1.1 avec $\alpha = \frac{1}{p}$ et de bonnes fonctions intermédiaires : on pose $\varphi = |f|^p$ et $\psi = |g|^q$, $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q}$. φ et ψ sont sommables et $\varphi^\alpha \psi^\beta = |fg|$. □

L'inégalité (4.1) s'appelle *l'inégalité de Hölder*. Dans le cas particulier où $p = 2$, alors $q = p = 2$ et elle s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

À partir de l'inégalité de Hölder, on en obtient une autre très importante :

Proposition 4.1.4 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient f et g deux fonctions dans L^p ($p \geq 1$). Alors $f + g$ est dans L^p et*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.2}$$

4.2 Espace L^p et le cas particulier $p = 2$

4.2.1 Espaces L^p, $p \geq 1$

On considère $p \geq 1$.

Proposition 4.2.1. *L'ensemble L^p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Laissée en exercice et/ou admise. La principale difficulté est de démontrer la stabilité par combinaison linéaire. Ceci résulte de l'inégalité de Minkowski. □

Pour f dans L^p on pose

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 4.2.2. *L'application $||\quad||_p$ est une norme sur L^p. C'est à dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $||f||_p = 0$ *si et seulement si* $f \equiv 0$.
2. $||\lambda.f||_p = |\lambda|.||f||_p$ *pour tout* $f \in L^p$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration. La dernière propriété est une application directe de l'inégalité de Minkowski. La première découle du corollaire 3.1.4. La deuxième de la linéarité de l'intégrale. □

Voici pèle-mêle et sans démonstrations les principales propriétés de l'espace L^p.

1. L^p muni de la norme $||\quad||_p$ est complet : toute suite de Cauchy converge.
2. Les compacts de L^p (pour la norme $||\quad||_p$) ne sont pas tous les fermés bornés. En particulier la boule unité n'est pas compacte.
3. L^p (toujours muni de la norme $||\quad||_p$) est *séparable*, c'est à dire qu'il existe une suite dense [1].
4. Toutes les normes ne sont pas équivalentes dans L^p.

1. On rappelle que dense signifie que toute boule de rayon > 0 contient au moins un élément de la suite considérée.

4.2.2 Le cas particulier $p = 2$

Le cas $p = 2$ est particulier parce que, dans ce cas, la norme $|| \quad ||_2$ découle *d'un produit scalaire* :

Si f et g sont dans L^2 on note

$$< f|g >:= \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

L'application $< \quad | \quad >$ est un produit scalaire sur L^2, c'est à dire qu'elle est

1. bilinéaire : $< \lambda.f + g|h >= \lambda. < f|h > + < g|h >$ et $< f|\lambda.g + h >= \lambda. < f|g > + < f|h >$;
2. symétrique : $< f|g >=< g|f >$;
3. positive : $< f|f >\geq 0$;
4. définie : $< f|f >= 0$ si et seulement si $f \equiv 0$.

Dans ce cas, la norme $|| \quad ||_2$ vérifie :

$$||f||_2 = \sqrt{< f|f >}.$$

Définition 4.2.3. *On dit que deux fonctions f et g de L^2 sont orthogonales si $< f|g >= 0$. Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de L^2, on dit que f est orthogonale à $\mathcal{V}$ si f est orthogonale à tout élément $g \in \mathcal{V}$.*

Une famille (f_n) dans L^2 est dire orthonormée si pour tout n et m,

$$< f_n|f_m >= \delta_{n,m}.$$

Le produit scalaire permet d'avoir

Théorème 4.2.4 (Pythagore)**.** *Si f et g sont orthogonales alors $||f+g||_2^2 = ||f||_2^2+||g||_2^2$.*

Par ailleurs, on rappelle que dans un espace-vectoriel, une famille est une *base* (vectorielle) si tout élément de l'espace est une unique combinaison linéaire finie d'éléments de la base. Étant donnée une famille (libre), l'espace vectoriel engendré par cette famille est alors l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de la famille.

Ainsi, la principale propriété de L^2 c'est qu'il existe des familles libres orthonormées telles que les espaces qu'elles engendrent sont denses. On parle alors de *base hilbertienne*[2] :

Théorème 4.2.5 (et définition)**.** *Dans L^2 une base hilbertienne est une famille (φ_n) orthonormale telle que l'espace vectoriel engendré par les φ_n est dense pour la norme $|| \quad ||_2$.*

Dans ce cas, pour tout f dans L^2 on aura l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} < f|\varphi_n > \varphi_n. \tag{4.3}$$

De plus la suite définie par $c_n :=< f|\varphi_n >$ vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$.

2. Attention, une base hilbertienne n'est pas une base vectorielle.

Réciproquement, étant donnée une suite de scalaires (c_n) *vérifiant* $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, $\sum_n c_n \varphi_n$ *est bien défini et est une fonction de* L^2.

Remarque 11. Depuis le début nous considérons *a priori* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. on aurait pu considérer un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et le produit hermitien $< f|g >= \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx$. Dans ce cas il faut prendre les modules des c_n qui sont des nombres complexes. ■

L'égalité (4.3) doit se comprendre dans L^2. l'élément de droite est une série infinie, c'est à dire une limite. L'égalité signifie donc

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - \sum_{k=0}^{n} < f|\varphi_k > \varphi_k||_2 = 0,$$

soit encore $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f(x) - \sum_{k=0}^{n} < f|\varphi_k > \varphi_k(x)|^2\,dx = 0.$

le reste du théorème signifie donc, qu'étant donnée une base hilbertienne, un élément de L^2 s'obtient “juste” sous forme d'une série des vecteurs de la base.

On obtient aussi une autre égalité :

$$\boxed{||f||_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} < f|\varphi_n >^2 .} \tag{4.4}$$

4.2.3 Exemple : séries de Fourier

Si $(a, b) = (0, 2\pi)$, on peut prendre comme famille soit les fonctions du type $x \mapsto \cos nx$ et les fonctions du type $x \mapsto \sin nx$ (le cas réel [3] en calculant l'intégrale de leur carré), soit les fonctions du type $x \mapsto e^{inx}$ (le cas complexe).

