Analyse 1 L1-mathématiques

Renaud Leplaideur

Année 2013-2014
UBO

Table des matières

Chapitre 1

Inégalités et calculs

1.1 Nombres

1.1.1 Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

On sera amené à considérer quatre ensembles de nombres.

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$. C'est l'ensemble qui sert à indexer les suites. Tout élément y a un successeur ($n \to n+1$), tous les éléments sauf 0 y ont un prédécesseur. La relation d'ordre est
$$n < n+1.$$
Par exemple, si p et q sont deux entiers tels que $p > q$, alors $p \geq q+1$.
2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Tout élément y a un successeur et un prédécesseur. La relation d'ordre étend celle de $\mathbb{N}$. La différence entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ est essentiellement de nature algébrique.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. Un nombre x est un rationnel s'il s'écrit sous la forme
$$x = \frac{p}{q},$$
avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notez que $\frac{8}{15}$, $\frac{56}{105}$ et plus généralement $\frac{8m}{15m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ représentent le même nombre rationnel. On préfèrera la forme $\frac{8}{15}$ car le dénominateur et le numérateur n'ont pas de diviseur commun.
On rappelle l'additions e deux rationnels,
$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'},$$
et donc la relation d'ordre est donnée par
$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \iff p'q - pq' \geq 0.$$
À la différence de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$, un rationnel n'a pas de successeur ni de prédécesseur compatible avec la relation d'ordre.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'entre deux réels différent, il y a toujours au moins un rationnel (et en fait une infinité).

Même si cela défie un peut l'intuition, les trois ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont *le même nombre d'éléments*, ou plus exactement, la même infinité d'éléments. On dit qu'ils sont *dénombrables.*

Tout comme pour $\mathbb{Z}$, la passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ se justifie essentiellement par des arguments algébriques.

4. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$. C'est un ensemble bien plus gros que $\mathbb{Q}$ puisqu'on ne peut pas compter ses éléments (contrairement à $\mathbb{Q}$). Par exemple, π, e ou encore $\sqrt{2}$ sont des irrationnels, c'est à dire des réels qui ne sont pas rationnels.

Dans ce cours, nous n'évoquerons pas l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux parfois utilisés. Nous rappelons les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.1.2 Les intervalles et voisinages

La relation d'ordre entre les réels, permet de définir les intervalles :

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ est l'intervalle ouvert d'extrémités a et b.
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$ est l'intervalle ouvert en b et fermé en a. Il vaut $]a, b[\cup\{a\}$.
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$ est l'intervalle ouvert en a et fermé en b. Il vaut $]a, b[\cup\{b\}$.
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle fermé d'extrémité a et b . Il vaut $]a, b[\cup\{a, b\}$.

Un intervalle d'extrémités a et b comme ci-dessus est dit *borné*. Les intervalles non bornés sont du type $(a, +\infty[$ avec $(= [$ ou $]$, ou du type $]-\infty, b)$ avec $(= [$ ou $]$ ou encore $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

Par exemple $[a, +\infty[$ est l'ensemble des réels x vérifiant $x \geq a$.

Un intervalle se caractérise par "l'absence de trou" entre ses extrémités.

Définition 1.1.1. *Si a est un réel, on appelle voisinage de a tout intervalle qui contient un intervalle de la forme $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.*

On utilisera cette notion de voisinage de la manière suivante : "La fonction sinus est strictement positive sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$."

1.2 Calculs

1.2.1 Manipulation des inégalités

Inégalités strictes ou larges ?

Il faut bien distinguer l'inégalité stricte $<$ de l'inégalité large $\leq$. Si $a < b$ alors on a aussi $a \leq b$ mais l'implication contraire est fausse. Par exemple $-1 < k < 1$ permet d'affirmer $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ mais l'affirmation $-1 \leq k \leq 1$ ne le permet pas.

Un nombre x ne vérifie pas $x < x$ mais il vérifie $x \leq x$.

Opérations sur les inégalités

• Addition d'inégalité. On peut toujours additionner deux inégalités (dans le même sens) :

$$a < b \text{ et } c < d \Longrightarrow a + c < b + d.$$

Si les deux inégalités de gauche sont larges, l'inégalité de droite est large aussi. Si l'une des inégalités de gauche est stricte, alors celle de droite aussi est stricte.

• Addition d'un terme, changement de côté. $a < b \iff a + c < b + c$. On en déduit que $a < b$ est équivalent à $a - b < 0$.

• Multiplication d'inégalités On peut multiplier des inégalités si les nombres sont tous strictement positifs :

$$0 < a < b \text{ et } 0 < c < d \Longrightarrow 0 < ac < bd.$$

En effet, $bd - ac = a(d - c) + d(b - a)$ est le somme de nombres positifs.

• Multiplication par un nombre négatif Si on change les signes dans une inégalité, on change de sens. Rappelons que changer de signe signifie multiplier par -1 :

$$a < b \Longrightarrow -a > -b.$$

Plus généralement, si $c < 0$, $a < b$ entraine $ca > cb$.

• Élévation au carré. Si a et b sont tous les deux positifs alors a^2 et b^2 sont dans le même ordre que a et b. Pour le voir, il suffit de se souvenir de l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Ceci permet aussi de voir que si a et b sont négatifs, alors a^2 et b^2 sont dans l'ordre contraire de a et b.

Si a et b sont de signe différent, on ne peut rien dire sur l'ordre relatif entre a^2 et b^2.

Exemples
$a = -2$ et $b = 3$, $a^2 < b^2$. Au contraire, $a = -3$ et $b = 2$ donnent $a^2 > b^2$.

• passage à l'inverse. Si a et b sont de même signe (et non nuls)

$$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

En effet, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Par contre si a et b sont de signes contraires $a < b$ entraine $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

1.2.2 Valeurs absolues

Si x est un réel, **le réel $-x$ n'est pas nécessairement négatif**. C'est l'opposé de x, au sens ou

$$x + (-x) = 0.$$

Exemples
Si $x = 1$, $-x = -1$. Mais si $x = -2$, $-x = 2$.

Définition 1.2.1. *Si x est un réel, $|x|$ désigne celui des deux nombres x et $-x$ qui est positif (ou nul).*

Ainsi, si $x = 0$, $|x| = 0$, si $x > 0$, $|x| = x$ et si $x < 0$, $|x| = -x$.

La valeur absolue est utile pour exprimer de façons condensée certains encadrements.

Exemples
$|x| < 1$ signifie $x \in]-1, 1[$ ou encore $-1 < x < 1$.

$|x - x_0| < \varepsilon$ signifie $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, ce qui est équivalent à dire que x est dans l'intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon ε (voir déf. 1.1.1).

On rappelle l'inégalité triangulaire

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|. \tag{1.1}$$

On aussi rappelle l'égalité $\sqrt{x^2} = |x|$ (et non pas x !).

Exemple. On veut donner une expression simplifier de $f(x) := \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} \\ &= |x+1| + |x-3|. \end{aligned}$$

On dresse le tableau de signe et on additionne :

x	-1		3
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x-3\|$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$f(x)$	$-2x+2$	2	$2x-2$

Les opérations faites précédemment sur les inégalités montrent qu'on ne peut pas comparer $|a|$ et $|b|$ à partir de $a < b$.

1.2.3 Puissances et identités remarquables

Puissances rationnelles

Nous reverrons ces notions au chapitre suivant. Nous rappelons cependant certaines définitions et formules utilise pour le calculs.

La quantité $\sqrt{x}$ n'est définie que pour x positif. Elle vérifie $(\sqrt{x})^2 = x$ (à ne pas confondre avec $\sqrt{x^2} = |x|$!). Par contre la quantité $\sqrt[3]{x}$ est définie pour tout x réel.

Plus généralement, si q est un entier strictement positif, $\sqrt[q]{x}$ est définie pour x positif (ou nul) si q est pair, et pour tout x si q est impair. Elle vérifie

$$(\sqrt[q]{x})^q = x.$$

La quantité $\sqrt[q]{x}$ se notera aussi $x^{\frac{1}{q}}$.

On rappelle que si p est un entier strictement positif, $x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$ (définie pour $x \neq 0$). Par convention (au moins pour le moment), $x^0 = 1$ si $x \neq 0$.

Comme $x \mapsto x^p$ (avec p entier strictement positif) transforme un réel positif en un réel positif, on montre l'égalité :

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

On donne ici les règles de calculs et de manipulations des puissances. Elles sont données pour x et y strictement positifs, on peut dans certains cas (en fonction des valeurs de r et r') les étendre au cas x et/ou y non nuls. Le cas nul étant toujours délicat à gérer à cause des puissances négatives :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, r \in \mathbb{Q}^* \text{ et } \forall\, r' \in \mathbb{Q}^*, \\ (xy)^r = x^r.y^r,\ x^{r+r'} = x^r.x^{r'} \text{ et } (x^r)^{r'} = x^{rr'} = (x^{r'})^r.\end{array}}$$

Binôme de Newton

Les coefficients du binôme de Newton sont $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}$. Ce sont des entiers (même si leur expression est cour forme de fraction). Ils permettent d'obtenir

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En particulier on aura $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

On a aussi

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

1.2.4 Quelques astuces et pièges techniques

Diviser ou soustraire ?

Si on veut étudier ou résoudre une (in)équation de la forme $a = b$ ou $a < b$, on peut toujours se ramener à $a - b = 0$ ou $a - b < 0$.

Exemple. On veut étudier $x^2 = x + 1$ ou $x^2 < x + 1$.

Pour ce faire on va étudier l'inégalité large $x^2 \leq x + 1$ qui permet de traiter les deux problèmes en même temps. Or

$$x^2 \leq x + 1 \iff x^2 - x - 1 \leq 0.$$

On cherche les racines du polynôme $X^2 - X - 1$. Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$, et les racines sont donc

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc $x = a$ ou $x = b$, celles de l'inéquation sont $x \in]b, a[$.

Il est parfois utile de diviser ! Au lieu de passer de $a = b$ ou $a < b$ à (respectivement) $a - b = 0$ ou $a - b < 0$ on voudrait avoir $\dfrac{a}{b} = 1$ et $\dfrac{a}{b} < 1$.

Pour l'égalité, les deux équations sont équivalentes si et seulement si b n'est pas nul. Pour l'inéquation, on se réfèrera aux manipulations des inégalités. Il faut donc que l'on ait $b > 0$, sinon l'inégalité change de sens.

Exemple. Étudier $\dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{x}{x-1}$.

Quantité conjugué

On rappelle que la quantité conjugué de $a+b$ et $a-b$. Il est parfois utile de multiplier et diviser une expression par se quantité conjugué pour obtenir une expression plus pratique.

Exemple. Si on veut étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&\quad \text{noter que l'on multiplie et divise par une quantité non nulle si } n \text{ est un entier naturel} \\
&= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression permet d'affirmer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$.

1.3 Exercices

Exercice 1
Développer les expressions suivantes :
1/ $-7(5a+3b-5)-2(8-a+2b)$
2/ $(3x-2)(5x+1)$
3/ $-4\left(x+\frac{3}{4}\right)3\left(x+\frac{2}{3}\right)$
4/ $(2x+1)^2$
5/ $(x-5)(x+5)$
6/ $2(5x-3)^2-10$
7/ $\dfrac{(x-\sqrt{3})}{5}\dfrac{(x+\sqrt{3})}{5}$.

Exercice 2
Factoriser les expressions suivantes :
1/ $(x-2)(x-3)+(x-2)-(4x+5)(x-2)$
2/ $(4x-2)^2-(4x-2)+2x(8x-4)+12x-6$
3/ $x^2-2x+1+2x^2-2$.

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$,
1/ $\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{3}} = 0$.

2/ $\dfrac{(2x+3)^2}{(x-1)(3x-4)} = 1.$
3/ $\dfrac{-1}{x+2} < \dfrac{x}{x-1},$
4/ $x - 2 = \sqrt{2x-1},$
5/ $x - 1 \leq \sqrt{x-2}.$

Exercice 4
Développer $(1+3x)^4$

Exercice 5
On pose $S = 1 + x + \ldots + x^n$.
1/ Calculer $x.S$ et $S - x.S$.
2/ Donner une autre expression de S en fonction de 1 et de x.
3/ En déduire une factorisation de $a^n - b^n$.

