Rappels sur l'intégrale de Lebesgue

Renaud Leplaideur

Année 2014-2015
UBO

Table des matières

1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et les limites croissantes

1.1 Trois aspects de l'intégration

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction *continue*, et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, il y a (au moins) trois façons différentes de considérer la quantité $\int_a^b f(x)\,dx$:

1. L'opération est vue comme l'opérateur inverse de la dérivation $f \mapsto f'$. On parle alors de primitives, et on a
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$
où F est une primitive de f, c'est à dire qu'elle vérifie $F'(x) = f(x)$. On s'intéresse dans ce cas au calcul de primitives non triviales (par exemple des fractions rationnelles), les résultats principaux seront par exemple les formules de changement de variable ou d'intégration par partie.

2. Si on définit $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$, I devient une forme linéaire ($I(\lambda f + g) = \lambda I(f) + I(g)$) sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b])$ des fonctions continues définies sur $[a,b]$. On cherche à étudier si l'opérateur I est continue (et pour quelle topologie), c'est à dire qu'on veut avoir des résultats du type
$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f) \text{ si } \lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$
La question consiste à déterminer ce que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ signifie.
3. On s'intéresse à l'ensemble des fonctions f, pas nécessairement continues, pour lesquelles on peut définir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, d'une façon qui étende la définition pour f continue. On sait pas exemple que si $[c,d]$ est un intervalle dans $[a,b]$ on peut calculer $\displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]}(x)\,dx$, où $\mathbb{1}_{[c,d]}$ est la fonction *indicatrice* de l'intervalle $[c,d]$, c'est à dire qu'elle vaut 1 sur l'intervalle et est nulle en dehors de $[c,d]$. Cet aspect est souvent plus caché, mais il se voit par exemple dans le vraie définition de l'intégrale de Riemann, qui est valide pour les fonctions réglées (voir plus bas).

Si le premier aspect est souvent celui qu'on retient le plus, ce n'est pas celui que nous allons retenir dans ce cours. **Ce serait une erreur de se focaliser sur ce point de vue et de ne retenir et/ou voir l'intégration que comme une opération inverse de la dérivation.** Dans ce cours, nous allons définir une nouvelle intégration, dite au sens de Lebesgue. Bien sûr cette nouvelle intégration étend celle de Riemann mais, le lien intégrale-primitive-dérivée est beaucoup plus délicat.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons plutôt au second aspect, c'est à dire l'intégration comme forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0([a,b])$. La plupart des résultats auront donc la forme
$$\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I(f) \text{ si } \lim_{n\to+\infty} f_n = f.$$

Les limites que nous étudierons serons des limites *monotones*.

Dans une seconde étape, nous verrons que cette nouvelle intégration permet de définir un nouvel ensemble de fonctions f pour lesquelles on peut calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Ceci fera donc le lien avec le troisième aspect de l'intégration. Cet ensemble permettra de définir à son tour un ensemble de sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$, les ensembles dits *mesurables*. On verra alors que ce point de vue est le "bon" pour faire des probabilités.

Le premier aspect, c'est à dire intégrale-primitives sera peu abordé, du fait de sa complexité.

1.2 Pour quelles f peut-on définir $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ au sens de Riemann ?

> On retiendra : **L'intégrale de Riemann est basée sur la convergence uniforme. A contrario, l'intégrale de Lebesgue est basée sur les limites croissantes.**

Si on considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la quantité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représente la surface (algébrique) comprise entre le graphe et l'axe des abscisses.

Elle se calcul comme une limite d'une somme de Darboux, c'est à dire en obtenant la fonction f comme limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux.

Bien que souvent construire uniquement pour les fonctions continues, cette théorie permet en fait de définir l'intégrale d'une fonction f pour un ensemble plus gros que celui des fonctions continues : l'ensemble des *fonctions réglées*.

On rappelle qu'une fonction $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *constante par morceaux* s'il existe une subdivisions

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_p = b,$$

telle que sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ ψ est constante de valeur c_i. La valeur de ψ aux points a_i n'est pas importante, on peut choisir la valeur c_i, c_{i-1}. . . .

On note ensuite $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\,dt := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1} - a_i)$.

Définition 1.1. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux.*
On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann s'il existe deux suites de fonctions constantes par morceaux, (φ_n) et (ψ_n) telles que

$$\forall\, t,\ |f(t) - \varphi_n(t)| \leq \psi_n(t),\ \ et\ \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)\,dt = 0.$$

Enfin, on remarque que la définition s'étend sans difficultés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en prenant φ_n aussi à valeur dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1
Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas réglée.

1.3 Principaux résultats pour l'intégrale de Riemann

1.3.1 Méthodes de calculs : lien intégration-dérivation

Le théorème fondamental du calcul différentiel établit un lien entre dérivation et intégration :

Théorème 1.2. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit F la fonction définie par*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F est dérivable et pour tout t dans $[a,b]$, $F'(t) = f(t)$.

Ce théorème permet de calculer des intégrales, soit par la méthode de l'intégration par partie :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = G(b)f(b) - G(a)f(a) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt,$$

soit par la méthode du changement de variable :

$$\int_a^b f \circ g(t) g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

1.3.2 Passages à la limite

On rappelle que $|| \quad ||_\infty$ est la norme infinie définie par

$$||g||_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

Si g est continue, cette borne supérieure est atteinte. Cette norme s'appelle aussi la norme de la convergence uniforme puisque dire $\lim_{n \to +\infty} ||f - \varphi_n||_\infty = 0$ signifie que la suite (φ_n) converge uniformément vers f :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall\, n \geq N,\ \forall\, t \in [a,b],\ |f(t) - \varphi_n(t)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues (sur $[a,b]$) qui converge uniformément vers f, alors f est continue et*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, d(t).$$

Ce résultat s'écrit aussi :

$$\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, d(t),$$

ce qui signifie qu'on peut inverser la limite uniforme et l'intégrale.

1.3.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

On considère un intervalle $I = [a,b]$ avec $a < b$. La lettre J désignera un autre intervalle de $\mathbb{R}$. On considère la fonction continue $f : I \times J \to \mathbb{R}$.

Théorème 1.4 (continuité sous le signe somme)**.** *La quantité $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ définit sur J une fonction continue.*

Remarque 1. Le théorème 1.3 peut se voir comme un cas particulier de ce théorème en considérant $x = n$ et une suite d'application au lieu d'une fonction de 2 variables. ■

Théorème 1.5 (dérivation sous le signe somme)**.** *Supposons que l'intervalle J soit ouvert et que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur J. Alors la fonction définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ est de classe C^1 et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

1.4 Intégrales généralisées : le cas non compact

L'intégration (au sens de Riemann) a aussi été étudiée sur des intervalles du type $[a, +\infty[$. Elle a aussi été vue pour des fonctions présentant des singularités sur le compact $[a, b]$ (par exemple $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$). On sait que ce dernier cas peut se ramener au cas précédent par un changement de variable (qui envoie la singularité à l'infini, dans notre exemple on fera $u := \frac{1}{x}$).

Ainsi, nous pouvons nous limiter au cas $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Dans ce cas, il s'agit de calculer une aire reposant sur un intervalle de longueur infinie. Les résultats évoquaient la *convergence* de l'intégrale ou son *absolue convergence*.

Ici réside une différence significative entre l'intégrale au sens de Riemann et celle au sens de Lebesgue. Des fonctions continues peuvent avoir une intégrale convergente au sens de Riemann mais pas au sens de Lebesgue. La différence disparaîtra lorsqu'on s'intéressera (ou se limitera) aux intégrales absolument convergentes.

Cette différence s'explique par le fait que l'intégrale de Lebesgue que nous allons voir permet d'unifier les résultats et les techniques de démonstrations entre le cas compact ($[a, b]$) et le cas non-compact ($[a, +\infty[$).

Pour l'intégrale de Riemann on définit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ à partir de $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\, dx$ en faisant $b \to +\infty$. Pour l'intégrale de Lebesgue on définir directement $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et voir que cela permet de calculer $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\, dx$ pour des fonctions plus générales que les seules fonctions continues ou réglées.

1.4.1 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Théorème 1.6. *Soient $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a < b$[1] et J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque x, et pour chaque t, $|f(t, x)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $\displaystyle x \in J \mapsto F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ définit une fonction continue sur J.