On sait, par exemple que des fonctions continues par morceaux sont sommables. Le carré d'une fonction continue par morceaux est encore continue par morceaux donc est dans L^2.

Ainsi, on retrouve une version différente du théorème de Dirichlet sur l'égalité d'une fonction *un peu régulière* avec sa série de Fourier (égalité (4.3)). L'égalité (4.4) n'est rien d'autre que l'égalité de Parseval.

En fait, et le but de cette partie était de préciser ce point, le bon cadre pour faire les séries de Fourier c'est le cadre L^2 (et certainement pas les fonctions continues part morceaux).

Application : exemples de fonctions dans L^2 mais pas continue (ou réglées). Il suffit de choisir n'importe quelle suite (c_n) telle que $\sum_n |c_n|^2$ converge mais pas $\sum_n |c_n|$. Par exemple

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n},$$

n'est pas continue mais dans $L^2(0, 2\pi)$.

3. il faut renormaliser ces fonctions

4.3 Petits compléments sur les espaces L^p

4.3.1 L^∞

Nous avons vu l'inégalité de Hölder, qui n'est valide que si p et q sont plus grand que 1. Il existe toutefois une version pour $p = 1$. Pour cela nous devons introduire un autre espace normé.

Définition 4.3.1. *On appelle L^∞ l'ensemble des applications qui sont (presque partout) bornée, c'est à dire les applications f telles qu'il existe un ensemble E négligeable et un réel C tel que pour tout $x \in (a,b) \setminus E$, $|f(x)| \le C$.*

On note alors $||f||_\infty := \sup\{||f(x),\ x \in (a,b) \setminus E\}$.

Lemme 4.3.2. *L'application $||\quad||_\infty : L^\infty \to \mathbb{R}^+$ est une norme.*

La proposition 4.1.3 s'étend au cas $p = 1$ et $q = \infty$:

Proposition 4.3.3. *Soient f dans L^1 et g dans L^∞. Alors fg est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le ||g||_\infty \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

4.3.2 Inclusions

On peut se demander quelles sont les relations entre les espaces L^p. Lorsque (a,b) est infinie il n'y en a aucune. En effet, prenons $(a,b) =]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est dans L^2 mais pas dans L^1. Inversement, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dans L^1 mais pas dans L^2.

Lorsque (a,b) est de longueur finie, alors les choses changent :

Proposition 4.3.4. *Si (a,b) est de longueur finie alors $L^p \subset L^m$ si $p \ge m$.*

Démonstration. Utiliser l'inégalité de Hölder avec f et $\mathbb{1}_{(a,b)}$. □

4.4 Quelques preuves des affirmations énoncées

4.4.1 Complétude des L^p

On considère une suite de Cauchy (f_n) dans L^p.

Lemme 4.4.1. *Il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que pour tout k, $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \le \dfrac{1}{2^k}$.*

Démonstration. La suite (n_k) se construit par récurrence. Comme la suite (f_n) est de Cauchy, il existe n_0 tel que pour tout m et n supérieurs à n_0,

$$|f_m - f_n| \le 1.$$

Ceci donne n_0. ensuite, il existe un entier n_1 tel que pour tout m et n supérieurs à n_1

$$|f_m - f_n| \le 1/2.$$

On choisit un tel $n_1 > n_0$. On a bien $|f_{n_1} - f_{n_0}| \le 1$. On continue cette construction en choisissant une suite strictement croissante de n_k. □

Proposition 4.4.2. *La suite ainsi construite (f_{n_k}) converge dans L^p.*

Pour la démontrer, on a besoin d'un lemme technique :

Lemme 4.4.3. *On pose $g_k(x) := \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$. Alors (g_k) est croissante et converge presque partout vers une fonction g de L^p.*

Démonstration. L'inégalité de Minkowski donne

$$||g_k||_p \leq \sum_{j=1}^{k} ||f_{n_{j+1}} - f_{n_j}||_p \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \leq 2.$$

Ceci montre que pour tout k, $\int |g(x)|^p\, dx$ est inférieur à 2^p donc borné. Par ailleurs la suite des fonctions $|g_k|^p$ est croissante, et le théorème de convergence monotone assure que la suite converge vers une fonction (presque partout). On la note g^p (elle est positive on peut donc prendre sa racine p-ième). Cela montre aussi que g est dans L^p car $|g|^p$ est sommable. □

preuve de la proposition 4.4.2. On écrit

$$|f_{n_i} - f_{n_k}| = |f_{n_i} - f_{n_{i-1}} + f_{n_{i-1}} - \ldots + f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|,$$

ce qui montre que pour x fixé $|f_{n_i}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g_i(x) - g_k(x) \leq g(x) - g_k(x)$. Ainsi pour presque tout x, la suite $(f_{n_j}(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers une valeur que l'on note $f(x)$.

La même inégalité permet aussi d'obtenir (en faisant $n_j \to +\infty$) $|f(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$, et on peut utiliser le théorème de Lebesgue (convergence dominée) pour la suite $(|f - f_{n_k}|^p)$. Ceci montre que la convergence de (f_{n_k}) a lieu dans L^p. □

La suite (f_n) est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence. Elle converge donc.

Théorème 4.4.4. *Si (f_n) est une suite qui converge dans L^p vers f, alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.*

Démonstration. La suite (f_n) converge donc est de Cauchy. On fait comme précédemment, ce qui donne une suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers une fonction f^*. Cette convergence a aussi lieu dans L^p. Ainsi $||f - f^*||_p = 0$, ce qui implique que $f = f^*$ presque partout. □

4.4.2 Non équivalence des normes

Considérons la suite de fonction sur $[0, 1]$, f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{2}{n} \\ \text{continue affine entre les 2.} \end{cases}$$

Cette suite converge presque partout vers la fonction nulle. On a

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{3a_n}{2n}.$$

cela montre, en fonction du choix de a_n que (f_n) peut converger ou non vers la fonction nulle dans L^1.