Exercice 6

1/ Montrer $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$.
2/ dire quand il y a égalités ou inégalités strictes.

Exercice 7
Simplifier
1/ $\dfrac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}}{3x+4}$
2/ $\dfrac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}}{\frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{y}}.$
3/ $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}.$

Exercice 8

1/ A-t-on pour tout x dans $\mathbb{R}$ $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1}$?
2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1}.$

Chapitre 2

Calculs de limites

2.1 Rappels sur le logarithme et l'exponentielle

On se contentera ici de rappeler quelques propriétés utiles pour les calculs de limite.

2.1.1 Rappels sur le logarithme népérien

Il y a plusieurs façons de définir le logarithme :

1. C'est la bijection réciproque de exp,
2. c'est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1,
3. c'est une solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall a, b > 0 \quad f(ab) = f(a) + f(b). \tag{2.1}$$

Nous nous focaliserons, dans un premier termes, sur la dernière propriété (équation fonctionnelle).

Cette équation montre qu'aucune solution (différente de la fonction nulle partout) ne peut être définie en 0 puisqu'on devrait avoir,

$$\forall\, x,\ f(0) = f(0) + f(x).$$

Elle montre aussi que nécessairement $f(1) = 0$, puis que f ne peut s'annuler que en 1. Ceci implique aussi que f est monotone (strictement croissante ou strictement décroissante).

On construit ainsi une solution, qui est caractérisée par sa valeur en un point, c'est à dire, que si on on se fixe un point $a \neq 1$ et $a > 0$ et une valeur $c = f(a)$, alors on peut construire une (unique) fonction *continue* f vérifiant l'équation fonctionnelle. La fonction ln est une solution de ce type. Elle est définie sur $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

L'équation fonctionnelle permet d'avoir : $\forall \frac{p}{q}$, $\forall x > 0$,

$$\boxed{\ln(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\ln(x)}.$$

On a aussi les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Si on cherche la solution en se fixant la condition $f(10) = 1$, on trouve le logarithme décimal souvent noté Log. Il est proportionnel à ln au sens où pour tout x,

$$\mathrm{Log}\,(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

Si n est un entier strictement positif, $[\mathrm{Log}\,(n)] + 1$ est le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10. Cela signifie que $[\mathrm{Log}\,(n)]$ passe de 1 à 2 lorsque n passe de 99 à 100, et passe de 4 à 5 lorsque n passe de 9999 à 100000. **C'est donc une fonction qui croît très lentement**.

On retiendra que ln est plus *faible* que les puissances. Cela donne donc pour $\frac{p}{q} > 0$ (avec q impair pour la limite en $-\infty$)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{p}{q}} \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{p}{q}}} = 0.}$$

Pour les calculs de limites on retiendra aussi $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$.

2.1.2 Exponentielle

Comme pour le logarithme, il y a (au moins) trois manières différentes d'introduire l'exponentielle :

1. exp est la bijection réciproque de ln.
2. Par l'étude des solutions de l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.
3. Par l'étude des solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall a, b \quad f(a+b) = f(a)f(b). \tag{2.2}$$

Nous nous focalisons, dans un premier temps, sur l'équation fonctionnelle. Si f est une solution on trouve

$$f(0) = f(0+0) = f(0).f(0).$$

Il y a donc deux solutions possibles pour la valeur $f(0)$: $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si on retient la solution $f(0) = 0$, alors pour tout x,

$$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0.$$

Pour obtenir une solution de l'équation fonctionnelle non nulle, il faut donc choisir $f(0) = 1$. L'équation montre aussi que pour tout x, $f(x)$ est nécessairement strictement positif, puis que f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Tout comme pour ln, une solution de l'équation fonctionnelle est entièrement déterminé par sa valeur en un point $a \neq 0$. La fonction exp est une solution de cette équation. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

On retiendra : Limites en $\pm\infty$. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0}$.

Limite du taux de variation en 0 : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.}$

Croissance comparée : exp est toujours plus “forte” que n’importe qu’elle puissance x^n. Pour tout $\frac{p}{q} > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^{\frac{p}{q}}} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{p}{q}} \exp(x) = 0}.$$

2.2 Calculs de limites

2.2.1 Combinaisons de limites

Si $\lim_{x\to y} f(x) = l$ et $\lim_{x\to y} g(x) = l'$ alors $\lim_{x\to y}(f+g)(x) = l + l'$.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = l$ et $\lim_{x\to y} g(x) = l'$ alors $\lim_{x\to y} f(x).g(x) = l.l'$.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = l$ et $\lim_{x\to y} g(x) = l'$ et $l \neq 0$ alors $\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{l'}{l}$.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to y} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to y}(f+g)(x) = +\infty$.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to y} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to y}(f+g)(x) = -\infty$.

2.2.2 Formes indéterminées

Les opérations sur les limites rappelée précédemment ne permettent pas de toujours conclure. Il y a des formes dites *indéterminées :*

Si $\lim_{x\to y} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to y} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to y}(f+g)(x)$ est indéterminée.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to y} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to y} f(x).g(x)$ est indéterminée.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to y} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{f(x)}$ est indéterminée.
Si $\lim_{x\to y} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to y} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{f(x)}$ est indéterminée.

Il y a une méthode qui permet très souvent de trouver les limites (lorsqu’elles existent) : il s’agit d’identifier les termes dominants (en valeur absolue) et de les mettre en facteur.

Décomposition

Lorsqu’on veut calculer une limite, on est souvent ramener à une expression du type

$$\frac{A+B}{C+D},$$

chaque expression A, B, C et D pouvant être du même genre.

Exemple. Calculer les limites lorsque x tends vers $\pm\infty$ de $f(x) = \dfrac{\exp(x) - x^3}{\ln(|x|) + x^2 - x}$. On peut écrire $A = \exp(x)$, $B = -x^3$, $C = \ln(|x|)$ et $D = x^2 - x$. Ensuite on redécoupe D en $(a + b)/(c + d)$ en posant par exemple $a = x^2$, $b = -x$, $c = 1$ et $d = 0$.

Calcul de chaque terme

On détermine pour chaque terme de la décomposition sa limite (éventuelle). On identifie les formes indéterminées. Ensuite, on met en facteurs les termes dominants. Voici traité l'exemple $f(x)$ donné ci-dessus.

En $+\infty$. Au numérateur, A est dominant. Pour le dénominateur, a est dominant puis D est dominant. On trouve donc

$$f(x) = \frac{\exp(x)(1 - \frac{1}{x^{-3}\exp(x)})}{x^2(\frac{\ln x}{x^2} + 1 - \frac{1}{x})}.$$

La quantité $1 - \dfrac{1}{x^{-3}\exp(x)}$ tend vers 1 si x tend vers $+\infty$. De même $\dfrac{\ln x}{x^2} + 1 - \dfrac{1}{x}$. Il reste donc à étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^2}$, limite dont on sait qu'elle existe et vaut $+\infty$.

En $-\infty$. Au numérateur, le terme dominant devient x^3 puisqu'il tend vers $-\infty$ (si $x \to -\infty$), alors que $\exp(x)$ tend vers 0. Le terme dominant pour le dénominateur est encore x^2. On trouve donc

$$f(x) = \frac{x^3(-1 + \frac{\exp(x)}{x^3})}{x^2(\frac{\ln|x|}{x^2} + 1 - \frac{1}{x})} = -x\frac{1 - \frac{\exp(x)}{x^3})}{\frac{\ln|x|}{x^2} + 1 - \frac{1}{x}}.$$

Cela permet d'en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

En 0 . Si on veut étudier la limite en 0, à ce moment le numérateur tend vers une quantité finie $1 - 0$. Le dénominateur tend vers $-\infty$. La limite existe donc et vaut 0.

2.2.3 Le théorème des gendarmes

Théorème 2.2.1. *Soient f, g et h trois fonctions telles que pour tout x $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si $\lim_{x\to y} f(x) = l = \lim_{x\to y} h(x)$ alors $\lim_{x\to y} g(x) = l$.*

Ce théorème est souvent utile lorsqu'il y a des quantités dont on ne peut pas estimer facilement les limites ou si on sait qu'il n'y a pas de limites.

Exemple. Donner, si elle existe la limite $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Si $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et on sait que sinus n'a pas de limite en $+\infty$. On sait aussi que l'on a pour tout y,

$$-1 \leq \sin(y) \leq 1.$$

Cela donne pour tout $x \neq 0$, $-x \leq x \sin \dfrac{1}{x} \leq x$. Les termes extrémaux convergent vers 0, le terme du milieu aussi, en vertu du théorème 2.2.1.

2.3 Exercices

Exercice 9
Résoudre les équations suivantes :
1/ $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$.
2/ $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45$.
3/ $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x^2+5)$.
4/ $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{array} \right.$.
5/ $\left\{ \begin{array}{r} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{array} \right.$.

Exercice 10
Déterminer les limites en 0 des fonctions en x suivantes :
1/ $\sqrt{x}(\ln x)^3$.
2/ $\sqrt[5]{x}(\ln x)^8$.

Exercice 11
Résoudre $\exp(4x+2) - \dfrac{\exp(2)}{\exp(4x+2)} = \exp(2) - 1$.

Exercice 12
Étudier les limites éventuelles des expressions suivantes :
1/ $\sqrt{x+3}$ quand x tend vers 1,
2/ $\dfrac{x+7}{x^2-1}$ quand x tend vers 1,
3/ $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ quand x tend vers 1,
4/ $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x^n-1}$ quand x tend vers 1,
5/ $\dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{x-1}$ quand x tend vers 1, $+\infty$ ou $-\infty$,
6/ $x^2 \sin \frac{1}{x}$ quand x tend vers 0,
7/ $\dfrac{\sin x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$,
8/ $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ quand x tend vers 0,
9/ $\dfrac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$ quand x tend vers 0 et $+\infty$,

10/ $\dfrac{(a+x)^3 - a^3}{x}$ quand x tend vers 0 et $-\infty$,

11/ $\dfrac{x-2}{\sqrt{2-x}}$ quand x tend vers 2.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle. Dérivation. Fonctions usuelles

3.1 Fonctions

3.1.1 Notion de fonction et vocabulaire afférent

Définition d'une fonction

Définition 3.1.1. *Une fonction est un objet qui à tout point d'un ensemble de départ associe une (et une seule) image*

$$f : x \mapsto f(x).$$

Si $y = f(x)$, y est l'image de x par f et x est un antécédent de y.

Une fonction se caractérise par son graphe

Si une fonction est donnée par une expression de $f(x)$, par exemple $f(x) = e^x + \ln x + x^2$, c'est aussi valable pour $f(y) = e^y + \ln y + y^2$ ou $f(a) = e^a + \ln a + a^2 \ldots$.

On peut voir une fonction comme une sorte de "boite noire". On lui entre une donnée (le x !), elle rend une réponse (le $f(x)$). Cette boite noire donne toujours la même réponse si on lui rentre la même donnée.

Par exemple, l'opération :

1. "Pour un entier n on lui associe 1 s'il est pair, 0 s'il est impair" est une fonction.
2. "Pour un entier n, on lui associe 1 s'il est pair et 0 s'il est multiple de 3" n'est pas une fonction car les multiples de 6 ont plusieurs réponses possibles !
3. "lancer un pièce et regarder le résultat", n'est pas une fonction, car on a plusieurs résultats possibles.

Il faut donc voir une fonction comme étant une opération dynamique : à une entrée correspond une sortie. L'entrée s'appelle la *variable*. C'est pour cela qu'une fonction se note $x \mapsto f(x)$, signifiant qu'à la variable x (la donnée d'entrée) on associe la valeur $f(x)$ (la sortie de la boite).

Remarque 1. Il est courant de commettre un abus de langage et de notation en parlant de la fonction $f(x)$. On parle ainsi de la fonction $\sin x$, ou encore de e^x ou aussi de x^2.

On devrait en fait dire $x \mapsto \sin x$ (ou l'appeler sinus), $x \mapsto e^x$ (ou exponentielle) ou enfin $x \mapsto x^2$ (élévation au carré).