Théorème 1.7. *Soit J un intervalle ouvert. Soit $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue et il existe une fonction continue g vérifiant*

1. *pour chaque x l'intégrale $\int_a^b f(t, x)dt$ converge.*
2. *pour chaque x, et pour chaque t, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq g(t)$,*
3. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

1. Penser à $b = +\infty$

Alors la fonction définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *est de classe* C^1 *et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Nous insistons sur le point commun dans ces deux théorèmes. Dans les deux cas, il a une hypothèse de domination uniforme. C'est typiquement le type d'hypothèses que nous allons retrouver dans la théorie de l'intégration selon Lebesgue.

1.5 Limites monotones. Valeurs d'adhérences

On rappelle le théorème issue de la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: l'existence d'une borne supérieure pour tout ensemble non vide majoré. On rappelle qu'une suite (u_n) dans $\mathbb{R}$ est *croissante* si pour tout n,

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Théorème 1.8. *Soit* (u_n) *une suite croissante dans* $\mathbb{R}$. *Si elle est majorée, alors elle converge vers* $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, *sinon elle diverge vers* $+\infty$.

Dans les deux cas on peut écrire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

en commettant un abus de notation sur le "sup".

Une suite réelle ne converge pas nécessairement. On rappelle qu'une *valeur d'adhérence de la suite* (u_n) est une limite d'une suite extraite de (u_n).

Théorème 1.9 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.*

Exercice 2
En commettant l'abus de langage qui consiste à considérer qu'une suite qui diverge vers $\pm\infty$ en fait converge vers $\pm\infty$ (dans la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$), montrer que toute suite réelle possède au moins une valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.10. *Soit* (u_n) *une suite réelle. On note* $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *(resp.* $\liminf_{n\to+\infty} u_n$*) sa plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 3
Soit une suite réelle (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\limsup_{n\to+\infty} u_n \leq \liminf_{n\to+\infty} u_n$.

---

2 Définition de l'intégrale de Lebesgue

2.1 La méthode Cauchy

2.1.1 Ensembles négligeables

Définition 2.1. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit négligeable (*au sens de Lebesgue*) s'il peut être recouvert par une famille dénombrable d'intervalles de longueur totale arbitrairement petite.*

Lemme 2.2. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est négligeable si et seulement s'il peut être recouvert par un famille dénombrable d'intervalles de longueur totale finie et telle que chaque point de E appartient à une infinité d'intérieurs de ces intervalles.*

2.1.2 Fonctions en escalier à support compact et 2 lemmes essentiels

Définition 2.3. *Une fonction f définie sur I est dite en escalier à support borné (e.s.c.en abrégé) si*

- *Il existe une famille finie (éventuellement vide) de sous-intervalles disjoints (sauf sur les bords) I_k, chacun de longueur $|I_k|$ finie et telle que sur chaque I_k f est constante de valeur $c_k \neq 0$,*
- *en dehors des I_k f est nulle.*

*On notera $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des fonctions e.s.c.(*définies sur l'intervalle I*).*

Si l'intervalle I est de longueur finie alors une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux. Si l'intervalle I est de longueur infinie, par exemple si $a = -\infty$, alors une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux telle que le "premier" morceau soit de la forme $]-\infty, a_1]$ et la fonction est nulle sur cet intervalle.

Définition 2.4. *Soit f une fonction e.s.c.définie sur I, de valeur c_k sur les sous-intervalles I_k. On pose*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_k c_k |I_k|.$$

Nous avons précisé qu'une fonction *e.s.c.*est une fonction constante par morceaux, avec éventuellement quelques contraintes sur les valeurs pour le premier et le dernier morceaux si l'intervalle est de longueur infinie. La définition de l'intégrale est exactement la même que pour une fonction constante par morceaux en respectant cette contrainte.

Lemme 2.5 (Lemme A)**.** *Soit (φ_n) une suite décroissante de fonctions e.s.c.qui converge presque partout vers 0. Alors la suite des intégrales $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ décroît aussi vers 0.*

Lemme 2.6 (Lemme B)**.** *Soit (φ_n) une suite croissante de fonctions e.s.c.sur $I = (a, b)$ telle que la suite des intégrales $\displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ est majorée. Alors pour presque tout x de I, la suite $(\varphi_n(x))$ converge (vers une valeur $\varphi(x)$).*

2.1.3 Les fonctions sommables

Considérons une suite croissante de fonctions *e.s.c.*comme dans le lemme B. On suppose que les intégrales ont un majorant commun. Il existe donc une fonction φ *définie seulement presque partout* telle que $\varphi_n \to \varphi$ (presque partout). On note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions, définies presque partout que l'on peut obtenir de cette manière.

Pour une telle fonction φ, le lemme B nous incite à poser [2]

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx. \tag{1}$$

Le Lemme A permet de montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (φ_n).

Définition 2.7. *Une fonction définie presque partout sur (a,b) sera dite sommable si elle s'écrit sous la forme*

$$f = f_1 - f_2,$$

avec f_1 et f_2 dans $\mathcal{E}_1$. On notera $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des fonctions sommables (sur (a,b)).

Pour une telle fonction on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx.$

Proposition 2.8. *Soient f une fonction sommable et g une fonction presque partout égale à f. Alors g est sommable, de même intégrale que f.*

Proposition 2.9. *Soit f une fonction sommable sur (a,b). Alors $|f|$ l'est aussi.*

Démonstration. Posons $f^+(x) := \max(f(x),0)$ et $f^-(x) := \min(f(x),0)$. Alors

$$|f| = f^+ - f^-.$$

Écrivons $f = f_1 - f_2$ avec $f_i \in \mathcal{E}_1$. On montre que $\max(f_1,f_2)$ et $\min(f_1,f_2)$ sont aussi dans $\mathcal{E}_1$. Or,

$$f^+ = \max(f_1,f_2) - f_2 \text{ et } f^- = \min(f_1,f_2) - f_2.$$

Donc ce sont des fonctions dans $\mathcal{E}_2$. □

Remarque 2. Au passage on a aussi montré que f^+ et f^- sont sommables. ■

Application :

Proposition 2.10. *Si f est une fonction continue sur le compact $[a,b]$, alors f est sommable et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann.*

Démonstration. Il suffit de prendre une suite croissante de subdivisions [3] de l'intervalle $[a,b]$ dont le pas tend vers 0. À chaque rang, on considère la fonction en escalier qui vaut sur chaque segment de la subdivision le minimum de f sur ce même segment. Cela forme une suite croissante de fonctions en escaliers, donc *e.s.c.*, qui converge uniformément vers f, donc presque partout ! En d'autres termes, une fonction continue sur un segment est dans $\mathcal{E}_1$. □

2. Remarquer que la croissance des φ_n entraine la croissance de la suite des intégrales et donc sa convergence car la suite est majorée.

3. C'est à dire que la subdivision au rang $n+1$ raffine celle du rang n

2.2 La méthode des tribus

2.2.1 Définition d'un tribu et d'une mesure

Définition 2.11. *Soit X un ensemble. On appelle tribu*[4] *une collection $\mathcal{T}$ d'ensembles qui vérifie*

- $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- *Si A est dans $\mathcal{T}$ alors $X \setminus A$ est aussi dans $\mathcal{T}$.*
- *Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\cup A_n$ est aussi dans $\mathcal{T}$.*

Le doublet $(X, \mathcal{T})$ s'appelle un espace mesurable[5]*.*

On se donne deux espaces mesurables $(X, \mathcal{B})$ et $(Y, \mathcal{B}')$.

Définition 2.12. *Une application $f : X \to Y$ est dite mesurable si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{B}$.*

Remarque 3. Lorsque X ou Y est $\mathbb{R}$, on se limite souvent au cas de la tribu borélienne, c'est à dire celle engendrée par les ouverts.

■

Définition 2.13. *Soit $(X, \mathcal{T})$ s'appelle un espace mesurable. On appelle mesure sur $\mathcal{T}$ toute application μ définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\sqcup A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Si $\mu((a, b)) = 1$ on dit que μ est une mesure de probabilité.