Chapitre 5

Ensembles mesurables-mesures sur des espaces abstraits

5.1 Fonctions Lebesgue mesurables

Précédemment nous avons définit une fonction sommable comme étant (un élément l'ensemble des $\mathcal{E}_2$) une différence de fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}_1$. Les fonctions de $\mathcal{E}_1$ sont quant à elles les limites croissantes de fonctions *e.s.c.*d'intégrales uniformément bornées.

Plus généralement, le théorème de B. Levi (Th. 3.1.1) montre que cette classe est “fermée” : les fonctions obtenues comme limites croissantes de fonctions sommables à intégrales bornées sont encore des fonctions sommables.

Il existe cependant des limites de suites de fonctions *e.s.c.*qui n'ont pas d'intégrale uniformément majorée. Ces fonctions ne sont donc pas sommables mais ont cependant de bonnes propriétés.

Définition 5.1.1. *On dire qu'une fonction est mesurable (au sens de Lebesgue) si elle est limite presque partout d'une suite de fonction e.s.c..*

Remarque 12. Les fonctions sommables sont donc mesurables ! La terminologie “mesurable” sera modifiée et précisée plus tard. ■

Exercice 13
Montrer que toute fonction continue — et plus généralement toute fonction réglée — est mesurable.

Exercice 14
Exhiber une fonction mesurable qui ne soit pas sommable.

Théorème 5.1.2. *Toute fonction mesurable bornée par une fonction sommable est elle-même sommable.*

Démonstration. C'est une simple conséquence du théorème 3.2.1. On considère pour f_n la suite de fonction *e.s.c.*et pour f la fonction mesurable étudiée. Pour g on prend la fonction sommable qui majore $|f|$. □

Exercice 15
Soient f et h deux fonctions sommables telles que $f(x) \leq h(x)$ (p.p.). Soit g une fonction mesurable. On construit une nouvelle fonction $\widetilde{g}$ en posant

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} f(x) \text{ si } g(x) \leq f(x), \\ g(x) \text{ si } f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ h(x) \text{ si } g(x) \geq h(x). \end{cases}$$

Montrer que $\widetilde{g}$ est sommable.

Plus généralement on a :

Proposition 5.1.3. *L'ensemble des fonctions mesurables est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le produit, l'enveloppe inférieure et l'enveloppe supérieur de deux fonctions mesurables est encore mesurable.*

La valeur absolue d'une fonction mesurable est mesurable. L'inverse d'une fonction mesurable non nulle presque partout est aussi mesurable.

La preuve de cette proposition est laissée en exercice. D'une façon plus générale, toute opération raisonnable avec des fonctions mesurables est encore mesurable. Voici maintenant un théorème qui montre la stabilité très forte de l'espace des fonctions mesurables :

Théorème 5.1.4. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f. Alors f est mesurable.*

Démonstration. On prend une fonction h sommable qui est strictement positive[1]. On pose ensuite

$$g_n(x) := \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} \text{ et } g(x) := \frac{h(x)f(x)}{h(x) + |f(x)|}.$$

Notez que l'on a $|g_n(x)| < h(x)$ et $|g(x)| < h(x)|$ et donc chaque g_n est sommable (par le théorème 5.1.2). Le théorème de convergence dominée (Th 3.1.5) montre que g est aussi sommable. Enfin, on a

$$f(x) = \frac{h(x)g(x)}{h(x) - |g(x)|},$$

qui est donc mesurable (se souvenir que $h > 0$). □

5.2 Ensembles Lebesgue mesurables et mesure de Lebesgue

5.2.1 Ensembles mesurables-propriété de la mesure de Lesbesgue

Définition 5.2.1. *Un ensemble $E \subset (a, b)$ est dit mesurable (au sens de Lebesgue) si sa fonction indicatrice $\mathbb{I}_E$ est mesurable (au sens de Lebesgue).*

Sa mesure est alors la quantité $\int_a^b \mathbb{I}_E(x)\, dx$ si elle est finie, et $+\infty$ sinon. On la notera $\lambda(E)$.

Lemme 5.2.2. *Un ensemble négligeable est mesurable et est de mesure nulle.*

1. la construction d'une telle fonction est laissée en exercice.

Démonstration. Si E est négligeable la fonction $\mathbb{1}_E$ est nulle presque partout. Elle est donc, presque partout égale à la limite (croissante) de la fonction nulle. Elle est donc mesurable. Comme son intégrale est nulle la mesure est nulle.

□

Il existe des ensembles qui ne sont pas mesurables. Nous en verrons des exemples plus loin.

Exercice 16
Montrer que la mesure d'un intervalle ouvert $]c, d[$ est $d - c$.

Nous allons maintenant étudier les propriétés de la mesure de Lebesgue.

Comme $\mathbb{1}_{E\cup F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F - \mathbb{1}_E \mathbb{1}_F$, et $\mathbb{1}_{E\cap F} = \mathbb{1}_E \mathbb{1}_F$, l'union et l'intersection de deux ensembles mesurables est encore un ensemble mesurable. Par récurrence c'est aussi vraie pour une union finie ou une intersection finie.

Lemme 5.2.3. *Soit E_n une collection dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors $\cup_n E_n$ est mesurable et*

$$\lambda(\cup_n E_n) = \sum_n \lambda(E_n).$$

Démonstration. Comme tous les ensembles sont disjoints, on a $\mathbb{1}_{\cup E_n} = \sum_n \mathbb{1}_{E_n}$. Cette dernière série est une série de fonctions positives, donc croissante. Comme une somme finie de fonctions mesurables est mesurable, chaque somme partielle est mesurable et donc $\mathbb{1}_{\cup E}$ est mesurable.