Dans un premier temps, nous conseillons vivement de s'interdire cet abus de langage et de s'efforcer de toujours écrire et dire $x \mapsto f(x)$. ■

Nous nous intéresserons, dans un première temps aux fonctions d'une variable réelle, puis, dans un autre chapitre aux fonctions de plusieurs variables réelles. En physique, la plupart des fonctions dépendent de plusieurs variables.

Exemple. La théorie de la relativité donne la masse d'une particule $m := \dfrac{m_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, où v est la vitesse de la particule. La masse m s'exprime comme une fonction de v. Elle s'exprime aussi comme une fonction de la masse initiale m_0 ou encore comme une fonction de la vitesse de la lumière.

Ensemble de définition. Graphe

Lorsqu'on dispose d'une fonction sous la forme $\xi \mapsto f(\xi)$ il faut avant étudier son ensemble de définition, c'est à dire décrire l'ensemble des ξ pour lesquels $f(\xi)$ peut être défini.

Par exemple $\sqrt{\cdot}: x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Il faut noter que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle alors que $\mathbb{R}^*$ est une union de deux intervalle. La plupart du temps, les fonctions que nous rencontrerons seront définies sur une union d'intervalle.

Définition 3.1.2. *Considérons une fonction définie sur un intervalle I. Pour chaque $x \in I$ on peut donc définir la valeur $f(x)$. L'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$ avec $x \in I$ s'appelle le graphe de f.*

Si on a $y = f(x)$, alors y est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.

L'ensemble des points y de la forme $f(x)$ pour x quelconque dans I s'appelle l'image de I par f. On le note $f(I)$.

L'application f est dite injective si pour tout y dans $f(I)$ il existe un unique x tel que $y = f(x)$.

Une fonction définit donc un graphe, et réciproquement, un graphe définit une fonction. Une partie de l'analyse consiste à donner des résultats sur l'allure du graphe d'une fonction : s'il est continu, régulier, convexe, etc.

Exemples
graphes de $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto \sqrt{x}$.

La notation $f(I)$ avec I intervalle est une **notation**. Il ne faut pas comprendre que c'est l'image de I au sens où on ne rentre pas un intervalle comme donnée à la fonction f mais des réels. Il s'agit donc d'un ensemble qui s'écrit aussi

$$f(I) := \{y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in I,\ f(x) = y\}.$$

Si $f(x)$ est unique lorsque x est déterminé, il se peut que pour $y \in \mathbb{R}$ il existe plusieurs x différents tels que $y = f(x)$. Cela explique/justifie la définition de l'injection qui caractérise l'unicité.

Définition 3.1.3 (intuitive)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est continue si son graphe graph(f) est en un seul morceau.*

Cette définition de la continuité n'est pas rigoureuse mais elle évite trop de technique. Pour la comprendre, il est préférable de voir des exemples de fonctions non continues :

Exemples
$x \mapsto [x]$ (partie entière) ou tout autre truc bricolé.

Théorème 3.1.4. *Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors l'image $f(I)$ est aussi un intervalle.*

Ce théorème s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires. Une version équivalente est de dire qu'avec les mêmes hypothèses, s'il existe x et x' dans I tels que $f(x)f(x') < 0$ (les images sont de signe contraire), alors il existe x'' entre x et x' tel que $f(x'') = 0$.

Opérations sur les fonctions

Lorsqu'on dispose de deux fonctions f et g on peut définir la fonction $f + g$ par $x \mapsto f(x) + g(x)$, plus généralement la fonction $a.f + b.g$ par $x \mapsto a.f(x) + b.g(x)$. La fonction $f.g$ est définie par $x \mapsto f(x).g(x)$. La fonction $\dfrac{f}{g}$ par $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$, définie là où g ne s'annule pas.

La fonction $f \circ g$ par $x \mapsto f(g(x))$ définie là où les images de g sont dans le domaine de définition de f.

3.1.2 Variations et bijections

Sens de variation

Définition 3.1.5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est*
- *croissante, si pour tout x et x' dans I, $x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$,*
- *strictement croissante si pour tout x et x' dans I, $x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$,*
- *décroissante, si pour tout x et x' dans I, $x \leq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$,*
- *strictement décroissante, si pour tout x et x' dans I, $x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$,*

Une fonction est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante

Exemples
$x \mapsto x^2$ est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$ et (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_-$. $x \mapsto [x]$ est croissante mais pas strictement croissante. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ mais elle n'est pas globalement croissante sur son ensemble de définition.

Remarque 2. La contraire de la proposition "f est croissante" n'est pas "f est décroissante". Par exemple $x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$. ∎

Il serait tout aussi faux de penser qu'une fonction est nécessairement monotone sur un intervalle. Par exemple la fonction définie par $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue et n'est monotone sur aucun voisinage de 0 (le tester avec les machines).

Extrema

Les extrema, c'est à dire là où la fonction atteint un maximum ou un minimum, sont souvent importants à déterminer. Par exemple, en physique, ils correspondent à des situation d'équilibre (possibles), stable s'il s'agit d'un minimum, instable s'il s'agit d'un maximum.

On imagine le minimum comme “le creux de la vague” et le maximum comme le “sommet de la montagne”. Toutefois, cette description imagée des extrema n'est pas équivalente à “là où la fonction est le plus bas” ou “là où la fonction est le plus haut”.

Dans un premier temps, nous n'étudierons pas cet aspect, et nous y reviendrons plus tard.

bijection et bijection réciproque

Théorème 3.1.6 (et définition)**.** *Soit f une application continue et strictement monotone définie sur un intervalle I. Alors f est injective. On peut définir la* bijection réciproque*, notée f^{-1} qui associe à $y \in J := f(I)$ l'unique x tel que*

$$y = f(x).$$

De plus f^{-1} a la même stricte monotonie que f et son graphe est obtenu en faisant la symétrie par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$) du graphe de f.

Remarque 3. Il ne faut pas confondre la notation f^{-1} avec la fonction $\dfrac{1}{f}$. La notation est parfois ambiguë, il faut avoir quelques notions d'algèbre pour la comprendre. La bijection réciproque f^{-1} est l'inverse de f pour la loi de composition $\circ$, l'inverse pour la multiplication étant $1/f$. ■

En théorie, une bijection est une application qui est à la fois injective et surjective. Nous avons défini la notion d'injection pas celle de surjection. Il est implicitement caché dans le théorème que $f : I \mapsto J := f(I)$ est surjective. Nous n'insisterons cependant pas sur cette notion.

Exemples
L'application $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et continue. Sa bijection réciproque est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. c'est en fait $x \mapsto \sqrt{x}$.

De même $x \mapsto x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

Plus généralement, $\sqrt[q]{\ }$ est la bijection réciproque de $x \mapsto x^q$ définie sur $\mathbb{R}_+$ si q est pair et $\mathbb{R}$ si q est impair.

Il faut donc retenir les égalités

$$\forall\, y \in J,\ f \circ f^{-1}(y) = y \text{ et } \forall\, x \in I,\ f^{-1} \circ f(x) = x. \tag{3.1}$$

On peut retenir la définition sous forme de phrase : “si f est injective de I dans $f(I) = J$, pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est le x de I tel que $y = f(x)$”.

3.2 Dérivation

3.2.1 Définition et règles de calcul

Définition 3.2.1. *Une fonction f est dite dérivable en a si*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe. On appelle alors ce nombre nombre dérivé de f en a. Il se note $f'(a)$.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur tout l'intervalle I, on définit alors une nouvelle fonction f' de I dans $\mathbb{R}$ par $f' : x \mapsto f'(x)$. Cette nouvelle fonction s'appelle fonction dérivée de f sur I.

On admettra que si f est dérivable en a alors elle est continue en a. Si f est dérivable sur un intervalle, elle est donc continue sur ce-même intervalle.

Exemple. À l'aide de la formule de Newton, développer $(x+h)^n$ et en déduire la dérivée de $x \mapsto x^n$.

- la dérivée est linéaire : $\boxed{(\lambda f+\mu g)' = \lambda f' + \mu g'}$.
- La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées mais $\boxed{(fg)' = f'.g + g'.f}$.
- Dérivation d'un produit de composition : $\boxed{(f\circ g)' = f'\circ g.g'}$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables, avec g qui ne s'annule pas,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + \frac{-1}{g^2}.g'.f = \frac{f'g-g'f}{g^2}}.$$

Tableau récapitulatif pour les fonctions usuelles :

Fonction $x \mapsto f(x)$	Dérivée $f'(x)$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$u^n(x)$, $n \geq 1$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$
$\frac{1}{u^n(x)}$, $n \geq 1$	$-nu'(x)\frac{1}{u^{n+1}(x)}$
$u^{\frac{1}{n}}(x)$	$\frac{1}{n}u'(x)u^{\frac{1}{n}-1}(x)$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\exp(u(x))$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\tan(u(x))$	$u'(x)(1+\tan^2(u(x)))$

Remarque 4. On a souvent tendance à écrire $(x)' = 1$ ou encore $(x^2)' = 2x$. Il s'agit d'une erreur due à l'abus de notation x pour $x \mapsto x$ ou x^2 pour $x \mapsto x^2$. Cet abus est source d'erreurs. ■

3.2.2 Lien dérivation et graphe

Sens de variation

Théorème 3.2.2. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est (strictement) positive sur cet intervalle (c'est à dire pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$) alors la fonction f est (strictement) croissante sur l'intervalle I.*

Si la dérivée est (strictement) négative sur l'intervalle, la fonction f est (strictement) décroissante.

On obtient ainsi un joli corollaire des deux théorèmes 3.1.6 et 3.2.2 :

Corollaire 3.2.3. *Soit f une fonction dérivable sur I. Si f' est strictement positive sur I alors f est une bijection de I sur l'intervalle image $J := f(I)$.*

Exemple. On redémontre ainsi que $x \mapsto x^p$ est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si p est impair ou de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ si p est pair.

Tangente

Si f est dérivable en un point a de I alors le graphe de f admet en $(a, f(a))$ une tangente. Elle a pour équation

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a).}$$

Il y a plusieurs façons de voir la tangente en un point. L'une d'elle consiste à dire que la tangente est la meilleur approximation affine de f au voisinage du point a, c'est à dire que pour x proche de a,

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a).$$

Cette dernière expression est *affine* en x.

Extrema

Définition 3.2.4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x un point de I tel qu'il existe un voisinage $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contenu dans I. On dit que*
f admet un minimum local en x s'il existe un voisinage $J =]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[$ contenu dans I tel que pour tout point y de J on ait $f(y) \geq f(x)$.
f admet un maximum local en x s'il existe un voisinage $J =]x - \varepsilon', x + \varepsilon'[$ contenu dans I tel que pour tout point y de J on ait $f(y) \leq f(x)$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto x^2$ admet un minimum en 0.

Théorème 3.2.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si la dérivée f' s'annule et change de signe en x alors f admet un extremum en x.*

Convexité

Définition 3.2.6. *Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout a et b dans I et pour tout $\alpha \in [0,1]$,*

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).$$

En d'autre termes, l'image d'un barycentre (positif) est plus basse que le barycentre des images.

Exemple. $x \mapsto x^2$ est convexe.

Proposition 3.2.7. *Une application convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle.*

On admettra des caractérisation plus pratique de la convexité :

Théorème 3.2.8. *Soit f une application définie sur l'intervalle I.*

1. *Si f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*
2. *Si f est deux fois dérivable[1], alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.*

Exemple. $x \mapsto x^2$ avec ces critères !

3.2.3 Dérivation de la bijection réciproque

Considérons f de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que c'est une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$. On rappelle que f est donc strictement monotone sur cet intervalle. La bijection réciproque vérifie l'équation

$$f \circ f^{-1}(x) = x.$$

Supposons maintenant que f est dérivable et essayons de calculer ce que pourrait être la dérivée de f^{-1}. La formule de dérivation du produit de composition donne

$$f'(f^{-1}(x)) \left(f^{-1}\right)'(x) = 1,$$

soit $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$ si cela a un sens, c'est à dire si $f'(f^{-1}(x))$ n'est pas nul. Ceci se traduit par :

Théorème 3.2.9. *Si f est une bijection de I dans $J = f(I)$ dérivable, alors f^{-1} est dérivable en tout point $y = f(x)$ où $f'(x) \neq 0$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f(x)}.$$

1. ceci signifie que f' est elle-même dérivable, la dérivée se notant f''.