2.2.2 Définition des fonctions étagées et des fonctions sommables

Définition 2.14. *Une fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est dite étagée s'il existe un nombre fini d'ensembles mesurables A_i, tous deux à deux disjoints tels que*

$$f = \sum_i c_i \mathbb{1}_{A_i}.$$

Si les A_i sont tous de mesure finie on pose alors $\displaystyle\int f\, d\mu := \sum_i c_i \mu(A_i)$

Dans le cas de $\mathbb{R}$, on constate qu'une fonction *e.s.c.*est étagée. Il existe des fonctions étagées qui ne sont pas des fonctions *e.s.c.*.

Définition 2.15. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable est sommable (dans $L^1(\mu)$) si et seulement si*

$$\int f\, d\mu =: \sup \left\{ \int \varphi\, d\mu,\ \varphi \le f \text{ et } \varphi \text{ étagée} \right\}$$

est fini.

---

4. parfois on parle de σ-algèbre
5. ce qui signifie qu'il est susceptible de recevoir une mesure

2.2.3 La mesure de Lebesgue

Elle est définie par $\lambda(]a,b[) = b-a$. Dans le cas $\mathbb{R}^n$ il faut la définir sur les pavés, c'est un peu plus délicat, ou montrer que c'est aussi la mesure produit (pour la tribu produit).

2.2.4 Stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables

Proposition 2.16. *L'ensemble des fonctions mesurables est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le produit, l'enveloppe inférieure et l'enveloppe supérieur de deux fonctions mesurables est encore mesurable.*

La valeur absolue d'une fonction mesurable est mesurable. L'inverse d'une fonction mesurable non nulle presque partout est aussi mesurable.

D'une façon plus générale, toute opération raisonnable avec des fonctions mesurables est encore mesurable. Voici maintenant un théorème qui montre la stabilité très forte de l'espace des fonctions mesurables :

Théorème 2.17. *Soit (f_n) une suite de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$) mesurables qui converge presque partout vers une fonction f. Alors f est mesurable.*

---

3 Principaux théorèmes de passage à la limite pour l'intégrale de Lebesgue

3.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 3.1 (Beppo Lévi)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables croissante. Si la suite des intégrales $\int_a^b f_n(x)\,dx$ est majorée, alors $(f_n(x))$ converge presque partout vers une fonction f qui est sommable. De plus,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Corollaire 3.2. *Soit (k_n) une suite de fonctions sommables. On suppose que la série de terme général $\int_a^b |k_n(x)|\,dx$ est convergente. Alors la série converge presque partout et*

$$\int_a^b \sum_n k_n(x)\,dx = \sum_n \int_a^b k_n(x)\,dx.$$

Démonstration. Appliquer le théorème de B. Levi à la série des parties positives et à la série des parties négatives des k_n. □

Corollaire 3.3. *Soit f sommable. Si $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ alors f est nulle presque partout.*

Démonstration. Si la fonction est nulle presque partout, alors son intégrale est nulle (d'après Prop 2.8).

Réciproquement, supposons que l'intégrale est nulle. On rappelle qu'une fonction mesurable est finie presque partout (puisque c'est une différence de fonctions de $\mathcal{E}_1$ et chaque élément de $\mathcal{E}_1$ est fini presque partout).

On applique alors le corollaire précédent à $k_n(x) = |f(x)|$. Chaque somme partielle (finie) a son intégrale nulle et donc la série est supposée converger presque partout. Si pour x, $f(x) \neq 0$, la somme partielle en x vaut $n.f(x)$ qui diverge. Ainsi, f est nulle presque partout. □

Exemple d'application classique Nous allons montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On commence par remarquer que pour tout $x > 0$, e^{-x} est dans $[0, 1[$, donc

$$\frac{x}{e^x-1} = xe^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} = xe^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-nx}.$$

Ensuite on pose $k_n(x) := xe^{-(n+1)x}$. Une intégration par partie montre

$$\int_0^{+\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2},$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi $\sum_n k_n(x)$ converge presque partout (en fait, on savait déjà qu'elle converge partout sur $]0, +\infty[$) et

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 3.4 (Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables sur (a, b). On suppose que*

1. *Il existe une fonction sommable g telle que pour tout n,*

$$|f_n| \leq g.$$

2. *La suite (f_n) converge (presque partout) vers une fonction f.*

Alors f est sommable et $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Exemple. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) := \min\left\{\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}}, n\right\}.$$

Chaque f_n est continue sur $(0,1)$. La suite converge presque partout vers la fonction nulle (en fait il y a convergence simple). On remarque aussi que l'on a

$$||f_n||_\infty = n,$$

donc la convergence n'est pas uniforme. En revanche, pour tout $x \in]0,1]$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La fonction g est sommable sur $(0,1)$. On en déduit donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Contre-exemple. Ce théorème ne permet pas de conclure dans tous les cas puisqu'il est parfois impossible de trouver une fonction sommable dominante. L'exemple classique est celui de la bosse glissante.

On considère une fonction continue, nulle en dehors de l'intervalle $[0,1]$, positive et d'intégrale non nulle (donc la fonction n'est pas identiquement nulle !). On pose $f_n(x) := \dfrac{f(x+n)}{n}$, ce qui signifie qu'on propage la "bosse" en l'atténuant d'un paramètre $\dfrac{1}{n}$ sur chaque intervalle $[n, n+1]$.

La suite de fonction converge simplement vers 0 puisque pour tout x, à partir d'un certain rang $f_n(x) = 0$. La convergence a donc lieu presque partout.

Cependant il n'existe pas d'application dominante et sommable. En effet, une telle application g devrait vérifier

$$g(x) = \sup_n |f_n(x)| = \frac{f(x-[x])}{[x]},$$

et son intégrale sur $\mathbb{R}$ serait donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \sum_n \frac{1}{n} \int_0^1 f(y)\,dy = +\infty.$$

3.3 Un théorème sans interversion de limite

Théorème 3.5. *Soit (f_n) une suite de fonctions sommables qui converge presque partout vers f. S'il existe une fonction sommable g telle que pour presque tout x,*

$$|f(x)| \leq g(x),$$

alors f est sommable.

Remarque 4. On ne dit pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$. ■

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions définies par
$$g_n(x) := \min\{g(x), \max\{f_n(x), -g(x)\}\}.$$
Cette suite converge vers f.

En effet, notons que g est positive. Si n est grand, pour x tel que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, alors on a presque $f_n(x) \sim f(x)$. L'inégalité $|f| \leq g$, signifie $-g \leq f \leq g$, donc $\max\{f(x), -g(x)\} = f(x)$ et $\min\{g(x), \max\{f(x), -g(x)\}\} = f(x)$. Il suffit ensuite de vérifier que pour tout n, $|g_n| \leq g$. □

Exemple d'application :

Théorème 3.6. *Toute fonction mesurable bornée par une fonction sommable est elle-même sommable.*

Démonstration. On fait la preuve dan sel cas d'une fonction positive. C'est une simple conséquence du théorème 3.5. On considère pour f_n une suite de fonction étagées qui croît vers la fonction mesurable étudiée f. Une telle suite se construit par exemple en prenant les ensembles $A_{k,n} := f^{-1}([k/2^n, (k+1)/2^n[)$ et $B_n := f^{-1}([n, +\infty[)$. Si on veut des ensembles de mesure finie, on peut les tronquer à $[-N, N]$ (on rajoute donc un paramètre N). La fonction f_n est alors définie par
$$f_n \sum_k k2^{-n} \mathbb{1}_{A_{k,n}} + n\mathbb{1}_{B_n}.$$
Pour g on prend la fonction sommable qui majore $|f|$. □

3.4 Le Lemme de Fatou

Théorème 3.7 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions positives et sommables qui converge presque partout vers f. S'il existe A tel que pour tout n,*
$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leq A,$$
alors f est sommable et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq A.$

Application : une majoration de l'intégrale de la dérivée. On se donne une fonction croissante continue sur $[0, 1]$. On admet que ceci implique que f est presque partout dérivable. Nous allons démontrer que la dérivée est sommable et qu'elle vérifie l'inégalité suivante :
$$\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0). \tag{2}$$
Pour cela on considère la suite d'applications définies par
$$f_n(x) := \begin{cases} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) \text{ si } x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Les applications f_n sont toutes positives car f est croissante et la suite converge presque partout vers $f'(x)$.