Le Corollaire 3.1.3 montre que si tous les ensembles sont mesurables et si la somme des mesures et uniformément bornée alors $\mathbb{1}_{\cup E_n}$ est sommable et

$$\lambda(\cup E_n) = \sum_n \lambda(E_n).$$

Réciproquement, le théorème de convergence dominée (Th. 3.1.5) montre que si $E := \cup E_n$ est de mesure finie (c'est à dire $\mathbb{1}_E$ est sommable), alors tous les E_n sont aussi de mesure finie et

$$\lambda(\cup E_n) = \sum_n \lambda(E_n).$$

On vient donc de montrer l'égalité recherchée

$$\lambda(\cup E_n) = \sum_n \lambda(E_n),$$

si $\lambda(E) < +\infty$ ou si $\sum_n \lambda(E_n) < +\infty$. Reste le cas ou les deux valeurs sont infinies (c'est à dire égale à $+\infty$ car elles sont positives). Il y a aussi égalité ! □

Si on considère une suite croissante d'ensembles, c'est à dire que pour tout n, $E_n \subset E_{n+1}$, alors la suite définie par $F_n := E_{n+1} \setminus E_n$ est une suite disjointe d'ensembles. Si on suppose que chaque E_n est mesurable, de mesure finie, alors le lemme 5.2.3 donne immédiatement

$$\lambda(\cup E_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n),$$

et c'est une limite croissante. Comme le complémentaire d'une union est l'intersection des complémentaires, le lemme 5.2.3 montre aussi que si (E_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables de mesures finie, alors

$$\lambda(\cap E_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(E_n).$$

Remarque 13. Si on ne considère plus une union disjointe, on a seulement une majoration $\lambda(\cup E_n) = \sum_n \lambda(E_n)$. On verra plus loin le Lemme de Borel Cantelli qui exploite cette majoration. Toutefois l'ensemble $\cup_n E_n$ est toujours mesurable car on peut toujours changer une union d'ensembles non disjoints en une union d'ensembles disjoints.
■

5.2.2 Fonctions étagées

Définition 5.2.4. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite étagée s'il existe un nombre fini d'ensembles mesurables A_i, tous deux à deux disjoints tels que*

$$f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

On constate qu'une fonction *e.s.c.*est étagée. Il existe des fonctions étagées qui ne sont pas des fonctions *e.s.c.*.

Proposition 5.2.5. *Soit f une fonction. Alors*

$$\sup\left\{\int \varphi d\lambda,\ \varphi \text{ étagée et } \varphi \le f\right\} = \sup\left\{\int \varphi d\lambda,\ \varphi \text{ e.s.c.et } \varphi \le f\right\}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout φ étagée, on peut trouver une fonction ψ *e.s.c.*telle que $\psi \le \varphi$ et $\int \psi\, d\lambda$ aussi proche que voulu de $\int \varphi\, d\lambda$. On admet que c'est possible.

□

5.3 Théorie générale de l'intégration

5.3.1 Notion de Tribu

Définition 5.3.1. *Soit X un ensemble. On appelle tribu*[2] *une collection $\mathcal{T}$ d'ensembles qui vérifie*

- $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- *Si A est dans $\mathcal{T}$ alors $X \setminus A$ est aussi dans $\mathcal{T}$.*
- *Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\cup A_n$ est aussi dans $\mathcal{T}$.*

2. parfois on parle de σ-algèbre

Le doublet $(X, \mathcal{T})$ *s'appelle un espace mesurable*[3].

Exemples

1. La tribu grossière est composée de deux éléments, $\emptyset$ et X.
2. Au contraire la tribu triviale est $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. c'est bien souvent une tribu trop grosse.
3. Étant donné un ensemble A, l'ensemble $\{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ est une tribu.
4. D'une façon général, étant donné une partition $X = \sqcup X_i$, l'ensemble des éléments de la forme $\cup_{j\in J\subset I} X_j$ est une tribu.

Exercice 17
Montrer que l'intersection de deux tribus est encore une tribu. D'une façon générale montrer qu'une intersection de tribus est encore une tribu.

À partir de cet exercice on peut définir la plus petite tribu contenant une famille d'ensembles : c'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent tous ces ensemble. Une telle tribu existe car $\mathcal{P}(X)$ est une tribu et contient, par définition, tous les sous-ensembles de X.

Définition 5.3.2. *Si $X = \mathbb{R}$, la tribu des boréliens est la plus petite tribu qui contient tous les ouverts.*

Proposition 5.3.3. *Si $X = \mathbb{R}$, les ensembles* Lebesgues mesurables *vus à la définition 5.2.1 sont exactement les ensembles de la tribu de Borel.*

Définition 5.3.4. *Un espace muni d'une tribu est appelé un espace mesurable. Si $(X, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, on appelle mesure toute application μ définie sur la tribu $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu(\sqcup A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Si $\mu(X) = 1$ on dit que μ est une mesure de probabilité.

Exemples

Nous avons vu la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.

Cantor Triadic On construit une fonction, appelée escalier du diable à l'aide d'une suite de fonctions continues.

La fonction f_0 est la fonction identité. La fonction f_1 est obtenue en prenant la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sur $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ elle est affine et vérifie $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1$.

La fonction f_{n+1} se construit à partir de la fonction f_n de la manière suivante (voir 5.1). La fonction f_n est constante sur des intervalles de la forme $[\frac{j}{3^p}, \frac{j+1}{3^p}]$ (avec $p \leq n$) et affine par morceaux. Sur un morceaux "oblique" de taille horizontale $\frac{1}{3^n}$ et verticale $\frac{1}{2^n}$,

3. ce qui signifie qu'il est susceptible de recevoir une mesure

on coupe l'intervalle en 3 tiers, la fonction est constante sur le tiers du milieu de valeur la moitié des 2 valeurs extrémales de f_n puis on la rend continue affine par morceaux (sans changer les valeurs extrémales sur l'intervalle). On vérifie que f_{n+1} est bien constante globalement affine par morceaux, sur des morceaux de la forme $[\frac{j}{3^p}, \frac{j+1}{3^p}]$ (avec $p \leq n+1$) et strictement croissantes sur des intervalles de taille $\frac{1}{3^{n+1}}$ avec des variations de taille $\frac{1}{2^{n+1}}$.