Applications. $x \mapsto x^2$ a pour dérivée $x \mapsto 2x$, qui ne s'annule qu'en zéro. Ainsi la bijection réciproque $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable pour tout $y \neq= 0$ et

$$\sqrt{\ }' y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

car on a $y = x^2$ ou encore $x = \sqrt{y}$.

Plus généralement, la dérivée de $\sqrt[q]{\ }$ est donnée par

$$\left(\sqrt[q]{\ }\right)'(y) = \frac{1}{qx^{q-1}} = \frac{1}{q}\frac{x}{x^q} = \frac{1}{q}\frac{\sqrt[q]{y}}{y} = \frac{1}{q}\frac{y^{\frac{1}{q}}}{y} = \frac{1}{q}y^{\frac{1}{q}-1}.$$

3.3 Fonctions inverses classiques

3.3.1 Fonctions hyperboliques

Exponentielle et logarithme

Nous rappelons la limite admise :$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$. Cette limite peut aussi s'écrire sous la forme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0} = 1.$$

L'équation fonctionnelle montre alors que exp est dérivable puis que pour tout x, $\exp' = \exp$. En d'autres termes, exp est désolation de l'équation différentielle

$$y' = y.$$

On voit alors que exp est strictement croissante puisque sa dérivée est strictement positive. c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R})$. l'image de cet intervalle est l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Comme exp vérifie $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, la bijection réciproque vérifie [2]

$$f(cd) = f(c) + f(d).$$

On reconnait l'équation fonctionnelle caractéristique des logarithmes. On admettra :

Théorème 3.3.1. *Les deux fonctions* exp *et* ln *sont des bijections réciproques.*

Le théorème 3.2.9 permet de vérifier que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

En particulier la limite admise $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ s'écrit juste

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

2. en posant $c = \exp(a)$ et $d = \exp(b)$.

Trigonométrie hyperbolique

Soient cosh et sinh définies par

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Il est immédiat que cosh est strictement positive, ainsi que sinh est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. De plus cosh et sinh sont dérivables comme combinaisons de fonctions dérivables. Le calcul montre que $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$. On en déduit que sinh est strictement croissante. On montre que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction cosh est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et c'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

Les bijection réciproques se notent respectivement argsinh et argcosh.

En posant $X = \exp(x)$ puis en résolvant les équations

$$y = \cosh(x) \text{ ou } y = \sinh(x),$$

on trouve une expression explicite

$$\operatorname{argcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \text{ et } \operatorname{argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Les dérivation en utilisant les formules de fonctions composées ou le théorème 3.2.9 donnent

$$\forall x > 1,\ \operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Application : longueur d'une parabole.

Fonctions puissances

Si x est un réel strictement positif et q un entier naturel non nul, on a vu la notation $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$. Nous allons maintenant justifier cette notation.

Par définition de la bijection réciproque, on a $(\sqrt[q]{x})^q = x$. D'où

$$\ln(x) = \ln((\sqrt[q]{x})^q) = q \ln(\sqrt[q]{x}).$$

Cela donne $\ln(\sqrt[q]{x}) = \dfrac{1}{q} \ln(x)$ et cela justifie donc $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$.

Si maintenant p est un entier relatif (non nul), on a

$$\exp(\frac{p}{q} \ln(x)) = \exp(\ln(x^{\frac{p}{q}})) = x^{\frac{p}{q}}.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, cela justifie la définition :

Pour tout $a > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose

$$\boxed{a^\alpha = \exp(\alpha \ln a)}.$$

Posons $e = \exp(1)$, c'est à dire $\ln(e) = 1$. On a donc

$$\boxed{e^x = \exp(x)}.$$

3.3.2 Fonctions trigonométriques

On rappelle que sin et cos sont 2 fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Elle sont 2π-périodiques, c'est à dire que pour tout x,

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x).$$

Elles sont toutes les 2 dérivables et $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
De plus cos est paire, c'est à dire que pour tout x,

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

La fonction sin est elle impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$).
Il y aussi une propriété de ces fonctions :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Ceci se traduit géométriquement sur le cercle unité.

Cela permet de déduire des symétries des valeurs du type $\sin(\pi - x)$ ou $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ à partir de $\sin x$ et $\cos x$. On rappelle dans le tableau suivant quelques valeurs essentielles :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

On rappelle aussi que la fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Elle est impaire et π-périodique.

3.3.3 Fonctions trigonométriques réciproques.

La fonction tan définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vérifie que sa limite est $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$ et $+\infty$ en $+\frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable comme rapport de fonctions dérivables et,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

La dérivée est donc strictement positive, ce qui montre que tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ Sa bijection réciproque se note arctan.
Pour x dans $\mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est le réel y dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(y) = x$.
On a donc immédiatement la relation

$$\tan \circ \arctan(x) = x.$$

Par contre la relation $\arctan\circ\tan(x) = x$ n'est valable que pour x dans $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. La fonction arctan est très importante pour calculer les intégrales. On se souviendra que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

La bijection réciproque est aussi importante pour les passage de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires : si M a pour coordonnées cartésiennes (x,y), ses coordonnées polaires (ρ,θ) sont données par

$$x = \rho\cos\theta \text{ et } y = \rho\sin\theta.$$

Cela permet d'obtenir $\frac{y}{x} = \tan(\theta)$ et donc $\theta = \arctan\frac{x}{y}$ ou $\pi + \arctan\frac{x}{y}$.

Dans la même famille, on trouve les bijections réciproques de sin et cos. Elles sont un peu moins utiles.
La fonction sin est une bijection de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque se note arcsin. Elle va donc de $[-1,1]$ sur $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Ainsi pour x dans $[-1,1]$, $\arcsin(x)$ est le réel y de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(y) = x$. On a donc la relation

$$\sin\circ\arcsin(x) = x.$$

Attention, la formule $\arcsin\circ\sin(x) = x$ n'est pas toujours vraie. Elle n'est valable que pour x dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. On a aussi

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De façon similaire, cos est une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. La bijection réciproque se note arccos. On a aussi

$$\forall\, x\in[-1,1]\ \ \cos\circ\arccos(x) = x \text{ et } \forall\, x\in[-\pi,\pi], \arccos\circ\cos(x) = x.$$

Le calcul de la dérivée donne $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.4 Exercices

Exercice 13
Donner les ensembles de définitions des fonctions suivantes :
1/ $t\mapsto t^2+t+3$.
2/ $x\mapsto\sqrt{(x-1)(x-2)}$.
3/ $y\mapsto\frac{1}{y^2-4y-6}$.
4/ $\xi\mapsto\frac{\sqrt{\xi^2-4\xi-6}}{\xi^3-2}$.

Exercice 14
Former les fonctions $f \circ g$ à l'aide des 3 premières fonctions de l'exercice précédent. Donner les ensembles de définition.

Exercice 15
Résoudre les équations suivantes :
1/ $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$.
2/ $2^{3x+1} = 8^{5x-3}$.
3/ $e^{\ln(1-x^2)} = -2x + 1$.
4/ $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$.

Exercice 16
La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est-elle dérivable ?

Exercice 17
Calculer les dérivées de
1/ $f(x) = \sin((x+1)^2(x+2))$,
2/ $\ln(\ln x)$,
3/ $\dfrac{1}{1+\tan x}$,

Exercice 18
Calculer la dérivée f' en fonction de g' lorsque
1/ $f(x) = g(x) + g(a)$,
2/ $f(x) = (x-a)g(x)$,

Exercice 19
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit P le polynôme $P(X) = X^2 + 3X + 4$.
1/ Que vaut $P \circ f(x)$?
2/ Calculer la dérivée de $P \circ f$ de deux manières différentes : à l'aide des formules de produits de composition et à l'aide de la question précédente.

Exercice 20
Montrer que $x \mapsto x^2$ admet un minimum en 0.

Exercice 21

1/ Trouver le rectangle de périmètre fixé P qui a la plus grande surface possible.

Exercice 22
Soit p un entier positif.
1/ Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.
2/ Montrer que pour tout a et b réels positifs on a

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Exercice 23

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1/ Donner son ensemble de définition. Justifier qu'elle y est dérivable.
2/ Étudier les variations de f.
3/ * Donner les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.
4/ Donner les extrema de f. Résumer le tout dans un tableau.
5/ Donner, en fonction de la valeur du paramètre m, le nombre de solutions (on ne demande pas LES solutions) de $f(x) = m$.

Chapitre 4

Intégrales

4.1 Définition et premières propriétés

4.1.1 graphe et surface

On considère un intervalle $I = [a, b]$ (avec $a \leq b$) de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I dans $\mathbb{R}$. On rappelle que le graphe de f est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $x \in [a, b]$ et $y = f(x)$.

Définition 4.1.1. *On appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ la surface comprise entre le graphe de f et l'axe des absisses, cette surface étant comptée positivement si le graphe est au-dessus de l'axe et négativement sinon. On la notera $\int_a^b f(t)dt$.*

On pose aussi $\int_b^a f(t)dt \overset{déf}{=} -\int_a^b f(t)dt$

On comprend, avec cette définition qu'on ne peut pas calculer l'intégrale de n'importe quelle fonction, et qu'il faut que son graphe soit suffisament “joli”. En particulier on admettra qu'on peut calculer $\int_a^b f(t)dt$ pour **n'importe quelle fonction continue** f. On déduit de cette définition une propriété important de l'intégrale :

Proposition 4.1.2. *Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*

Démonstration. Si f est positive, son graphe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses et donc la surface est positive. □

De cette proposition découle deux corolaires utiles :

Corollaire 4.1.3. *Si $f \geq g$ (i.e. si pour tout t de $[a, b]$, $f(t) \geq g(t)$) alors $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.*

Il suffit d'utiliser la proposition avec $f - g$.

Corollaire 4.1.4.

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Il suffit d'utiliser le premier corollaire en remarquant que $-|f| \leq f \leq |f|$.

4.1.2 Primitives et intégrales.

Commençons par donner quelques propriétés de l'intégrale :

Proposition 4.1.5. *Soient f et g deux fonction (continues) définies sur $[a, b]$. Alors :*
$\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$
Pour tout λ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$
Pour tout c dans $[a, b]$ (et même ailleur si f est définie en dehors de $[a, b]$) on a ***la relation de Chasles***

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Définition 4.1.6. *On dit que la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* <u>*une*</u> *primitive de f sur $[a, b]$ si et seulement si F est dérivable de dérivée f.*

Le théorème fondamentale en calcul différentiel est le lien entre primitive et intégrale :

Théorème 4.1.7. *Si f est continue alors la fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.*

Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$ alors $F - G$ est dérivable de dérivée nulle. C'est donc une fonction constante. Ainsi, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent seulement d'une constante. On peut donc dire que $x \mapsto F(x) \overset{déf}{=} \int_a^x f(t)dt$ est **la** primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a. Ceci permet aussi de calculer une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque :

Proposition 4.1.8. *Si G est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

4.1.3 Primitives usuelles et exemple.

$f(t)$	$F(t)$
$n \neq -1,\ (t+\alpha)^n$	$\dfrac{(t+\alpha)^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{t+\alpha}$	$\ln\|t+\alpha\|$
$\cos(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)$
$\sin(\alpha t)$	$-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)$
$\cosh(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t)$
$\sinh(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}\cosh(\alpha t)$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$

$f(t)$	$F(t)$
α^t pour $\alpha > 0, \alpha \neq 1$	$\dfrac{\alpha^t}{\ln \alpha}$
$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$	$\tan t$
$\dfrac{-1}{\sin^2 t}$	$\mathrm{cotan} t$
$\dfrac{1}{t^2+1}$	$\arctan t$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t$
$\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$	$\mathrm{argcosh}\, t$
$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$	$\mathrm{argsinh}\, t$

Exemple. On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{t}{1+3t^2}dt$. On remarque que I s'écrit

$$I = \frac{1}{2.3}\int_0^2 \frac{2.3t}{1+3t^2}dt.$$

si nous posons $u(x) = 1+3x^2$, alors $I = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^2 \frac{u'(t)}{u(t)}dt$, ce qui signifie que

$$I = \frac{1}{6}\left[\ln|u(t)|\right]_0^2.$$

On trouve au final $I = \dfrac{\ln(13)}{6}$.