Calculons $\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Pour cela on introduit la primitive F de f définie par $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ (ici on parle d'intégrale de Riemann car f est continue).

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x+\frac{1}{n})dx - n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx \\
&= n\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx - n\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)dx \\
&= nF(1) - nF(\frac{1}{n}) - nF(1-\frac{1}{n}) + nF(0) \\
&= n(F(1) - F(1-\frac{1}{n})) - n(F(\frac{1}{n}) - F(0)) \\
&\to_{n\to+\infty} F'(1) - F'(0) = f(1) - f(0).
\end{aligned}$$

Pour utiliser la version du Lemme de Fatou que nous avons, il faut être un peu plus précis. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq f(1) - f(0) + \varepsilon.$$

On applique alors le lemme de Fatou, qui montre d'une part que f' est sommable et d'autre part qu'elle vérifie l'inégalité

$$\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0) + \varepsilon.$$

Celle-ci est vraie pour tout ε, on fait donc $\varepsilon \to 0$. CQFD

---

4 Exemples d'application des théorèmes précédents

4.1 Application de la convergence monotone

Théorème 4.1. *Si l'intégrale de Riemann* $\int_a^b |f(x)|dx$ *est convergente sur l'intervalle* (a,b) *alors* f *est sommable (au sens de Lebesgue) et les deux intégrales coïncident.*

Démonstration. Considérons le cas $a = 0$ et $b = +\infty$ et f continue (éventuellement juste par morceaux). On pose $f_n(x) := |f(x)|.\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. La suite est croissante et chaque f_n est sommable comme fonction continue définie sur un compact. De plus l'intégrale coincide avec $\int_0^n |f(x)|dx$. La limite existe, par hypothèse, donc la suite des intégrales est bornée. Ainsi f_n converge presque partout vers une fonction $\widetilde{f}$ qui est sommable d'intégrale la limite des intégrales des f_n. La convergence presque partout des f_n montre qu'en fait $\widetilde{f} = |f|$ (presque partout) et la limite des intégrales donne

$$\int_0^{+\infty} \widetilde{f}(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n |f(x)|dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Cela montre que f est sommable. □

Exercice 4
On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$.

1/ Soit x dans $\mathbb{R}$. Montrer que la suite définie par $(1-\dfrac{x^2}{n})^n$ converge vers e^{-x^2} et est croissante à partir d'un certain rang. Pour établir la croissance, on pourra faire le développement limité du logarithme du rapport de deux termes successifs de la suite.
2/ On considère la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x).$$

Montrer que la suite est croissante et converge presque partout vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
3/ En déduire l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx$.
4/ On rappelle que les intégrales de Wallis, définies par

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta\,d\theta$$

vérifient $I_m \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2m}}$ lorsque m tend vers $+\infty$. Conclure à l'aide d'un changement de variable dans le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f_n(x)\,dx$.

4.2 Application de la convergence dominée

Exercice 5
Donner une bosse glissante qui admet une application dominante sommable.

Exercice 6
Revenir sur l'exercice de l'intégrale de Gauss sans avoir besoin de prouver la croissance.

Proposition 4.2. *Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge (au sens des intégrales de Riemann). Alors f n'est pas sommable.*

Démonstration. Faisons une démonstration par l'absurde. Supposons que f est sommable. Alors, la proposition 2.9 montre que $|f|$ est sommable. Considérons $f_n(x) := \mathbb{1}_{[0,n]}(x)f(x)$. On a évidemment

$$|f_n| \leq |f|.$$

Le théorème de Lebesgue assure que $(|f_n|)$ converge vers une fonction sommable et que l'intégrale de cette fonction est la limite des intégrales. Mais la suite $(|f_n|)$ converge vers $|f|$ simplement (donc partout) et la limite des intégrales diverge. □

Le même argument (tronquer) permet de montrer que $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}$ n'est pas sommable.

Ce résultat complète le théorème 4.1. Pour un intervalle infini et une fonction continue (par morceaux) la sommabilité au sens de Lebesgue est équivalente à l'absolue convergence au sens de Riemann.

Régularité sous le signe somme :

Théorème 4.3. *Soit $f : I \times (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On suppose que*

1. *pour tout $t \in I$ la fonction d'une variable $x \mapsto f(t,x)$ est sommable sur (a,b) ;*
2. *pour presque tout x, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue ;*
3. *il existe une fonction $x \mapsto g(x)$sommable telle que pour tout t, $|f(t,x)| \leq g(x)$.*

Alors la fonction $t \mapsto F(t) := \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dx$ est continue.

Démonstration. La continuité de F en t_0 est équivalente à :

Pour toute suite (ε_n) qui tend vers 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} F(t_0+\varepsilon_n) = F(t_0)$.

Fixons t_0 et une suite (ε_n) tendant vers 0. On pose

$$f_n(x) := f(t_0+\varepsilon_n, x) \text{ et } f(x) := f(t_0,x).$$

Il faut alors démontrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Les deux dernières hypothèses permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

Le même genre d'astuce permet de démontrer le théorème de dérivation sous le signe somme :

Théorème 4.4. *Soit $f : I \times (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On suppose que*

1. *pour tout $t \in I$ la fonction d'une variable $x \mapsto f(t,x)$ est sommable sur (a,b) ;*
2. *pour presque tout x, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;*
3. *il existe une fonction $x \mapsto g(x)$sommable telle que pour tout t, $\left|\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$.*

Alors la fonction $t \mapsto F(t) := \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,dx$ est dérivable et $F'(t) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

Une autre application : une presque primitive. On considère une fonction sommable f sur (a,b). Pour $c \in (a,b)$ on pose

$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt \text{ si } x \geq c, \\ \displaystyle\int_x^c f(t)\,dt \text{ si } x \leq c. \end{cases}$$

Alors la fonction F est continue. Pour le voir, on utilise la formule de Chasles, ce qui permet de supposer $c = a$. La fonction F devient alors

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b \mathbb{1}_{(a,x)}(t) f(t)\,dt.$$

La fonction de deux variables $g(x,t) = \mathbb{1}_{(a,x)}(t)f(t)$ satisfait les hypothèses du théorème de continuité sous les signe $\displaystyle\int$ (Th 4.3).

4.3 Application du lemme de Fatou : une égalité pour l'intégrale de la dérivée

Soit f une application continue dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors f' est sommable et

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0). \tag{3}$$

Notez que l'on ne dit rien sur la continuité de f', donc sur le fait qu'elle soit Riemann-intégrable ou non. La preuve utilise le théorème de convergence dominée. On reprend la même suite de fonctions (f_n) que précédemment [6]. Le théorème des accroissements finis montre qu'il existe M tel que pour tout n,

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Le théorème de convergence monotone s'applique et on a donc

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = f(1) - f(0).$$

Remarque 5. L'hypothèse ici est que la fonction est dérivable partout, ce qui permet d'utiliser le théorème des accroissements finis. On n'a donc pas besoin de la croissance de f pour obtenir la positivité de f_n, c'est la domination qui est utilisée.

Toutefois, le résultat est faux si on suppose juste que f est dérivable presque partout et sa dérivée bornée (presque partout). L'escalier du diable est un contre-exemple classique. ■

---

6. pour obtenir l'inégalité 2.

5 Espaces L^p

5.1 Inégalités de convexité

Proposition 5.1. *Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $\beta := 1-\alpha$. Soient f et g deux fonctions sommables sur (a,b). Alors $|f|^\alpha |g|^\beta$ est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)|^\alpha |g(x)|^\beta \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^\alpha \left(\int_a^b |g(x)|\, dx\right)^\beta.$$

Démonstration. C'est une application "classique" de la convexité, laissée en exercice et/ou admise. □

À partir de cette inégalité, nous pouvons définir des nouveaux espaces.

Définition 5.2. *Soit p un réel strictement positif. On note L^p l'ensemble des applications f définies (presque partout) sur (a,b) telle que $|f|^p$ soit sommable.*

Pour $p > 1$, on appelle conjugué le réel $q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Remarque 6. On notera que L^1 est exactement l'ensemble des fonctions sommables. ■

Il y a une relation naturelle entre L^p et L^q. Elle découle de l'inégalité de Hölder.