La différence entre f_n et f_{n+1} est inférieure à $\frac{1}{2^n}$ donc la suite est de Cauchy et converge uniformément vers une fonction continue.

Il s'agit d'une fonction continue, valant 0 en 0 et 1 en 1 mais presque partout de dérivée nulle. Cette fonction F permet de définir une intégrale (de Stieltjes), qui définit une mesure portée par le Cantor triadic : L'intégrale d'une fonction $e.s.c.$vaut

$$\sum_n \alpha_n(F(a_{n+1}) - F(a_n)),$$

où les intervalles sont les $[a_n, a_{n+1}[$ et sur cet intervalle la fonction vaut α_n. Cette nouvelle définition donne un nouvel ensemble de fonctions sommables et un nouvel ensemble $\mathcal{E}_2$.

Avec cette intégrale, on définit une mesure qui vérifiera :

$$\mu([a_n, a_{n+1}[) = F(a_{n+1}) - F(a_n).$$

Cette mesure ne charge aucun des intervalles "plateaux" de F.

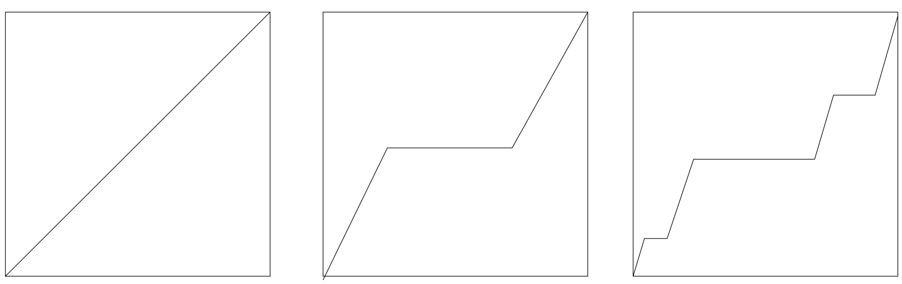

FIGURE 5.1 – Escalier du Diable

Une famille de mesures de support total sur $[0,1]$ La construction se fait aussi par récurrence. On part à nouveau de $f_0 \equiv Id$. Chaque f_n est affine par morceaux. Sur un intervalle de taille $\frac{1}{2^n}$ où f_n est de pente constante, on coupe l'intervalle en 2 moitiés, on multiplie la pente sur la première moitié par $p \in]0,1[$ et par $q := 1-p$ sur l'autre moitié. Cela donne une nouvelle fonctions du même type (mais à l'échelle $n+1$). Elle converge uniformément vers une fonction continue croissante. On construit l'intégrale de Stieltjes à partir de la fonction limite.

Remarque 14. On notera que la mesure de Lebesgue a été construite pour $F(x) = x$. ■

Autres mesures Sur $X = \{0,1\}$ on peut mettre la Loi de Bernoulli de paramètre p en prenant comme tribu $\mathcal{P}(X)$.

D'une façon plus générale, une variable aléatoire réelle définie une mesure sur $\mathbb{R}$. La fonctions répartition F permet de définir une intégrale et une mesure, appelée mesure image.

5.3.2 Fonctions mesurables (généralisation)

Définition

On se donne deux espaces mesurables $(X, \mathcal{B})$ et $(Y, \mathcal{B}')$.

Définition 5.3.5. *Une application $f : X \to Y$ est dite mesurable (au sens généralisé) si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{B}$.*

Remarque 15. Lorsque X ou Y est $\mathbb{R}$, on se limitera souvent au cas des tribu boréliennes. ■

Proposition 5.3.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable (voir définition 5.1.1). Alors pour tout α et β réels, $f^{-1}((\alpha, \beta))$, $f^{-1}((\alpha, +\infty[$ et $f^{-1}(] - \infty, \beta))$ sont des éléments de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Étudions par exemple le cas $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$. Par définition f est mesurable donc il existe une suite croissante de fonction étagées qui converge vers f. Notons la (φ_n) ; on construit la suite (ψ_n) de la manière suivante.

$$\psi_n = (x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varphi_n(x) \geq A\alpha + \frac{1}{n}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme (φ_n) est croissante, (ψ_n) l'est aussi. Pour presque tout x tel que $f(x) > \alpha$, il existe N à partir duquel $f(x) \geq \varphi_n(x) > \alpha + \frac{1}{n}$. □

On admettra que cette propriété caractérise les fonctions mesurables :

Proposition 5.3.7. *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable si et seulement si pour tout α et β, $f^{-1}((\alpha, \beta))$ est dans $\mathcal{B}$.*

Comme corollaire, on obtient que les fonctions mesurables au sens généralisé (pour la tribu de Borel) sont les fonctions mesurables déjà introduites.

Théorèmes généraux pour des tribus quelconques

Définition 5.3.8. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable est sommable (dans $L^1(\mu)$) si et seulement si*

$$\int f \, d\mu =: \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu, \ \varphi \leq f \text{ et } \varphi \text{ étagée} \right\}$$

est fini.

La proposition 5.2.5 montre que pour $X = \mathbb{R}$ et $\mu =$ la mesure de Lebesgue, les fonctions sommables ainsi définies sont aussi les fonctions sommables déjà définies, les définitions des intégrales coïncidant.

On admettra :

La plupart des résultats précédents sont vrais dans le cadre plus général d'un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$. L'ensemble des applications f telles que $\int |f^p| \, d\mu < +\infty$ sera noté $L^p(\mu)$.

Les théorèmes de convergence monotone (Th. 3.1.1) et de convergence dominée (Th. 3.1.5) sont vrais, ainsi qu elle Lemme de Fatou (Lemme 3.2.2). Les propriétés des espaces L^p aussi, surtout la structure hilbertienne de $L^2(\mu)$ (avec un produit scalaire).