4.2 Méthodes de calculs.

4.2.1 Intégration par partie

Si f et g sont dérivables sur $[a,b]$, on rappelle la formule

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Ceci permet d'écrire la formule *d'intégration par partie* :

$$\boxed{\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)f(t)dt}$$

Cette formule est très utile pour calculer des intégrales compliquées. Plutôt que de faire une longue théorie voici quelques exemples.

Exemples

Calcul de $I_1 = \displaystyle\int_1^3 t^2 \ln t dt$. On manipule mieux la dérivée de ln que la fonction ln. On va donc faire une IPP pour se "débarrasser" du ln.
Posons $v'(t) = t^2$, on a $v(t) = \frac{1}{3}t^3$. Posons $u(t) = \ln t$, on a $u'(t) = \frac{1}{t}$. On trouve donc

$$I_1 = \int_1^3 v'(t)u(t)dt = [v(t)u(t)]_1^3 - \int_1^3 v(t)u'(t)dt,$$

ce qui donne $I_1 = \dfrac{27}{3}\ln 3 - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^3 t^2 dt$. On trouve donc $I_1 = 9\ln 3 - \dfrac{26}{9}$.

Calcul de $I_2 = \int_0^1 \arctan t dt$. On pose $v'(t) = 1$, et $u(t) = \arctan t$. On trouve $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Ceci donne

$$I_2 = [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt,$$

et donc $I_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Calcul de $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$. On pose encore $v'(t) = 1$ et $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$. On a donc $v(t) = t$ et $u'(t) = \dfrac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$, et donc

$$J_n = \frac{1}{2^n} + \int_0^1 \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt,$$

ce qui donne aussi

$$J_n = \frac{1}{2^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1}.$$

On a donc pour tout n, $2nJ_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} + (2n-1)J_n$. Comme on connait J_1, on peut calculer J_n pour tout n.

4.2.2 Changement de variables

La formule du changement de variable a déjà été vue sans être évoquée explicitement. considéronsune **bijection dérivable** u de $[a, b]$ sur l'intervalle $[c, d]$ (u est donc strictement monotone), et une primitive F de f (définie sur $[c, d]$). On aura

$$F \circ u(b) - F \circ u(a) = F(u(b)) - F(u(a)). \tag{4.1}$$

Le terme de gauche de (4.1) s'écrit aussi $\displaystyle\int_a^b u'(t) f \circ u(t) dt$ puisque la dérivée de $F \circ u$ est $u'.f \circ u$.

Le terme de droite de (4.1) s'écrit aussi $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$. Ainsi (4.1) s'écrit aussi

$$\boxed{\int_a^b u'(t) f \circ u(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(\xi)d\xi.}$$

Cette formule s'appelle la formule du changement de variable.

Effectuer un changement de variable dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ c'est :

* Soit écrire $t = u(x)$ où u est une application strictement monotone et dérivable de $[c, d]$ sur $[a, b]$,
* Soit poser $x = u(t)$ où u est une application strictement monotone et dérivable de $[a, b]$ sur $[c, d]$.

Exemples
Aire d'une ellipse : L'équation d'une ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On souhaite connaître son aire. On remarque que la symétrie permet de ne calculer que la surface comprise dans le quart-de-plan supérieur, c'est à dire là où x et y sont positifs. L'équation devient alors

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

ce qui signifie que la surface de l'ellipse est $S = 4b\displaystyle\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$.
On pose alors $x = a \sin t$, pour t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (on remarquera que sin est bien bijective et dérivable sur cet intervalle) ce qui donne $dx = a\cos(t)dt$.On a donc

$$S = 4b \int_0 \frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \sin^2 t}a\cos(t)dt = 4ab\int_0 \cos^2 t dt,$$

(puisqu'entre O et $\frac{\pi}{2}$ $\cos t$ est positif). cette dernière intégrale se calcule en utilisant la formule $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$. On trouve au final $S = \pi ab$.

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}dx$. On écrit $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4}$, soit

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}dx.$$

on pose alors $t = x + \frac{1}{2}$ (ce qui définit bien une bijection dérivable entre $[0, 1]$ et $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$) et on a donc $dt = dx$, ce qui donne

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2 + 1}dt.$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{2t}{\sqrt{3}}$ (ce qui donne $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$) pour obtenir

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2+1} du.$$

On trouve donc $I = \dfrac{2\pi}{6\sqrt{3}}$.

Pour calculer une primitive on se ramène donc à calculer une intégrale et on utilise les outils présentés (changement de variable et ou intégration par partie). Si on veut calculer un primitive particulière, valant b en a on calculera donc

$$F(x) = b + \int_a^x f(t)\,dt$$

et on prend bien soin de ne pas mettre la même variable dans l'intégrale qu'à l'extérieur : x pour $F(x)$, t (par exemple) pour l'intégrale.
Si on veut calculer les primitives, on se contentera de calculer $\displaystyle\int^x f(t)\,dt$ sur un intervalle où f est définie et on ajoutera une constante quelconque.

4.3 Primitives des fractions rationnelles

4.3.1 Décomposition en éléments simples

Polynômes

Définition 4.3.1. *On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute application du type*

$$P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

Si P n'est pas l'application nulle on appelle degré de P le plus grand k tel que a_k soit non nul. Il se note $\deg(P)$.

Par convention, et pour ne pas confondre l'application $x \mapsto x^n$ et sa valeur en x, x^n, le polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ se notera aussi

$$P = P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n.$$

Exemple. Le polynôme $P(X) = X^5 + X^4 + X + 2$ est de degré 5.
Le polynôme $P(X) = 3$ est de degré 0. C'est la fonction constante égale à 3. Le polynôme nul (c'est à dire la fonction constante nulle) sera dit de degré $-\infty$.

Définition 4.3.2. *Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 1est dit irréductible s'il est de la forme*

$$P(X) = \begin{cases} X - a \text{ avec } a \in \mathbb{R}, \\ ou \\ X^2 + pX + q \text{ avec } p^2 - 4q < 0. \end{cases}$$

Exemples
$X-1$, X^2+1 ou X^2+X+1 sont irréductibles. X^2-2X+1 et X^3+X ne le sont pas.

Théorème 4.3.3. *Tout polynôme non nul se décompose de façon unique comme un produit de polynômes irréductibles et d'un réel.*

Exemple. Décomposition en facteurs irréductibles de X^4+1. c'est un polynôme de degré 4 sans racines dans $\mathbb{R}$, qui s'écrira donc comme produit de 2 polynômes de degré 2 irréductibles. On a donc

$$X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2=(X^2+1-\sqrt{2}X)(X^2+1+\sqrt{2}X)=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

Les deux polynômes obtenus sont bien irréductibles.
Le polynôme $P(X)=X^2+2X+1$ s'écrit aussi $P(X)=(X+1)^2$.

Proposition 4.3.4. *Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, avec $Q\neq 0$. Il existe deux polynômes uniques R et T, avec $\deg(R)<\deg(Q)$ tels que*

$$P=QT+R.$$

Cette opération s'appelle la division euclidienne de P par Q ; R s'appelle le reste de la division et T le quotient.

Exemple. On aura $X^5+X^2+1=(X^2+X+1)(X^3-X^2+2)-(2X+1)$; Le quotient de X^5+X^2+1 par X^2+X+1 est donc X^3-X^2+2 et le reste est $-(2X+1)$.
Si on effectue la division euclidienne de X^2+X+1 par X^5+X^2+1, on peut écrire

$$X^2+X+1=(X^5+X^2+1)\times 0+(X^2+X+1),$$

et $2<5$, ce qui signife que le quotient est 0 et le reste X^2+X+1.

Proposition 4.3.5. *P est un multiple de Q si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par Q est nul.*

Exemple. Effectuons la division euclidienne de X^5+X+1 par X^2+X+1 :

$$\begin{array}{cccccc|l}
X^5 & & & & +X & +1 & X^2+X+1 \\
\cline{7-7}
-X^5 & -X^4 & -X^3 & & & & \\
 & -X^4 & -X^3 & & +X & +1 & X^3-X^2+1 \\
 & X^4 & +X^3 & +X^2 & & & \\
 & & & X^2 & +X & +1 & \\
 & & & -X^2 & -X & -1 & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Donc X^5+X+1 est un multiple de X^2+X+1.

Fractions rationnelles

Définition 4.3.6. *On appelle fraction rationnelle toute application du type* $T : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *où* P *et* Q *sont deux polynômes,* Q *étant non nul.* P *s'appelle le numérateur et* Q *le dénominateur. On appelle degré de la fraction le terme* $\deg(P) - \deg(Q)$*. On notera* $\mathbb{R}(X)$ *l'ensemble des fractions rationnelles réelles.*

Tout comme pour les polynômes on notera (souvent) $T = T(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ la fraction pour ne pas la confondre avec sa valeur en x. Une fraction rationnelle n'est pas nécessairement définie sur $\mathbb{R}$ à cause du dénominateur. On appelle *pôle de la fraction* tout point où le dénominateur s'annule. On fera toutefois attention de ne pas ajouter de faux pôles :

Exemple. la fraction $\dfrac{X^2-1}{X^3-1}$ présente un pôle en 1 sous cette forme mais elle vaut aussi $\dfrac{X+1}{X^2+X+1}$ qui n'a aucun pôles. Il faut donc retirer tous les facteurs irréductibles communs au dénominateur et au numérateur.

Si $\dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, on peut toujours effectuer le division euclidienne de P par Q pour obtenir $P = QT + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$. On aura donc

$$\frac{P}{Q} = T + \frac{R}{Q}.$$

On considèrera que toute fraction rationnelle est de degré < 0 et s'écrit $\dfrac{P}{Q}$ avec P et Q sans terme irréductibles commun dans leur décomposition respective.

Définition 4.3.7. *On appelle élément simple de* $\mathbb{R}(X)$ *une fraction rationnelle ayant l'une des formes suivantes :*
$\dfrac{a}{(X-b)^n}$*, où* a *est dans* $\mathbb{R}^*$*,* b *est dans* $\mathbb{R}$ *et* n *est un entier* ≥ 1*.*
$\dfrac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$ *où* a *et* b *sont deux réels non tous les deux nuls et* p *et* q *deux réels tels que* $p^2 - 4q$ *soit* < 0 *et* n *est un entier* ≥ 1*.*

Le principale résultat sur les fraction rationnelles est le suivant ; ilest utile pour l'intégration et/ou la recherche de primitives.

Théorème 4.3.8. *Toute fraction (de degré* < 0*) se décompose de façon unique comme une somme d'éléments simples de* $\mathbb{R}(X)$*.*

On peut aussi préciser sous quelle forme il faut recherche les éléments simples, mais la formulation est assez lourde :
Prenons $\frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec P et Q premiers entre eux. Les facteurs premiers de Q sont notés $T_1, \ldots, T_k$ et $S_1, \ldots, S_l$ sans faire intervenir la multiplicité, où T_i est du type $T_i = X - a_i$ et S_j est du type $S_j = X^2 + p_j X + Q_j$ (avec $p_j^2 - 4q_j < 0$). Cela signifie que Q s'écrit

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{k} (T_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{l} (S_j)^{m_j},$$

où les m_n sont les multiplicités des facteurs irréductibles. Alors les facteurs premiers dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ sont de deux types :
des termes en $\frac{\alpha_{i,n}}{(T_i)^n}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq n \leq m_i$,
des termes en $\frac{\beta_{j,n}X + \gamma_{j,n}}{(S_j)^n}$ pour $1 \leq j \leq l$ et $1 \leq n \leq m_i$.