Proposition 5.3. *Soient $p > 1$ et q son conjugué Soient f et g respectivement dans L^p et L^q. Alors fg est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Démonstration. On utilise la proposition 5.1 avec $\alpha = \frac{1}{p}$ et de bonnes fonctions intermédiaires : on pose $\varphi = |f|^p$ et $\psi = |g|^q$, $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q}$. φ et ψ sont sommables et $\varphi^\alpha \psi^\beta = |fg|$. □

L'inégalité (4) s'appelle *l'inégalité de Hölder*. Dans le cas particulier où $p = 2$, alors $q = p = 2$ et elle s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

À partir de l'inégalité de Hölder, on en obtient une autre très importante :

Proposition 5.4 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient f et g deux fonctions dans L^p ($p \geq 1$). Alors $f+g$ est dans L^p et*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

5.2 Espaces L^p, $p \geq 1$

On considère $p \geq 1$.

Proposition 5.5. *L'ensemble L^p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Démonstration. Laissée en exercice et/ou admise. La principale difficulté est de démontrer la stabilité par combinaison linéaire. Ceci résulte de l'inégalité de Minkowski. □

Pour f dans L^p on pose

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 5.6. *L'application $|| \quad ||_p$ est une norme sur L^p. C'est à dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $||f||_p = 0$ *si et seulement si* $f \equiv 0$.
2. $||\lambda.f||_p = |\lambda|.||f||_p$ *pour tout* $f \in L^p$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration. La dernière propriété est une application directe de l'inégalité de Minkowski. La première découle du corollaire 3.3. La deuxième de la linéarité de l'intégrale. □

Voici pêle-mêle et sans démonstrations les principales propriétés de l'espace L^p.

1. L^p muni de la norme $|| \quad ||_p$ est complet : toute suite de Cauchy converge.
2. Les compacts de L^p (pour la norme $|| \quad ||_p$) ne sont pas tous les fermés bornés. En particulier la boule unité n'est pas compacte.
3. L^p (toujours muni de la norme $|| \quad ||_p$) est *séparable*, c'est à dire qu'il existe une suite dense[7].
4. Toutes les normes ne sont pas équivalentes dans L^p.

5.3 Le cas particulier $p = 2$

Le cas $p = 2$ est particulier parce que, dans ce cas, la norme $|| \quad ||_2$ découle *d'un produit scalaire* :

Si f et g sont dans L^2 on note

$$< f|g > := \int_a^b f(x)g(x) \, dx.$$

L'application $< \quad | \quad >$ est un produit scalaire sur L^2, c'est à dire qu'elle est

1. bilinéaire : $< \lambda.f + g|h > = \lambda. < f|h > + < g|h >$ et $< f|\lambda.g + h > = \lambda. < f|g > + < f|h >$;
2. symétrique : $< f|g > = < g|f >$;

7. On rappelle que dense signifie que toute boule de rayon > 0 contient au moins un élément de la suite considérée.

3. positive : $< f|f >\geq 0$;
4. définie : $< f|f >= 0$ si et seulement si $f \equiv 0$.

Dans ce cas, la norme $|| \quad ||_2$ vérifie :

$$||f||_2 = \sqrt{< f|f >}.$$

Définition 5.7. *On dit que deux fonctions f et g de L^2 sont orthogonales si $< f|g >= 0$. Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de L^2, on dit que f est orthogonale à $\mathcal{V}$ si f est orthogonale à tout élément $g \in \mathcal{V}$.*

Une famille (f_n) dans L^2 est dire orthonormée si pour tout n et m,

$$< f_n|f_m >= \delta_{n,m}.$$

Le produit scalaire permet d'avoir

Théorème 5.8 (Pythagore)**.** *Si f et g sont orthogonales alors $||f+g||_2^2 = ||f||_2^2 + ||g||_2^2$.*

Par ailleurs, on rappelle que dans un espace-vectoriel, une famille est une *base* (vectorielle) si tout élément de l'espace est une unique combinaison linéaire finie d'éléments de la base. Étant donnée une famille (libre), l'espace vectoriel engendré par cette famille est alors l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de la famille.

Ainsi, la principale propriété de L^2 c'est qu'il existe des familles libres orthonormées telles que les espaces qu'elles engendrent sont denses. On parle alors de *base hilbertienne*[8] :

Théorème 5.9 (et définition)**.** *Dans L^2 une base hilbertienne est une famille (φ_n) orthonormale telle que l'espace vectoriel engendré par les φ_n est dense pour la norme $|| \quad ||_2$.*

Dans ce cas, pour tout f dans L^2 on aura l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} < f|\varphi_n > \varphi_n. \tag{6}$$

De plus la suite définie par $c_n :=< f|\varphi_n >$ vérifie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$.

Réciproquement, étant donnée une suite de scalaires (c_n) vérifiant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$, $\displaystyle\sum_n c_n\varphi_n$ est bien défini et est une fonction de L^2.

Remarque 7. Depuis le début nous considérons *a priori* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. on aurait pu considérer un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et le produit hermitien $< f|g >= \int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx$. Dans ce cas il faut prendre les modules des c_n qui sont des nombres complexes. ■

L'égalité (6) doit se comprendre dans L^2. l'élément de droite est une série infinie, c'est à dire une limite. L'égalité signifie donc

$$\lim_{n\to+\infty} ||f - \sum_{k=0}^{n} < f|\varphi_k > \varphi_k||_2 = 0,$$

8. Attention, une base hilbertienne n'est pas une base vectorielle.

soit encore $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |f(x) - \sum_{k=0}^{n} < f|\varphi_k > \varphi_k(x)|^2\, dx = 0.$

le reste du théorème signifie donc, qu'étant donnée une base hilbertienne, un élément de L^2 s'obtient "juste" sous forme d'une série des vecteurs de la base.

On obtient aussi une autre égalité :

$$\boxed{||f||_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} < f|\varphi_n >^2 .} \tag{7}$$

Exemple : séries de Fourier Si $(a, b) = (0, 2\pi)$, on peut prendre comme famille soit les fonctions du type $x \mapsto \cos nx$ et les fonctions du type $x \mapsto \sin nx$ (le cas réel [9] en calculant l'intégrale de leur carré), soit les fonctions du type $x \mapsto e^{inx}$ (le cas complexe).

On sait, par exemple que des fonctions continues par morceaux sont sommables. Le carré d'une fonction continue par morceaux est encore continue par morceaux donc est dans L^2.

Ainsi, on retrouve une version différente du théorème de Dirichlet sur l'égalité d'une fonction *un peu régulière* avec sa série de Fourier (égalité (6)). L'égalité (7) n'est rien d'autre que l'égalité de Parseval.

Le bon cadre pour faire les séries de Fourier c'est le cadre L^2 (et certainement pas les fonctions continues part morceaux).

Application : exemples de fonctions dans L^2 mais pas continue (ou réglées). Il suffit de choisir n'importe quelle suite (c_n) telle que $\sum_n |c_n|^2$ converge mais pas $\sum_n |c_n|$. Par exemple

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n},$$

n'est pas continue mais dans $L^2(0, 2\pi)$.

5.4 L^∞

Nous avons vu l'inégalité de Hölder, qui n'est valide que si p et q sont plus grand que 1. Il existe toutefois une version pour $p = 1$. Pour cela nous devons introduire un autre espace normé.

Définition 5.10. *On appelle L^∞ l'ensemble des applications qui sont (presque partout) bornée, c'est à dire les applications f telles qu'il existe un ensemble E négligeable et un réel C tel que pour tout $x \in (a, b) \setminus E$, $|f(x)| \le C$.*

On note alors $||f||_\infty := \sup\{||f(x),\ x \in (a, b) \setminus E\}$.

Lemme 5.11. *L'application $||\quad||_\infty : L^\infty \to \mathbb{R}^+$ est une norme.*

La proposition 5.3 s'étend au cas $p = 1$ et $q = \infty$:

Proposition 5.12. *Soient f dans L^1 et g dans L^∞. Alors fg est sommable et*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \le ||g||_\infty \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

9. il faut renormaliser ces fonctions

5.5 Inclusions

On peut se demander quelles sont les relations entre les espaces L^p. Lorsque (a,b) est infinie il n'y en a aucune. En effet, prenons $(a,b) =]0,1[$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est dans L^2 mais pas dans L^1. Inversement, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dans L^1 mais pas dans L^2.