Les théorèmes de continuité et dérivations sous le signe somme sont vrais si la mesure ne “charge pas les points”, c'est à dire que pour tout $a \in X$, $\mu(\{a\}) = 0$.

Notation : dans cette théorie on ne fait pas de différence entre l'intervalle $[a, b]$ ou l'intervalle $[b, a]$. La mesure assigne un poids à l'intervalle, il n'y a pas de direction ($a < b$) privilégiée. On notera donc l'intégrale

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) \text{ ou plus simplement } \int_X f\, d\mu \text{ voire } \int f\, d\mu.$$

5.3.3 Deux applications

Le lemme de Borel-Cantelli

Proposition 5.3.9 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Alors presque tout point n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

Démonstration. C'est une application de la généralisation d'un des corollaire du théorème de Beppo Lévi au cas d'une mesure quelconque. Le corollaire 3.1.3 dans ce cadre s'applique encore. La série de terme général

$$\mu(A_n) = \int \mathbb{1}_{A_n}(x)\, d\mu(x)$$

converge donc la série $\sum_n \mathbb{1}_{A_n}$ converge presque partout. Or pour x dans X, $\mathbb{1}_{A_n}(x)$ vaut 0 si $x \notin A_n$ et 1 si $x \in A_n$. Si la série $\sum_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$, cela signifie que son terme général tend vers 0 donc vaut 0 à partir d'un certain rang. □

Application : apparition du Pile On joue à Pile ou Face une infinité de fois. On note 0 si Face apparaît et 1 si c'est Pile qui apparaît. L'espace mesuré est donc identifiable à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure $\mu = \dfrac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)^{\otimes \mathbb{N}}$. On note A_n l'événement “Pile n'est pas apparu lors des n-premiers lancers”. Il est de mesure $\frac{1}{2^n}$.

On a donc

$$\sum_n \mu(A_n) = 1 < +\infty,$$

ce qui signifie que pour presque tout tirage Pile apparaît au moins une fois [4].

4. On peut en aussi démontrer qu'il apparaît une infinité de fois.

Suites décroissantes d'applications mesurables

Proposition 5.3.10. *Soit* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* (f_n) *une suite d'applications mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *et qui décroît vers* f *sur* X*. S'il existe* n_0 *telle que* f_{n_0} *soit sommable (ou encore soit dans* $L^1(\mu)$*), alors* f *est sommable et* $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Démonstration. Pour $n \geq n_0$ toutes les fonctions f_n sont sommables. On peut appliquer le théorème de Beppo Lévi à la suite définie par $-f_n$. □

Exercice 18
Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus qu'il existe n_0 tel que $f_{n_0} \in L^1(\mu)$.

Chapitre 6

Compléments : théorèmes de Fubini, changement de variables

6.1 Théorèmes de Fubini

6.1.1 Tribu produit

On considère deux espaces mesurables $(X, \mathcal{B})$ et $(Y, \mathcal{V})$.

Définition 6.1.1. *On note $\mathcal{B} \otimes \mathcal{V}$ la tribu de $X \times Y$ engendré par les élément de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{V}$. C'est la plus petite tribu qui contient tous les éléments de cette forme. Elle s'appelle tribu produit.*

Si $X = Y = \mathbb{R}$, en L2 on a introduit la notion d'ouvert (pour une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$). On peut donc définir la tribu des Boréliens sur $\mathbb{R}^2$ comme étant la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant :

Proposition 6.1.2. *La tribu des Boréliens sur $\mathbb{R}^{n+m}$ est la tribu produit des tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.*

Théorème 6.1.3. *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{V}, \nu)$ deux espaces mesurés. Alors il existe une unique mesure m sur la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{V}$ telle que pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{V}$,*

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Elle s'appelle mesure produit et se note $\mu \otimes \nu$.

La mesure μ s'appelle la première marginale de m et la mesure ν le seconde marginale.

Théorème 6.1.4 (et définition)**.** *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est la mesure borélienne qui attribue à chaque ouvert son volume. C'est aussi la mesure produit telle que sur $\mathbb{R}^{p+q}$ (avec $p + q = n$) chaque marginale est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.*

Remarque 16. La mesure de Lebesgue est aussi l'unique mesure invariante par translation. ■

6.1.2 Les théorèmes de Fubini

Théorème 6.1.5 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $(X,\mathcal{B},\mu)$ et $(Y,\mathcal{V},\nu)$ deux espaces mesurés, f une application mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B}\otimes\mathcal{V}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors*

1. *Les fonctions $x\mapsto\displaystyle\int f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y\mapsto\displaystyle\int f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables (respectivement par rapport à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V}$).*
2. *Il y'a les égalités dans $[0,+\infty]$*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu=\int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Exemple. Soient $(a_{n,m})$ des réels positifs. Alors

$$\sum_n\sum_m a_{n,m}=\sum_m\sum_n a_{n,m}.$$

Théorème 6.1.6 (Fubini-Lebesgue)**.** *Soient $(X,\mathcal{B},\mu)$ et $(Y,\mathcal{V},\nu)$ deux espaces mesurés, f une application dans $L^1(\mu\otimes\nu)$. Alors*

1. *Pour μ presque tout x, $y\mapsto f(x,y)$ est dans $L^1(\nu)$.*
2. *Pour ν presque tout y, $x\mapsto f(x,y)$ est dans $L^1(\mu)$.*
3. *$x\mapsto\displaystyle\int f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y\mapsto\displaystyle\int f(x,y)\,d\mu(x)$ sont respectivement dans $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$.*
4. *Il y'a les égalités dans $\mathbb{R}$*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu=\int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Un contre-exemple. Voici un exemple pour illustrer la différence entre les deux théorèmes et, en particulier l'importance de l'hypothèse que f soit dans $L^1(\mu\otimes\nu)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ par $f(x,y)=2e^{-2xy}-e^{-xy}$. La fonction est continue donc mesurable par rapport à la tribu borélienne. D'autre part, pour tout $y>0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dx=\frac{1}{y}\left[e^{-xy}-e^{-2xy}\right]_0^{+\infty}=0,$$

et pour tout $x>0$,

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy=\frac{1}{x}\left[e^{-xy}-e^{-2xy}\right]_0^{1}=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

Ces deux égalités ont aussi lieu λ-presque partout respectivement dans $[0,1]$ et dans $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (de valeur 1) et est donc intégrable. Elle est aussi strictement positive.