Exemples
$T = \frac{X}{(X-1)(X-2)}$. Le numérateur et le dénominateurs sont sans terme irréductible commun. Le degré est $1 - 2 = -1 < 0$. Les facteurs irréductibles du dénominateurs sont $X - 1$ de multiplicité 1 et $X - 2$ de multiplicité 1. La forme sera donc

$$T = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} = \frac{(a+b)X - (b+2a)}{(X-1)(X-2)}.$$

Par identification on trouve $a + b = 1$ et $b + 2a = 0$, soit $a = -1$ et $b = 2$. Donc

$$T = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X-1}.$$

Une autre méthode est possible : On multiplie par $X - 1$ et on fait $X = 1$. Cela donne a. On fait pareil avec $X - 2$. On trouve $a = \frac{1}{1-2} = -1$ et $b = \frac{2}{2-1} = 2$.
$T = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)^2(X-1)^2}$. Le numérateur et le dénominateurs sont bien premiers entre eux. Le degré est $2 - 6 = -4 < 0$. Les facteurs irréductilbes du dénominateurs sont $X^2 + 1$ de multiplicité 2 et $X - 1$ de multiplicité également 2. La forme sera donc

$$T = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}.$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des constantes.
Si on multiplie par $(X-1)^2$ en faisant $X = 1$ on trouve la valeur de b, soit $b = \frac{1+1+1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$. De plus $X^2+X+1-\frac{3}{4}(X^2+1)^2$ vaut $X-1-\frac{1}{4}(X^2-1)(3X^2+5)$, ce qui permet d'obtenir a en multipliant par $X - 1$ et en faisant $X = 1$: on trouve $a = -\frac{3}{4}$. Si on multiplie par X et on fait *tendre* X *vers l'infini*, on trouve $0 = a + c$, donc $c = \frac{3}{4}$. Si on fait $X = 0$ on trouve $d + f + b - a = 1$, ce qui donne $d + f = -\frac{1}{2}$. Si on multiplie par $(X^2 + 1)^2$ en faisant $X^2 = -1$ on trouve

$$\frac{X}{-2X} = eX + f,$$

ce qui donne $eX + f = -\frac{1}{2}$. Une telle équation n'est possible que si $e = 0$ car aucun réel ne donne $x^2 = -1$. Donc $e = 0$ et $f = -\frac{1}{2}$. Ainsi $d = 0$; On a donc

$$\frac{X^2+X+1}{(X^2+1)^2(X-1)^2} = \frac{-3}{4}.\frac{1}{X-1} + \frac{3}{4}.\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{3}{4}.\frac{X}{X^2+1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

On vérifie que la formule est juste.

4.3.2 Calculs des primitives des fractions rationnelles.

Nous avons vu que les fractions rationnelles se décomposent en éléments simples. Cela permet en particulier de les intégrer facilement :

Éléments simples du premier degré.

Tout élément simple du type $\dfrac{a}{(bx+c)^n}$ admet comme primitive (là où il est défini) $\dfrac{-1}{n-1}\dfrac{a/b}{(bx+c)^{n-1}}$ si n est différent de 1 et $\frac{a}{b}\ln|bx+c|$ si $n=1$.

Exemples

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$. La fraction $R(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ s'écrit aussi

$$R(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

et donc $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2}dx$.

Calcul de $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx$. La fraction $R(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ s'écrit

$$R(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

ce qui donne $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{-1}{(x-1)^2}dx - \int_3^4 \frac{1}{(x-1)}dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx$, et donc au final

$$I = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{6}.$$

Éléments simples du second degré.

Un élément simple du second degré est de la forme

$$\frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}.$$

On souhaite donc calculer $\displaystyle\int^x \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}dt$. Comme cela a déjà été vu on écrit $t^2 + pt + q = (t+\frac{p}{2}) + q - \frac{p^2}{4}$ et on commence par faire le changement de variable $u = t + \frac{p}{2}$. On se ramène à calculer

$$\int^{x+\frac{p}{2}} \frac{au+b'}{(u^2+c)^n}\,du$$

avec $c > 0$. Le terme $\dfrac{au}{(u^2+c)^n}$ se calcule sans problème (il s'intègre “à vue”). Reste le terme en $\dfrac{b'}{(u^2+c)^n}$. On met c en facteur dans le dénominateur et on effectue le nouveau changement de variable $v := \frac{u}{\sqrt{c}}$. On est ramené à une intégrale du type

$$b''.\int^{\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{c}}} \frac{1}{(v^2+1)^n}dv.$$

Ce type d'intégrale a été vu en exemple, on sait donc comment les calculer.

4.4 Exercices

Exercice 24

1/ Trouver la primitive de $f : x \mapsto x^3 + 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en -1.
2/ Trouver les primitives de $f : x \mapsto x^3 + 5x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et qui s'annulent en 2.
3/ Trouver les primitives des fonctions définies par $f(x) =$

$$(x+1)^2(x-3),\ \frac{x^3+1}{(x^4+4x+1)^2}, \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}},\ \sqrt{2x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+5}}.$$

Exercice 25
À l'aide d'une IPP calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.

Exercice 26

1/ À l'aide d'une IPP calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.
2/ Plus généralement, trouver une formule de récurrence entre $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$

Exercice 27
Calculer les intégrales suivantes en effectuant les changements de variable donnés (on pensera à les justifier) :
1/ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, et $x = \sin t$.
2/ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$, et $x = \operatorname{sh} t$.
3/ $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$, et $t = \sqrt{1+x}$.
4/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\cosh x} dx$, et $t = e^x$.
5/ $\displaystyle\int_2^3 \log(\sqrt[3]{x} - 1) dx$, et $t = \sqrt[3]{x}$.

Exercice 28
Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$ en effectuant un bon changement de variable.

Exercice 29
Trouver des primitives de la fonction f définie par
1/ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$.
2/ $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x-1}$.

3/ $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

4/ $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 - 4x + 3)(x-2)}$.

Exercice 30

Trouver une primitive de $x \mapsto \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$ à l'aide d'un bon changement de variable.

Chapitre 5

Fonctions de plusieurs variables

5.1 Introduction et rappels

5.1.1 Exemples de fonctions de plusieurs variables

La fonction impédance est définie par $f(R, L, C, \omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ dépend de 4 variables.

Comme nous l'avons dit plus haut, la théorie de la relativité donne la masse d'une particule $m := \frac{m_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, où v est la vitesse de la particule. La masse m s'exprime comme une fonction de v, de la masse initiale m_0 et de la vitesse de la lumière.

En mathématiques, nous parlerons d'une fonction de 2 variables ou 3 variables (ou plus). Une fonction de 2 variables est une fonction d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Une fonction de 3 variables est une fonction d'un domaine de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, etc.

Exemples

$f(x, y) = \frac{2x - y \sin x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ est une fonction de 2 variables, x et y , définie lorsque $x^2 + y^2 < 1$.

$f(x, y, z) = \frac{2x + 3z}{y - 4z}$ est une fonction des 3 variables, x, y et z définies hors du plan d'équation $y = 4z$.

5.1.2 Rappels sur la géométrie de $\mathbb{R}^n$

vecteurs et produit scalaire

On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ d'une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) ou (x, y, z).

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est la flèche reliant O et M. Ses coordonnées sont aussi (x, y) ou (x, y, z). Si M' a pour coordonnées (x', y') ou (x', y', z'), le vecteur $M\vec{M}'$ a pour coordonnées $(x' - x, y' - y)$ ou $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées (α, β) et (α', β') (ou (α, β, γ) et (α, β, γ)) le *produit scalaire* $\vec{u}.\vec{v}$ vaut $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ (ou $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$).

Théorème 5.1.1. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*

Si $M = (x, y)$ est un point et $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul, la droite passant par M et engendrée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x + t\alpha, y + t\beta)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$ il faut ajouter à chaque fois une troisième coordonnée z, γ et $z + t\gamma$. On rappelle qu'une droite est déterminée par un vecteur directeur et un point par lequel elle passe.

Proposition 5.1.2. *Soient $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $A = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et a un réel. L'ensemble des points M vérifiant $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = a$ est une droite $\mathcal{D}'$ perpendiculaire à $\vec{u}$. Plus précisément, si $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on note A' le point de $\mathcal{D}$ donné par la valeur*

$$t = \frac{a - x\alpha - y\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Alors $\mathcal{D}'$ est la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par A'.

Pour $\mathbb{R}^3$, on commence par rappeler qu'un plan définit aussi une direction (une "droite") perpendiculaire. Réciproquement, une droite dans $\mathbb{R}^3$ définit aussi "un" plan perpendiculaire [1].

Proposition 5.1.3. *Soient $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $A = (x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et a un réel. L'ensemble des points M vérifiant $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = a$ est un plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\vec{u}$. Plus précisément, si $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on note A' le point de $\mathcal{D}$ donné par la valeur*

$$t = \frac{a - x\alpha - y\beta - z\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + ga^2}.$$

Alors $\mathcal{P}$ est le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par A'.

L'espace $\mathbb{R}^n$

Un point de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où les x_i sont des réels.

5.2 Graphe. Dérivées partielles. Sous-espace tangent

5.2.1 Motivations

En physique, thermodynamique, biologie, etc, les fonctions qui apparaissent seront presque toutes des fonctions de plusieurs variables. Nous avons vu précédemment comment le calcul différentiel permet d'obtenir des informations sur les fonctions d'une seule variable réelle

Le but de ce chapitre est donc de construire et d'utiliser les mêmes outils et méthodes mais pour des fonctions de plusieurs variables réelles. La difficulté est accrue, surtout du fait que la géométrie dans une droite est beaucoup plus simple que la géométrie dans un plan ou dans l'espace.

1. En fait il y a une infinité de plan tous parallèles qui ont cette droite comme perpendiculaire.

5.2.2 Graphe d'une application de plusieurs variables

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, elle s'écrira $f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots y_p)$. Chaque coordonnée y_j sera une fonction à valeurs réelles de n variables

$$y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Définition 5.2.1. *On appelle graphe de l'application f l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n+p}$ de la forme $(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_p)$.*

Exemple. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on retrouve le graphe déjà vu dans la définition 3.1.2. Si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, le graphe est une surface (ou une nappe) dans $\mathbb{R}^3$.

Comme on peut étudier une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ en étudiant chacune de ses p-coordonnées images $(y_1, \ldots, y_p)$, on va se restreindre au cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
En outre, nous nous restreindrons aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Le cas plus général se déduit assez facilement du cas $\mathbb{R}^3$.

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, une courbe de niveau a est l'intersection du graphe avec le plan d'équation $z = a$.

5.2.3 Définitions des dérivées partielles. Différentielle

Par soucis de simplicité nous allons essentiellement nous contenter des fonctions de 2 ou 3 variables réelles. Si $f(x, y)$ est une fonction en x et y et si on gèle la variable y (on la considère comme une constante), on récupère juste une fonction "classique" $x \mapsto f(x, y)$. Si on peut dériver cette fonction, la dérivée se note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Elle s'appelle *dérivée partielle première par rapport à x*. En gelant la variable x et en dérivant par rapport à y on aura alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (qui s'appelle donc la dérivée partielle première par rapport à y). Souvent on oubliera de signifier qu'il s'agit des dérivées premières.

Exemple. Soit $f(x, y) = x^2 + y\sin(x) + y^7$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y\cos x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x) + 7y^6$.
Il faut faire attention, les x et les y n'ont pas tous la même signification. Les notations sont assez ambigües, mais avec l'habitude et un peu de réflexion, on ne se trompe pas : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la fonction de 2 variables, X et Y telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) = 2X + Y\cos(X).$$

Définition 5.2.2 (Cas de deux variables)**.** *On appelle différentielle de f au point (X, Y), et on la note $df_{(X,Y)}$ la fonction*

$$df_{(X,Y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(X, Y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(X, Y)dy,$$

définie par $df_{(X,Y)}(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X,Y).h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X,Y).k.$
On appelle alors différentielle de f*, l'application* $(X,Y) \mapsto df_{(X,Y)}$.

On notera parfois $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, mais on fera attention de ne pas confondre cette fonction avec la quantité $df_{(X,Y)}(h,k) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X,Y).h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X,Y).k.$

Exemple. La différentielle de la fonction donnée par $f(x,y) = x^2 + y\sin(x) + y^7$ est $df = (2x + y\cos x)dx + (\sin(x) + 7y^6)dy$.