Lorsque (a,b) est de longueur finie, alors les choses changent :

Proposition 5.13. *Si (a,b) est de longueur finie alors $L^p \subset L^m$ si $p \geq m$.*

Démonstration. Utiliser l'inégalité de Hölder avec f et $\mathbb{1}_{(a,b)}$. □

5.6 Non-équivalence des normes

Considérons la suite de fonction sur $[0,1]$, f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{2}{n} \\ \text{continue affine entre les 2.} \end{cases}$$

Cette suite converge presque partout vers la fonction nulle. On a

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{3a_n}{2n}.$$

Cela montre, en fonction du choix de a_n que (f_n) peut converger ou non vers la fonction nulle dans L^1.

Théorème 5.14. *Si (f_n) est une suite qui converge dans L^p vers f, alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.*

---

6 Théorèmes de Fubini

Théorème 6.1 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{V}, \nu)$ deux espaces mesurés, f une application mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{V}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors*

1. *Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int f(x,y)\, d\nu(y)$ et $y \mapsto \displaystyle\int f(x,y)\, d\mu(x)$ sont mesurables (respectivement par rapport à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V}$).*
2. *Il y a les égalités dans $[0, +\infty]$*

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d\mu \otimes \nu = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Exemple. Soient $(a_{n,m})$ des réels positifs. Alors

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_n a_{n,m}.$$

Théorème 6.2 (Fubini-Lebesgue)**.** *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{V}, \nu)$ deux espaces mesurés, f une application dans $L^1(\mu \otimes \nu)$. Alors*

1. *Pour μ presque tout x, $y \mapsto f(x,y)$ est dans $L^1(\nu)$.*
2. *Pour ν presque tout y, $x \mapsto f(x,y)$ est dans $L^1(\mu)$.*
3. *$x \mapsto \displaystyle\int f(x,y)\, d\nu(y)$ et $y \mapsto \displaystyle\int f(x,y)\, d\mu(x)$ sont respectivement dans $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$.*
4. *Il y'a les égalités dans $\mathbb{R}$*
$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu\otimes\nu = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

Un contre-exemple. Voici un exemple pour illustrer la différence entre les deux théorèmes et, en particulier l'importance de l'hypothèse que f soit dans $L^1(\mu \otimes \nu)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. La fonction est continue donc mesurable par rapport à la tribu borélienne. D'autre part, pour tout $y > 0$,
$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\, dx = \frac{1}{y}\left[e^{-xy} - e^{-2xy}\right]_0^{+\infty} = 0,$$
et pour tout $x > 0$,
$$\int_{[0,1]} f(x,y)\, dy = \frac{1}{x}\left[e^{-xy} - e^{-2xy}\right]_0^{1} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$
Ces deux égalités ont aussi lieu λ-presque partout respectivement dans $[0,1]$ et dans $\mathbb{R}_+$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (de valeur 1) et est donc intégrable. Elle est aussi strictement positive.

Par ailleurs on a
$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\, dxdy &= 0 \\ \text{et} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} f(x,y)\, dydx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx > 0 \end{aligned}$$

Exercice 7

1/ Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx$.
2/ Le contre exemple montre que f ne peut pas être dans $L^1(\lambda \otimes \lambda)$. Le montrer directement "à la main".

Exemple d'application : intégration par parties Soient f et g deux applications dans $L^1(\lambda)$. On pose

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{[0,x]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ F(x) &= -\int_{[x,0]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \leq 0, \\ G(x) &= \int_{[0,x]} g(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \geq 0, \\ G(x) &= -\int_{[x,0]} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \leq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\int_0^x f(t)G(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)\,dt.}$$

Nous allons faire la preuve dans le cas $x \geq 0$ plus simple à manipuler. Il faut adapter les signes pour le cas $x \leq 0$.

On utilise le théorème 6.2 pour la fonction $\phi(t,s) := \mathbb{1}_{\{0 \leq s \leq t \leq x\}} f(t)g(s)$ définie sur $[0,1]^2$. La fonction est mesurable comme produit direct de fonction mesurables. Elle est sommable car

$$|\phi(t,s)| \leq |f(t)||g(s)|,$$

et f et g sont dans [10] $L^1(\lambda)$. On applique alors le Théorème de Fubini-Tonelli (Th. 6.1) à $|f(t)||g(s)|$ qui est un produit de fonctions sommables.

On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue qui permet d'avoir l'égalité

$$\int_{[0,x]} \int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dtds = \int_{[0,x]} \int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dsdt.$$

L'intégrale de droite vaut

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} \int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dsdt &= \int_{[0,x]} f(t) \int_{[0,t]} g(s)\,dsdt \\ &= \int_{[0,x]} f(t)G(t)\,dt. \end{aligned}$$

Pour celle de gauche, on se souvient que la mesure de Lebesgue ne charge pas les points. Donc

$$\begin{aligned} \int_{[0,x]} \int_{[0,x]} \phi(t,s)\,dtds &= \int_{[0,x]} g(s) \int_s^x f(t)\,dtds \\ &= \int_{[0,x]} \int_{[0,x]} (\mathbb{1}_{[0,x]}(t) - \mathbb{1}_{[0,s]}(t)) f(t)\,dtds \\ &= \int_{[0,x]} g(s) \int_{[0,x]} f(t)\,dtds - \int_{[0,x]} g(s) \int_0^s f(t)\,dtds \\ &= G(x)F(x) - \int_0^x g(s)F(s)\,ds. \end{aligned}$$

---

10. On aurait en fait pu seulement supposer que f et g sont localement intégrables, c'est à dire intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$

7 Changement de variables

Nous énonçons les résultats en dimension 2, mais donnerons aussi des exemples en dimension 3. Ils s'étendent à la dimension supérieure.

Définition 7.1. *Soit ϕ un difféomorphisme local d'un domaine U de $\mathbb{R}^2$ dans un domaine V de $\mathbb{R}^2$. On note donc $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \phi_1(x,y) \\ \phi_2(x,y) \end{pmatrix}$. La matrice $J_\phi(x,y)$ définie par*

$$J_\phi(x,y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice jacobienne de ϕ en (x,y). La quantité $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}\dfrac{\partial \phi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x}$ s'appelle le Jacobien de ϕ en (x,y). C'est aussi le déterminant de la matrice jacobienne.

Théorème 7.2. *Soit ϕ un difféomorphisme local d'un domaine U de $\mathbb{R}^2$ dans un domaine V de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie sur V. Alors pour tout f sommable*

$$\iint_V f(x,y)dxdy = \iint_U f \circ \phi(\xi,\zeta) \left| det J_\phi(\xi,\zeta) \right| d\xi d\zeta,$$

où $det J_\phi(\xi,\zeta)$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

7.0.1 Coordonnées polaires

Un point de coordonnées cartésiennes (x,y) peut aussi être vu avec les coordonnées polaires (ρ,θ), définies par la relation

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta.$$

Posons $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et Δ est le domaine décrit par les coordonnées polaires lorsque le point (x,y) décrit D. En écrivant les coordonnées cartésiennes comme fonctions des coordonnées polaires on trouve

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta, & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta, & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta. \end{array}$$

Le Jacobien $\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} - \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$ vaut ρ.

Exemple. On veut calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}$ avec D le quart de disque $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq x^2+y^2 \leq 1$. Le changement en polaires donne comme domaine Δ l'ensemble $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$. On a donc

$$I = \iint_\Delta \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\theta d\rho,$$

qui se calcule facilement.