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]}\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\,dxdy &= 0 \\ \text{et } \int_{\mathbb{R}_+}\int_{[0,1]} f(x,y)\,dydx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx > 0 \end{aligned}$$

Exercice 19

1/ Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx$.
2/ Le contre exemple montre que f ne peut pas être dans $L^1(\lambda\otimes\lambda)$. Le montrer directement “à la main”.

6.1.3 Application : intégration par parties

Soient f et g deux applications dans $L^1(\lambda)$. On pose

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{[0,x]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ F(x) &= -\int_{[x,0]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \leq 0, \\ G(x) &= \int_{[0,x]} g(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ G(x) &= -\int_{[x,0]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\int_0^x f(t)G(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)\,dt.}$$

Nous allons faire la preuve dans le cas $x \geq 0$ plus simple à manipuler. Il faut adapter les signes pour le cas $x \leq 0$.

On utilise le théorème 6.1.6 pour la fonction $\phi(t,s) := \mathbb{1}_{\{0\leq s\leq t\leq x\}} f(t)g(s)$ définie sur $[0,1]^2$. La fonction est mesurable comme produit direct de fonction mesurables. Elle est sommable car

$$|\phi(t,s)| \leq |f(t)||g(s)|,$$

et f et g sont dans[1] $L^1(\lambda)$. On applique alors le Théorème de Fubini-Tonelli (Th. 6.1.5) à $|f(t)||g(s)|$ qui est un produit de fonctions sommables.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue qui permet d'avoir l'égalité

$$\int_{[0,x]}\int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dtds = \int_{[0,x]}\int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dsdt.$$

1. On aurait en fait pu seulement supposer que f et g sont localement intégrables, c'est à dire intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$

L'intégrale de droite vaut

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]}\int_{[0,x]}\phi(t,s)\,dsdt &= \int_{[0,x]}f(t)\int_{[0,t]}g(s)\,dsdt\\ &= \int_{[0,x]}f(t)G(t)\,dt.\end{aligned}$$

Pour celle de gauche, on se souvient que la mesure de Lebesgue ne charge pas les points. Donc

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]}\int_{[0,x]}\phi(t,s)\,dtds &= \int_{[0,x]}g(s)\int_s^x f(t)\,dtds\\ &= \int_{[0,x]}\int_{[0,x]}(\mathbb{I}_{[0,x]}(t)-\mathbb{I}_{[0,s]}(t))f(t)\,dtds\\ &= \int_{[0,x]}g(s)\int_{[0,x]}f(t)\,dtds-\int_{[0,x]}g(s)\int_0^s f(t)\,dtds\\ &= G(x)F(x)-\int_0^x g(s)F(s)\,ds.\end{aligned}$$

6.2 Changement de variables

Nous énonçons les résultats en dimension 2, mais donnerons aussi des exemples en dimension 3. Ils s'étendent à la dimension supérieure.

Définition 6.2.1. *Soit ϕ un difféomorphisme local d'un domaine U de $\mathbb{R}^2$ dans un domaine V de $\mathbb{R}^2$. On note donc $\phi(x,y)=\begin{pmatrix}\phi_1(x,y)\\ \phi_2(x,y)\end{pmatrix}$. La matrice $J_\phi(x,y)$ définie par*

$$J_\phi(x,y=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice jacobienne de ϕ en (x,y). La quantité $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}-\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}$ s'appelle le Jacobien de ϕ en (x,y). C'est aussi le déterminant de la matrice jacobienne.

Théorème 6.2.2. *Soit ϕ un difféomorphisme local d'un domaine U de $\mathbb{R}^2$ dans un domaine V de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie sur V. Alors pour tout f sommable*

$$\iint_V f(x,y)dxdy=\iint_U f\circ\phi(\xi,\zeta)\,|detJ_\phi(\xi,\zeta)|\,d\xi d\zeta,$$

où $detJ_\phi(\xi,\zeta)$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

Coordonnées polaires

Un point de coordonnées cartésiennes (x,y) peut aussi être vu avec les coordonnées polaires (ρ,θ), définies par la relation

$$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta.$$

Posons $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et Δ est le domaine décrit par les coordonnées polaires lorsque le point (x, y) décrit D. En écrivant les coordonnées cartésiennes comme fonctions des coordonnées polaires on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta.$$

Le Jacobien $\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \theta}$ vaut ρ.

Exemple. On veut calculer $I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$ avec D le quart de disque $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ et $0 \le x^2 + y^2 \le 1$. Le changement en polaires donne comme domaine Δ l'ensemble $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$. On a donc

$$I = \iint_\Delta \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\theta d\rho,$$

qui se calcule facilement.

Coordonnées cylindriques

Le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est représenté par les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) données par

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z.$$

La matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut ρ. On a donc

$$\iiint_{\phi(\Delta)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\, d\rho d\theta dz.$$

Coordonnées sphériques

Contrairement à l'habitude, ce sont les coordonnées les plus naturelles, puisque ce sont celles qui sont vues par les yeux ! Un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est représenté par les coordonnées (ρ, θ, φ) telles que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad z = \rho\cos\theta, \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi.$$

La matrice jacobienne est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $\rho^2 \sin\theta$. On a donc

$$\iiint_{\phi(\Delta)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Delta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi.$$

Exemple. On veut calculer $I = \iiint_K xyz\,dxdydz$ où K est l'ensemble des points de la sphère unité dont les 3 coordonnées (cartésiennes) sont positives.
En coordonnées sphérique, cet ensemble représente l'ensemble des points dont ρ varie entre 0 et 1, et les 2 angles θ et φ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \iiint_K xyz\,dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 \rho^5\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right) \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Un calcul en remplaçant z par $\sqrt{1-x^2-y^2}$ donnerait

$$I = \int_0^1 y \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\ dx\ dy,$$

plus difficile. Un calcul en cylindrique donnerait

$$I = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho^3.z\,dz\ d\rho\right).$$

6.2.1 Application

Loi de la somme de deux variables aléatoires à densité et indépendantes.