Définition 5.2.3 (Cas de trois variables)**.** *On appelle différentielle de* f *au point* (X,Y,Z)*, et on la note* $df_{(X,Y,Z)}$ *la fonction*

$$df_{(X,Y,Z)} = \frac{\partial f}{\partial x}(X,Y,Z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y,Z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(X,Y,Z)dz,$$

définie par $df_{(X,Y,Z)}(h,k,l) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X,Y).h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X,Y).k + \dfrac{\partial f}{\partial z}(X,Y,Z)l.$
On appelle alors différentielle de f*, l'application* $(X,Y,Z) \mapsto df_{(X,Y,Z)}$.

5.2.4 Lien entre différentielle et dérivée. Retour sur la tangente

Donnons nous une application de une variable à valeur dans $\mathbb{R}$. On peut aussi vouloir déterminer la différentielle de f en un point x. La définition s'adapte, la dérivée partielle en x sera, dans ce cas la dérivée $f'(x)$. Donc la différentielle est l'application définie par

$$df_x h \mapsto f'(x).h.$$

On avait dit que la tangente donne la meilleure approximation affine de f au voisinage de x.

$$f(x+\varepsilon) \sim f(x) + f'(x).\varepsilon.$$

Dans le cas de deux ou trois variables, la différentielle permet aussi de trouver une approximation affine localement. Supposons que f soit une fonction de x et de y, Si au point (X,Y) on commet une petite erreur $(\Delta x, \Delta y)$ on aura alors

$$\begin{aligned} f(X+\Delta x, Y+\Delta y) - f(X,Y) &\sim df_{(X,Y)}(\Delta X, \Delta Y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)\Delta y. \end{aligned}$$

Définition 5.2.4. *Soit* f *une fonction de deux variables différentiable sur un ouvert* $U \subset \mathbb{R}^2$*. Soit* $\mathcal{S}$ *la graphe de* f [2]

On appelle plan tangent à $\mathcal{S}$ *en* (x_0,y_0) *le plan d'équation*

$$(X-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (Y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - (Z - f(x_0,y_0)) = 0.$$

2. C'est donc une surface donnée par les points de la forme $(x,y,f(x,y))$.

Exemple d'application. Un triangle a 2 côtés b et c de longueur $b = 10cm$ et $c = 20cm$. L'angle A est $\frac{\pi}{3}$. La surface est donnée par $S = \frac{1}{2}bc\sin A$. Cela donne une surface de $86,6cm^2$. Si b et c restent fixes, mais qu'on commet une petite erreur sur A, Δa, en première approximation, la surface va varier d'une quantité $\frac{\partial S}{\partial A}.\Delta a$ (soit environ $0,87\Delta a$).

Pour reprendre l'exemple précédent, si on commet aussi une erreur Δb et Δc sur les mesures de b et c, l'erreur globale sera de l'ordre de

...

Définition 5.2.5 (Cas de 3 variables)**.** *Soit f une fonction de deux variables différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{G}$ la graphe de f* [3]

On appelle espace tangent à $\mathcal{G}$ en (x_0, y_0, z_0) l'hyperplan d'équation

$$(X-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(Y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(Z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)-(T-f(x_0,y_0,z_0)) = 0.$$

5.2.5 Gradient. Différentielles totales. Champs de vecteurs

Différentielle totale

Comme nous l'avons vu, la différentielle d'une fonction s'écrit sous la forme $df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ où P et Q sontles dérivées partielles premières. Réciproquement, étant donné une forme $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, peut-on trouver une fonction f telle que ω soit la différentielle de cette fonction ?

Le théorème suivant donne une réponse :

Théorème 5.2.6. *La forme $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec P et Q deux fonctions qui admettent des dérivées premières continues est la différentielle d'une fonction f si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*
Si P, Q et R sont des fonctions de 3 variables, x, y, et z, admettant chacune des dérivées premières continues, la forme $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ est la différentielle d'une fonction de trois variables x y et z si et seulement si

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

On dit alors que la forme ω est une différentielle totale (ou encore qu'elle est exacte).

Lorsqu'on a montré que la forme ω était exacte, on peut chercher la fonction f dont elle est la différentielle. Il s'agit ici d'une sorte de recherche de primitive, et tout comme dans le cas d'une variable, on ne trouvera la solution que modulo une constante (additive). Néanmoins le problème revient à chercher une fonction f vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \text{ (et éventuellement } \frac{\partial f}{\partial z} = R).$$

Exemple. La forme $\omega = \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy$ est exacte. C'est la différentielle de la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y).$$

3. C'est donc une *hyper-surface* donnée par les points de la forme $(x, y, z, f(x, y, z))$.

Exemple. On cherche une fonction $h(z)$ telle que $\omega = h(z)(2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz)$ soit exacte. Posons $P(x,y,z) = 2h(z)xz$, $Q(x,y,z) = -2h(z)yz$ et $R(x,y,z) = -(x^2 - y^2)h(z)$. Les conditions de Schwarz vont donner

$$2xh(z) + 2xzh'(z) = -2xh(z),\ 0 = 0,\ -2yh(z) - 2yzh'(z) = 2yh(z).$$

Ceci donne comme équation $h'(z) - 2\frac{1}{z}h(z) = 0$, ce qui donne $h(z) = \frac{1}{z^2} + Cste$. Admettons que les conditions aux limites nous permettent de fixer la constante à 0. La forme $\omega = \dfrac{1}{z^2}(2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz)$ est la différentielle d'une fonction f. On doit donc avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xz}{z^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2yz}{z^2},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y^2 - x^2}{z^2}.$$

En intégrant la dernière relation on trouve $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z} + g(x,y)$, où g est une certaine fonction inconnue qui joue le rôle de la constante dans l'intégration à une variable. Si on dérive cette dernière égalité par rapport à x et y on trouve $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$. Ainsi la fonction f est la fonction

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{z}.$$

Gradient

Considérons une application de deux variables $f(x,y)$ différentiable. On a vu que qu'en un point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ le plan tangent est donné par l'équation

$$(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - (Z - f(x_0,y_0)) = 0.$$

Il s'agit bien de l'équation d'un plan puisque cette équation est équivalente à

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)X + Y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - Z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0 - f(x_0,y_0)).$$

Ce plan est orthogonal à la direction $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1)$. On voit donc apparaître un vecteur particulier, dans $\mathbb{R}^2$:

Définition 5.2.7. *Si f dépend de 2 variables, x et y, le vecteur gradient au point (x_0,y_0) est le vecteur $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))$.*

Si f dépend de 3 variables, x, y et z, le vecteur gradient au point (x_0,y_0,z_0) est le vecteur $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0))$.

On le note (dans tous les cas) $\overrightarrow{Grad}(f)(x_0,y_0,\ldots)$

Champs de vecteurs (et rotationnel ?)

Se donner un champ de vecteurs dans le plan ou dans l'espace, c'est se donner en chaque point un vecteur dont les coordonnées dépendent des coordonnées du point :

$$V(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}.$$

La question qu'on se pose généralement en physique, c'est de savoir si ce champ de vecteur dérive d'un potentiel (cela intervient par exemple en mécanique des fluides...). On cherche donc une fonction f (ici de trois variables) telle que $V(M) = \overrightarrow{\text{Grad}}(f)(M)$. Il s'agit en fait du même problème que celui de la différentielle totale :

> Le champ de vecteur $V(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ dérive d'un potentiel si et seulement si la forme $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ est exacte. On aura alors $V = \overrightarrow{\text{Grad}}(f)$ où f est une fonction telle que $df = \omega$.

5.3 Courbes de niveau. Théorème de la fonction implicite (cas de deux variables)

5.3.1 Exemples de courbes de niveau

On rencontre aussi des fonctions de plusieurs variables appelées équipotentielles. Lorsqu'on émet un champs électrique ou magnétique, etc. En géographie, les équipotentielles sont parfois appelées courbes de niveau sur une carte. Elles représentent les points situés à une même altitude, et donc ayant la même énergie potentielle. Une telle courbe se représente souvent par la formule

$$f(x,y) = a,$$

où a représente le potentiel. Inversement, si on a une équation du type $f(x,y) = 0$, peut-on être sûr-e que cela représente une courbe ? Si on dispose d'une famille de courbes de ce type, $f_z(x,y) = a(z)$, peut-on être sûr-e que ces courbes sont toutes les équipotentielles d'un même phénomène ?

Exemple 1 $y - x^2 = 0$**.**

On sait que cela représente une parabole :

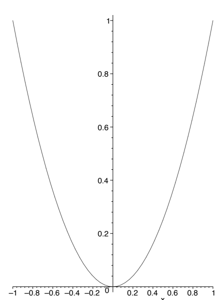

FIGURE 5.1 – $y = x^2$

C'est donc bien une courbe, et on peut facilement écrire y en fonction de x.

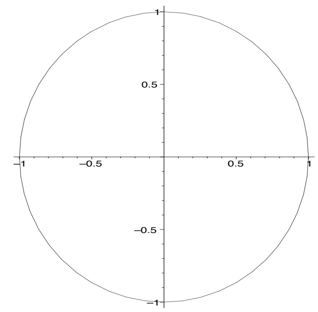

FIGURE 5.2 – $y^2 + x^2 = 1$

Exemple 2 $x^2 + y^2 = 1$**.**

On sait que cela représente le cercle de centre 0 et de rayon 1 :

Pourtant il n'est pas facile d'écrire y en fonction de x. Bien sûr on peut avoir pour (x, y) dans le quadrant supérieur droit, $y = \sqrt{1 - x^2}$ mais au voisinage du point $(1, 0)$ il est impossible d'écrire y en fonction de x. Cependant on peut écrire x en fonction de y ($x = \sqrt{1 - y^2}$).

5.3.2 Théorème de la fonction implicite. Retour sur le gradient.

L'objectif est de trouver une condition suffisante (et non pas nécessaire) pour être sûr-e qu'une équation du type $f(x, y) = 0$ donne une courbe. Le théorème donne une condition locale :

Théorème 5.3.1. *Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables réelles. Si au point (X, Y) la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(X, Y)$ n'est pas nulle, alors, il existe une application ϕ, définie sur un voisinage $]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$, telle que $\phi(X) = Y$ et pour tout u dans $]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$, $f(u, \phi(u)) = f(X, Y)$. De plus ϕ est dérivable et $\phi'(u) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(u, v)}{\frac{\partial f}{\partial y}(u, v)}$.*

En d'autres termes,

Exemple. l'équation $x^2 + y\sin(x) + y^7 = 3$ définit-elle une courbe ? On pose $g(x, y) = x^2 + y\sin(x) + y^7 - 3$ et on calcule $\frac{\partial g}{\partial y}$. on trouve

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \sin(x) + 7y^6.$$

le point $M = (0, \sqrt[7]{3})$ vérifie l'équation, et en ce point la dérivée partielle en y n'est pas nulle. Donc on peut trouver un petit voisinage $] - \varepsilon, \varepsilon[$ et une fonction ϕ telle que dans la boule $B(M, \varepsilon)$ l'équation définit une courbe d'équation $y = \phi(x)$.

Ce théorème porte bien son nom ; la fonction ϕ est implicite ce qui signifie qu'elle est donnée par l'équation mais qu'elle est cachée (c'est à dire pas facilement calculable).

Définition 5.3.2. *Soit f une fonction de 2 variables. Le point $M = (X, Y)$ est dit point critique de la fonction si la différentielle df_M est l'application nulle. Un point qui n'est pas critique est dit régulier.*

Les points critiques jouent le même rôle que les points où la dérivée s'annule pour les fonction d'une variable réelle. La définition stipule qu'un point est critique si et seulement si toutes les dérivées partielles s'annulent en ce point.

Exemple. Pour la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, le seul point critique est le point de coordonnées $(0, 0)$.

L'intérêt de cette définition, est qu'il permet de reformuler le théorème de la fonction implicite :

L'équation $f(x, y) = a$ définit une courbe en dehors de ses points critiques. Cette courbe est éventuellement vide.