7.0.2 Coordonnées cylindriques

Le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est représenté par les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) données par

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z.$$

La matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut ρ. On a donc

$$\iiint_{\phi(\Delta)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Delta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\, d\rho d\theta dz.$$

7.0.3 Coordonnées sphériques

Contrairement à l'habitude, ce sont les coordonnées les plus naturelles, puisque ce sont celles qui sont vues par les yeux ! Un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) est représenté par les coordonnées (ρ, θ, φ) telles que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad z = \rho\cos\theta, \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi.$$

La matrice jacobienne est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut $\rho^2\sin\theta$. On a donc

$$\iiint_{\phi(\Delta)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{\Delta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi.$$

Exemple. On veut calculer $I = \displaystyle\iiint_K xyz\, dxdydz$ où K est l'ensemble des points de la sphère unité dont les 3 coordonnées (cartésiennes) sont positives.
En coordonnées sphérique, cet ensemble représente l'ensemble des points dont ρ varie entre 0 et 1, et les 2 angles θ et φ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \iiint_K xyz\, dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\rho^2\sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 \rho^5\, d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Un calcul en remplaçant z par $\sqrt{1-x^2-y^2}$ donnerait

$$I = \int_0^1 y \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz\ dx\ dy,$$

plus difficile. Un calcul en cylindrique donnerait

$$I = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho^3.z\,dz\ d\rho\right).$$

Application Loi de la somme de deux variables aléatoires à densité et indépendantes.

---

8 Théorie de la mesure

8.1 La tribu borélienne et la mesure de Lebesgue à partir de la méthode de Cauchy

Définition 8.1. *Une fonction est mesurable (au sens de Lebesgue) si elle est limite presque partout d'une suite de fonction e.s.c..*

Remarque 8. Les fonctions sommables sont donc mesurables !

Définition 8.2. *Un ensemble $E \subset (a,b)$ est dit mesurable (au sens de Lebesgue) si sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_E$ est mesurable (au sens de Lebesgue).*

Sa mesure est alors la quantité $\int_a^b \mathbb{1}_E(x)\,dx$ si elle est finie, et $+\infty$ sinon. On la notera $\lambda(E)$.

Comme $\mathbb{1}_{E\cup F} = \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_F - \mathbb{1}_E\mathbb{1}_F$, et $\mathbb{1}_{E\cap F} = \mathbb{1}_E\mathbb{1}_F$, l'union et l'intersection de deux ensembles mesurables est encore un ensemble mesurable. Par récurrence c'est aussi vraie pour une union finie ou une intersection finie.

Lemme 8.3. *Soit E_n une collection dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors $\cup_n E_n$ est mesurable et*

$$\lambda(\cup_n E_n) = \sum_n \lambda(E_n).$$

8.1.1 Les deux méthodes coïncident

Proposition 8.4. *Soit f une fonction. Alors*

$$\sup\left\{\int \varphi d\lambda,\ \varphi \text{ étagée et } \varphi \le f\right\} = \sup\left\{\int \varphi d\lambda,\ \varphi \text{ e.s.c.et } \varphi \le f\right\}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout φ étagée, on peut trouver une fonction ψ *e.s.c.*telle que $\psi \le \varphi$ et $\int \psi\,d\lambda$ aussi proche que voulu de $\int \varphi\,d\lambda$. On admet que c'est possible.

□

8.2 Mesures sur une tribu

8.2.1 Quelques compléments sur les tribus

1. La tribu grossière est composée de deux éléments, $\emptyset$ et X.
2. Au contraire la tribu triviale est $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. c'est bien souvent une tribu trop grosse.
3. Étant donné un ensemble A, l'ensemble $\{\emptyset, X, A, X \setminus A\}$ est une tribu.
4. D'une façon général, étant donné une partition $X = \sqcup X_i$, l'ensemble des éléments de la forme $\cup_{j \in J \subset I} X_j$ est une tribu.

Exercice 8
Montrer que l'intersection de deux tribus est encore une tribu. D'une façon générale montrer qu'une intersection de tribus est encore une tribu.

À partir de cet exercice on peut définir la plus petite tribu contenant une famille d'ensembles : c'est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent tous ces ensemble. Une telle tribu existe car $\mathcal{P}(X)$ est une tribu et contient, par définition, tous les sous-ensembles de X.

Définition 8.5. *Si $X = \mathbb{R}$, la tribu des boréliens est la plus petite tribu qui contient tous les ouverts.*

Proposition 8.6. *Si $X = \mathbb{R}$, les ensembles* Lebesgues mesurables *vus à la définition 8.2 sont exactement les ensembles de la tribu de Borel.*

8.2.2 Propriétés des mesures

Les principales propriétés d'une mesures sont les suivantes :

Lemme 8.7. *Une mesure est croissante pour l'inclusion :*

1. *Si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2. *Si $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*
3. *Si $\mu(A) = +\infty$, on ne peut rien dire sur $\mu(B \setminus A)$.*

Démonstration. Utiliser $B = B \setminus A \sqcup A$. □

Lemme 8.8. *Une mesure est fortement additive :*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Lemme 8.9. *Si (A_n) est une suite croissante*[11] *d'ensembles mesurables, alors*

$$\mu(\cup A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

Si (B_n) est une suite décroissante d'ensembles mesurables, alors

$$\mu(\cap B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n).$$

11. pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$

Lemme 8.10. *Une mesure est sous-additive :*

$$\mu(\cup A_n) \leq \sum \mu(A_n).$$

On admettra une propriété qui caractérise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$: Pour tout ensemble mesurable A,

$$\lambda(x + A) = \lambda(A).$$

8.2.3 Exemples de mesures autres que Lebesgue

La mesure de Dirac en x_0 définie par

$$\begin{cases} 1 \text{ si } x_0 \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Elle se note δ_{x_0}.

Cantor Triadic On construit une fonction, appelée escalier du diable à l'aide d'une suite de fonctions continues.

La fonction f_0 est la fonction identité. La fonction f_1 est obtenue en prenant la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Sur $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ elle est affine et vérifie $f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1$.

La fonction f_{n+1} se construit à partir de la fonction f_n de la manière suivante (voir 1). La fonction f_n est constante sur des intervalles de la forme $[\frac{j}{3^p}, \frac{j+1}{3^p}]$ (avec $p \leq n$) et affine par morceaux. Sur un morceaux "oblique" de taille horizontale $\frac{1}{3^n}$ et verticale $\frac{1}{2^n}$, on coupe l'intervalle en 3 tiers, la fonction est constante sur le tiers du milieu de valeur la moitié des 2 valeurs extrémales de f_n puis on la rend continue affine par morceaux (sans changer les valeurs extrémales sur l'intervalle). On vérifie que f_{n+1} est bien constante globalement affine par morceaux, sur des morceaux de la forme $[\frac{j}{3^p}, \frac{j+1}{3^p}]$ (avec $p \leq n+1$) et strictement croissantes sur des intervalles de taille $\frac{1}{3^{n+1}}$ avec des variations de taille $\frac{1}{2^{n+1}}$.

La différence entre f_n et f_{n+1} est inférieure à $\frac{1}{2^n}$ donc la suite est de Cauchy et converge uniformément vers une fonction continue.

Il s'agit d'une fonction continue, valant 0 en 0 et 1 en 1 mais presque partout de dérivée nulle. Cette fonction F permet de définir une intégrale (de Stieltjes), qui définit une mesure portée par le Cantor triadic : L'intégrale d'une fonction *e.s.c.*vaut

$$\sum_n \alpha_n(F(a_{n+1}) - F(a_n)),$$

où les intervalles sont les $[a_n, a_{n+1}[$ et sur cet intervalle la fonction vaut α_n. Cette nouvelle définition donne un nouvel ensemble de fonctions sommables et un nouvel ensemble $\mathcal{E}_2$.

Avec cette intégrale, on définit une mesure qui vérifiera :

$$\mu([a_n, a_{n+1}[) = F(a_{n+1}) - F(a_n).$$

Cette mesure ne charge aucun des intervalles "plateaux" de F.

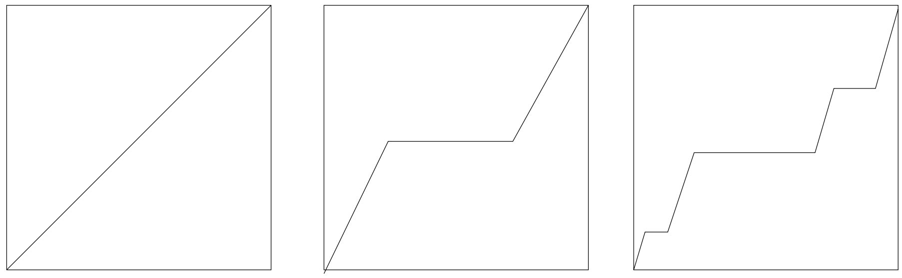

FIGURE 1 – Escalier du Diable

Une famille de mesures de support total sur $[0,1]$ La construction se fait aussi par récurrence. On part à nouveau de $f_0 \equiv Id$. Chaque f_n est affine par morceaux. Sur un intervalle de taille $\frac{1}{2^n}$ où f_n est de pente constante, on coupe l'intervalle en 2 moitiés, on multiplie la pente sur la première moitié par $p \in]0,1[$ et par $q := 1-p$ sur l'autre moitié. Cela donne une nouvelle fonctions du même type (mais à l'échelle $n+1$). Elle converge uniformément vers une fonction continue croissante. On construit l'intégrale de Stieltjes à partir de la fonction limite.