Chapitre 7

Examens

Session Janvier 2013

Exercice 1
On considère la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction dans $L^1(\lambda)$ on appelle transformée de Fourier la fonction :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx.$$

On rappelle que $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$.
1/ Justifier que $\widehat{f}(t)$ est bien définie.
2/ En utilisant la continuité sous le signe somme, montrer que $\widehat{f}$ est continue.
3/ Si on suppose aussi que $g : x \mapsto x.f(x)$ est dans $L^1(\lambda)$, montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2
On considère f dans $L^1(\lambda)$ (sur $\mathbb{R}$).
1/ Montrer que pour presque tout x, $\cos^n(x)$ tend vers 0.
2/ Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \cos^n x.f(x)\, dx$. On justifiera la réponse.

Exercice 3
Soit μ une mesure de probabilité (borélienne) sur $\mathbb{R}$. On note $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.
1/ Justifier que F est croissante. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$?
2/ Montrer qu'il y a au plus n points x tels que $F(x) - \lim\limits_{y\to x^-} F(y) \geq \dfrac{1}{n}$.
3/ En déduire qu'il y a au plus un ensemble dénombrable de points x tels que $\mu(\{x\}) > 0$.

Exercice 4

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = xe^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Session Juin 2013

Exercice 1
On considère la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

1/ À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge (au sens de Riemann).

2/ Calculer $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

3/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$?

Exercice 2

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sin x . e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 3
Soit f Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \left(e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1 \right) dx.$$

On pourra étudier pour x fixé $\lim_{n\to+\infty} e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1$. Bien préciser les théorèmes utilisés.

Exercice 4
Soit μ une probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On rappelle le Lemme de Borel Cantelli :

Si (A_n) est une suite de boréliens telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$ converge, alors, μ-presque tout x n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

On considère une suite de fonctions f_n et une autre fonction f telles que pour tout $a > 0$

$$\sum_{n\geq 0} \mu(|f_n - f| > a) < +\infty.$$

Montrer que pour μ-presque tout x, $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$.

Session Janvier 2014

Exercice 1 (2pt)
Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-n\sin^2(x)}\,dx$ où f est une fonction dans $L^1([0, +\infty[)$ (pour la

mesure de Lebesgue).

Exercice 2 (4pt)

1/ Montrer que pour tout x dans $[0,+\infty[$, et pour tout entier $n>0$, $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.
2/ Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

Exercice 3 (6pt)
Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x(1+|\ln x|)^2}$.
1/ Montrer que f appartient à $L^1(]0,1])$.
2/ Soit $p>1$. Montrer que f n'appartient pas à $L^p(]0,1])$.
3/ Soit $p\geq 1$. Montrer que f appartient) $L^p([1,+\infty[)$.

Exercice 4 (8pt)
Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré [1] vérifiant $0<\mu(E)<+\infty$. Soient $0<\varepsilon<1$ et $f:E\to[\varepsilon,+\infty[$ une fonction intégrable sur E.
1/ Soit $\alpha\in[0,1]$. Montrer que f^α est intégrable. On pourra majorer $f(x)^\alpha$ de deux manières différentes, selon que $f(x)\geq 1$ ou non.
2/ Montrer que pour tout $t\geq 1$, $\ln t\leq\sqrt{t}$. Montrer alors que $\ln f$ est dans $L^2(\mu)$.

On pose $F(\alpha)=\displaystyle\int_E f^\alpha\,d\mu$.

3/ Calculer $F(0)$.
4/ Montrer que F est dérivable sur $[0,\frac{1}{2}[$. Calculer sa dérivée.
5/ En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f^\alpha\,d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Contrôle continu 1 13-14

Exercice 1 (2 points)
Donner la définition d'un ensemble négligeable.

Exercice 2 (3 points)
On considère une suite (φ_n) d'applications étagées. Pour chaque n, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points de discontinuité de φ_n.
1/ Justifier que $\mathcal{D}_n$ est un ensemble fini.
2/ Montrer que l'ensemble $\cup_n\mathcal{D}_n$ est négligeable.

Contrôle continu 2 13-14

1. On pourra par exemple imaginer $E=[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, mais on écrira toujours E et μ.

Exercice 1 (5 points)

1/ Énoncer le Lemme B qui définit l'ensemble $\mathcal{E}_1$.
2/ Montrer qu'une fonction continue est dans $\mathcal{E}_1$.

Contrôle continu 3 13-14

Exercice 1 (2 points)
Citer le théorème de convergence dominée.

Exercice 2 (3 points)

1/ Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est sommable sur $[0, +\infty[$.
2/ Justifier que pour presque tout x, $\lim_{n\to+\infty} \sin^n(x) = 0$.
3/ Que dire de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{1+x^2} dx$? Justifier la réponse.

Contrôle continu 4 13-14

Exercice 1 (2 points)
Donner la définition de $L^p((a,b))$.

Exercice 2 (3 points)
On considère une suite de fonctions (f_n) dans $L^1([0,1])$ qui converge uniformément vers f. Montrer que f est dans $L^1([0,1])$. On pourra montrer que la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$ est bornée.

Bibliographie

[1] M. Briane and G. Pagès. *Théorie de l'intégration : licence de mathématiques, cours et exercices.* Les Grands cours Vuibert. Vuibert, 1998.

[2] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[4] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[5] E.C. Titchmarsh. *The theory of functions.* Oxford : Clarendon Press. x, 454 pp. , 1932.