Remarque 9. On notera que la mesure de Lebesgue a été construite pour $F(x) = x$. ■

Autres mesures Sur $X = \{0,1\}$ on peut mettre la Loi de Bernoulli de paramètre p en prenant comme tribu $\mathcal{P}(X)$.

D'une façon plus générale, une variable aléatoire réelle définie une mesure sur $\mathbb{R}$. La fonctions répartition F permet de définir une intégrale et une mesure, appelée mesure image.

8.3 Théorie plus générale de l'intégration

La plupart des résultats vus pour la mesure de Lebesgue sont vrais dans le cadre plus général d'un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$. L'ensemble des applications f telles que $\int |f^p| \, d\mu < +\infty$ sera noté $L^p(\mu)$.

Les théorèmes de convergence monotone (Th. 3.1) et de convergence dominée (Th. 3.4) sont vrais, ainsi qu elle Lemme de Fatou (Lemme 3.7). Les propriétés des espaces L^p aussi, surtout la structure hilbertienne de $L^2(\mu)$ (avec un produit scalaire).

Les théorèmes de continuité et dérivations sous le signe somme sont vrais si la mesure ne "charge pas les points", c'est à dire que pour tout $a \in X$, $\mu(\{a\}) = 0$.

Notation : dans cette théorie on ne fait pas de différence entre l'intervalle $[a,b]$ ou l'intervalle $[b,a]$. La mesure assigne un poids à l'intervalle, il n'y a pas de direction ($a < b$) privilégiée. On notera donc l'intégrale

$$\int_X f(x) \, d\mu(x) \text{ ou plus simplement } \int_X f \, d\mu \text{ voire } \int f \, d\mu.$$

8.3.1 Deux applications

Le lemme de Borel-Cantelli

Proposition 8.11 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ tels que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Alors presque tout point n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

Démonstration. C'est une application de la généralisation d'un des corollaire du théorème de Beppo Lévi au cas d'une mesure quelconque. Le corollaire 3.2 dans ce cadre s'applique encore. La série de terme général

$$\mu(A_n) = \int \mathbb{1}_{A_n}(x)\, d\mu(x)$$

converge donc la série $\sum_n \mathbb{1}_{A_n}$ converge presque partout. Or pour x dans X, $\mathbb{1}_{A_n}(x)$ vaut 0 si $x \notin A_n$ et 1 si $x \in A_n$. Si la série $\sum_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$, cela signifie que son terme général tend vers 0 donc vaut 0 à partir d'un certain rang. □

Application : apparition du Pile On joue à Pile ou Face une infinité de fois. On note 0 si Face apparaît et 1 si c'est Pile qui apparaît. L'espace mesuré est donc identifiable à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)^{\otimes \mathbb{N}}$. On note A_n l'événement "Pile n'est pas apparu lors des n-premiers lancers". Il est de mesure $\frac{1}{2^n}$.

On a donc

$$\sum_n \mu(A_n) = 1 < +\infty,$$

ce qui signifie que pour presque tout tirage Pile apparaît au moins une fois [12].

Suites décroissantes d'applications mesurables

Proposition 8.12. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (f_n) une suite d'applications mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et qui décroît vers f sur X. S'il existe n_0 telle que f_{n_0} soit sommable (ou encore soit dans $L^1(\mu)$), alors f est sommable et $\lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$.*

Démonstration. Pour $n \geq n_0$ toutes les fonctions f_n sont sommables. On peut appliquer le théorème de Beppo Lévi à la suite définie par $-f_n$. □

Exercice 9
Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus qu'il existe n_0 tel que $f_{n_0} \in L^1(\mu)$.

---

12. On peut en aussi démontrer qu'il apparaît une infinité de fois.

9 Des exercices

Exercice 1

On considère la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction dans $L^1(\lambda)$ on appelle transformée de Fourier la fonction :

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx.$$

On rappelle que $e^{itx} = \cos(tx) + i\sin(tx)$.
1/ Justifier que $\widehat{f}(t)$ est bien définie.
2/ En utilisant la continuité sous le signe somme, montrer que $\widehat{f}$ est continue.
3/ Si on suppose aussi que $g : x \mapsto x.f(x)$ est dans $L^1(\lambda)$, montrer que $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

On considère f dans $L^1(\lambda)$ (sur $\mathbb{R}$).
1/ Montrer que pour presque tout x, $\cos^n(x)$ tend vers 0.
2/ Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \cos^n x.f(x)\, dx$. On justifiera la réponse.

Exercice 3

Soit μ une mesure de probabilité (borélienne) sur $\mathbb{R}$. On note $F(x) = \mu(]-\infty, x])$.
1/ Justifier que F est croissante. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$?
2/ Montrer qu'il y a au plus n points x tels que $F(x) - \lim\limits_{y\to x^-} F(y) \geq \dfrac{1}{n}$.
3/ En déduire qu'il y a au plus un ensemble dénombrable de points x tels que $\mu(\{x\}) > 0$.

Exercice 4

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = xe^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5

On considère la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

1/ À l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge (au sens de Riemann).

2/ Calculer $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverge.

3/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$?

Exercice 6

1/ Montrer que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{\sin x}{e^x - 1} = \sin x.e^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

2/ Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 7

Soit f Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$. Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \left(e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1 \right) dx.$$

On pourra étudier pour x fixé $\lim_{n\to+\infty} e^{-n\cos^2(x)} + \frac{1-nx}{1+nx} + 1$. Bien préciser les théorèmes utilisés.

Exercice 8

Soit μ une probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On rappelle le Lemme de Borel Cantelli :

Si (A_n) est une suite de boréliens telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$ converge, alors, μ-presque tout x n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.

On considère une suite de fonctions f_n et une autre fonction f telles que pour tout $a > 0$

$$\sum_{n\geq 0} \mu(|f_n - f| > a) < +\infty.$$

Montrer que pour μ-presque tout x, $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$.

Exercice 9 (2pt)

Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-n\sin^2(x)}\, dx$ où f est une fonction dans $L^1([0, +\infty[)$ (pour la mesure de Lebesgue).

Exercice 10 (4pt)

1/ Montrer que pour tout x dans $[0, +\infty[$, et pour tout entier $n > 0$, $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

2/ Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\, dx$.

Exercice 11 (6pt)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}$.

1/ Montrer que f appartient à $L^1(]0, 1])$.

2/ Soit $p > 1$. Montrer que f n'appartient pas à $L^p(]0, 1])$.

3/ Soit $p \geq 1$. Montrer que f appartient) $L^p([1, +\infty[)$.

Exercice 12 (8pt)

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré[13] vérifiant $0 < \mu(E) < +\infty$. Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $f : E \to [\varepsilon, +\infty[$ une fonction intégrable sur E.
1/ Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que f^α est intégrable. On pourra majorer $f(x)^\alpha$ de deux manières différentes, selon que $f(x) \geq 1$ ou non.
2/ Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\ln t \leq \sqrt{t}$. Montrer alors que $\ln f$ est dans $L^2(\mu)$.

On pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_E f^\alpha \, d\mu$.

3/ Calculer $F(0)$.
4/ Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}[$. Calculer sa dérivée.
5/ En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f^\alpha \, d\mu \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Références

[1] M. Briane and G. Pagès. *Théorie de l'intégration : licence de mathématiques, cours et exercices.* Les Grands cours Vuibert. Vuibert, 1998.

[2] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.

[3] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[4] Walter Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[5] E.C. Titchmarsh. *The theory of functions.* Oxford : Clarendon Press. x, 454 pp. , 1932.

13. On pourra par exemple imaginer $E = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue, mais on écrira toujours E et μ.