Considérons donc une courbe de niveau donnée par $f(x, y) = 0$. Prenons un point $M = (X, Y)$ qui soit régulier. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(M) \neq 0$, on peut localement écrire cette courbe sous la forme $y = \phi(x)$, avec $Y = \phi(X)$ et $\phi'(X) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)}$. La tangente à la courbe au point M a pour équation
$$y = \phi'(X)(x - X) + Y,$$
ce qui s'écrit aussi $(x-X)\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) + (y-Y)\frac{\partial f}{\partial y}(X, Y) = 0$. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$, on doit alors avoir $\frac{\partial f}{\partial x}(M) \neq 0$ (car M est régulier) et donc a courbe s'écrit localement $x = \psi(y)$, avec $X = \psi(Y)$ et $\psi'(Y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(X,Y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(X,Y)}$. Une fois encore la tangente à la courbe en M aura pour équation :
$$(x - X)\frac{\partial f}{\partial x}(X, Y) + (y - Y)\frac{\partial f}{\partial y}(X, Y) = 0.$$
On peut interpréter cette quantité comme un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. On a déduit :

Théorème 5.3.3 (et définition)**.** *Soit f une fonction de 2 variables. la courbe d'équation $f(x, y) = \alpha$ a une tangente en chacun de ses points (x_0, y_0) qui n'est pas critique. Elle est perpendiculaire au gradient $\overrightarrow{Grad}(f)(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$. L'équation de la tangente est alors*
$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Exemple. Une particule électrique q génère un champ électrique $\overrightarrow{E}$. On sait que ce champ dérive d'un potentiel, c'est à dire que le vecteur $\overrightarrow{E}(x, y)$ est la gradient du potentiel $V(x, y)$. On sait aussi que chaque équipotentielle, c'est à dire chaque courbe d'équation $V(x, y) = Cste$ est un cercle centré au point q. Le champ électrique est donc perpendiculaire aux équipotentielles, c'est à dire radial.

5.4 Exercices.

Exercice 31
Calculer les dérivées partielles premières et former les différentielles des fonctions suivantes :
1/ $u(x,y,z) = xy^2z^3$.
2/ $u(x,y) = x^2\cos(2y-3xy)$.
3/ $u(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exercice 32
Deux côtés d'un gâteau triangulaire ont pour longueur 63 et 78 cm. L'angle correspondant vaut 60 degrés. les erreurs maximales commises sont de 2mm pour chaque côté et 1 degré pour l'angle. Trouver une estimation de l'erreur commise sur la surface du triangle (=gâteau).

Exercice 33
La densité d'un corps est donnée par la formule $d = \dfrac{A}{A-P}$, où A est le poids dans l'air et P celui dans l'eau. Calculer d et l'erreur commise lorsque $A = 9kg$, $P = 6kg$ et l'erreur commise sur chaque mesure est au plus de 10g.

Exercice 34

1/ On rappelle que l'équation cartésienne d'une ellipse est donnée par $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Donner l'équation de la tangent à une ellipse en un point (x_0,y_0).
2/ Même question avec une hyperbole d'équation cartésienne est $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 35
Trouver toutes les fonctions de 2 variables vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 36
Montrer que les fonctions de la forme $u(x,y) = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ avec f suffisamment régulière, vérifient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

Exercice 37
On cherche les solutions de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$.
1/ En posant $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, trouver une équation vérifée par F.
2/ En déduire une expression F puis de f.

Exercice 38

1/ Dire si le champ de vecteurs $(2x+y+z)\overrightarrow{i} + (x+2y+z)\overrightarrow{j} + (x+y+2z)\overrightarrow{k}$ dérive

d'un potentiel. Le calculer le cas échéant.
2/ Même question avec $\ln y \overrightarrow{i} - \ln x \overrightarrow{j}$.

Chapitre 6

Intégrale double

6.1 Définition de l'intégrale double.

6.1.1 Intégrale double sur un pavé.

On considère une foncion de deux variables, $f(x, y)$, définie pour $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$. On souhaite donner un sens à

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Gelons la variable x. La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue (au moins par morceaux) sur $[c, d]$ et on peut calculer son intégrale $\int_c^d f(x, y) dy$. Dans cette intégrale la variable y n'intervient plus (c'est une variable muette) ; on a en effet

$$\int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f(x, \xi) d\xi.$$

Ceci définit une fonction en x, $x \mapsto \int_c^d f(x, \xi) d\xi$. On admettra que cette fonction est encore continue (au moins par morceaux) sur $[a, b]$. On peut donc en calculer son intégrale, ce qui définit $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$.

On peut de même calculer l'intégrale double $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$, en calculant d'abord l'intégrale $\int_a^b f(x, y) dx$, puis en calculant l'intégrale sur le segment $[c, d]$ de cette fonction en y.

On notera donc l'importance et du sens des bornes $\int_a^b$ et $\int_c^d$ et du sens de dx et dy. Il faut raisonner comme pour les parenthèses successives : l'ouverture se fait en $\int_\alpha^\beta$, et la fermeture se fait avec le $d\xi$ associé à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. De plus les "parenthèses" sont emboîtées et ne s'enjambent pas. Cependant nous avons un théorème très pratique :

Théorème 6.1.1 (Fubini)**.** *Si f est continue par morceaux, alors* $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx =$

$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$

Ce théorème signifie que le sens de l'intégration ne compte pas, on obtient dans les 2 méthodes le même résultat. Ceci donne alors un sens à la notation

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy,$$

qui précise que la première variable vit dans l'intervalle $[a,b]$ et la seconde dans l'intervalle $[c,d]$.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{3}}\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{\pi}{3}+y) - \sin y\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{\pi}{3}+y)\, dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy \\
&= \left[\cos(\frac{\pi}{3}+y)\right]_{\frac{\pi}{2}}^0 - [\cos(y)]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\
&= \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{6} - \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

De même, le calcul en inversant le sens d'intégration donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\frac{\pi}{2}+y) - \sin y\, dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\frac{\pi}{2}+y)\, dy - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y\, dy \\
&= \left[\cos(\frac{\pi}{2}+y)\right]_{\frac{\pi}{3}}^0 - [\cos(y)]_{\frac{\pi}{3}}^0 \\
&= \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{5\pi}{6} - \cos 0 + \cos\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Il faut néanmoins retenir l'idée que si les 2 calculs donnent le résultat, parfois l'un est plus facile ou astucieux que l'autre. Ainsi l'intégrale $\iint_D e^{x^2}dxdy$ où D est le domaine défini par $0 \leq y \leq x \leq 1$ se calcule plus facilement dans un sens que dans l'autre.

En effet ,l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2}dx$ se calcule difficilement car on ne connaît par de primitive à

$x \mapsto e^{x^2}$. Faisons donc l'intégration dans l'autre sens. À x fixé, y est dans l'intervalle $[0,x]$ et donc on doit calculer $\displaystyle\int_0^x e^{x^2}dy$. Cela donne

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x^2}dxdy &= \int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx \\ &= \int_0^1 xe^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

6.1.2 Calcul de surface et de volumes.

le théorème de Fubini s'interprète d'une façon géométrique. Tout comme l'intégrale simple est un calcul de surface, l'intégrale double est un calcul de volume. Prenons l'exemple simple de la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]^2}$. Son graphe se représente dans $\mathbb{R}^3$ comme étant le nappe valant 1 si le point de base (x,y) est dans le carré, 0 ailleurs. Pour y fixé, faire $\displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)dx$, c'est calculer la surface entre la nappe et le plan $Z=0$, restreinte au plan $Y=y$. Lorsqu'on intègre cette valeur selon y, on calcule bien le volume du cube. Inversement si on intègre d'abord en y pour x fixé, on calcule la surface d'une tranche puis on somme sur toutes les tranches lorsqu'on intègre par rapport à x. Une intégrale double est donc un calcul de volume, et le volume final est le même, que l'on calcule par tranche ou par pile.

Calcul d'une surface d'un domaine.

Si on se donne un domaine "simple", noté D, on peut utiliser les intégrales doubles pour calculer sa surface. La fonction $\mathbb{1}_D$ est continue par morceaux, et l'intégrale $\displaystyle\iint_D \mathbb{1}_D dxdy$ représente le volume compris entre le plan $Z=0$ et le graphe de la fonction. Ce volume a en fait la même valeur algébrique que la surface du domaine, car la "hauteur" est nulle en dehors de D et constante égale à 1 sur D. Ainsi

$$Surface(D) = \iint_D \mathbb{1}_D dxdy.$$

Exemple. Considérons une fonction d'une variable réelle, $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a,b]$. On sait que la surface comprise entre l'axe des X et le graphe de f est $\int_a^b f(t)dt$. Quitte à changer f en $f+C$, pour une bonne constante, on peut supposer que f est positive. La surface définie un domaine D donné par $D=\{(x,y), a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$. Ainsi

$$\iint_D \mathbb{1}_D(x,y)dxdy = \int_a^b\int_0^{f(x)} 1\,dydx = \int_a^b f(x)dx.$$

On retrouve le résultat de l'année dernière.

Calcul du volume d'un sphère.

La sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=r^2$, a un volume double de a demie-sphère supérieure ($z \geq 0$). Si z est positif, on a donc $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ lorsque (x,y,z) est sur la sphère. Posons $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, définie sur le disque $\mathbb{D}$ d'équation $x^2+y^2 \leq r^2$. L'intégrale double de cette fonction représente le volume compris entre son graphe et le plan $Z=0$, c'est à dire le volume de la demie-sphère. Le volume de la sphère est donc

$$V = 2\iint_{\mathbb{D}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}dxdy.$$

Cette intégrale s'écrit aussi $2.\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-y^2-x^2}dxdy$. Effectuons le changement de variable $x=\sqrt{r^2-y^2}\sin\theta$. On trouve

$$\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-y^2-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r^2-y^2)(1-\sin^2\theta)}\sqrt{r^2-y^2}\cos\theta d\theta.$$

Pour θ dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\cos\theta$ est positif, et $\cos^2\theta$ vaut $\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$; donc l'intégrale de droite vaut $(r^2-y^2)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = (r^2-y^2).\frac{\pi}{2}$. On trouve donc pour le volume

$$V = 2\frac{\pi}{2}\int_{-r}^{r} r^2-y^2dy = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

6.2 Changement de variables : coordonnées polaires

Le calcul précédent a été un peu compliqué car il a fallut faire un changement de variable astucieux. Ce changement s'est fait pour une variable réelle, mais on peut se demander s'il est possible de faire un changement sur les 2 variables réelles en même temps. Ainsi, un point de coordonnées cartésiennes (x,y) peut aussi être vu avec les coordonnées polaires (ρ,θ), définies par la relation

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$$

Dans une intégrale double, $dxdy$ peut être vu comme l'élément de surface élémentaire. Il est obtenu comme le pavé dont les côtés sont les 2 éléments de longueur élémentaire dx et dy. Si on regarde le même élément d'aire élémentaire, mais d'un point de vu polaire, un petit changement $d\rho$ et $d\theta$ créé un trapèze de côtés $d\rho$ et $\rho d\theta$, de surface élémentaire $\rho d\rho d\theta$. Ainsi on s'attendrait à avoir

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta,$$

où $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ et Δ est le domaine décrit par les coordonnées polaires lorsque le point (x,y) décrit D. En écrivant les coordonnées cartésiennes comme fonctions des coordonnées polaires on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta.$$

On "remarque" alors que le terme $\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial x}{\partial \theta}$ vaut ρ. Dans le cas d'un changement de variable réelle, la formule était

$$\int_{[a,b]} f \circ g(t) g'(t) dt = \int_{[c,d]} f(u) du.$$

Dans le cas présent, le rôle de l'intervalle $[c, d]$ est joué par D et celui de l'intervalle $[a, b]$ est joué par le domaine Δ ; de même le $g'(t)$ es tici remplacé par le ρ que l'on vient de calculé et on remplace après simplement $dxdy$ par $d\rho d\theta$ (pour retrouver approximativement le $dxdy = \rho d\rho d\theta$).

Exemple. On veut calculer $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}$ avec D le quart de disque $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq x^2 + y^2 + 1$. Le changement en polaires donne comme domaine Δ l'ensemble $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$. On a donc

$$I = \iint_\Delta \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\theta d\rho,$$

qui se calcule facilement.

Chapitre 7

Équations différentielles

7.1 Équations différentielles homogènes

7.1.1 Équation $y' - ay = 0$

Soit a dans $\mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle

$$y' - ay = 0 \tag{7.1}$$

est une fonction dérivable f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on cherche généralement le plus grand intervalle possible) telle que **pour tout x de I**,

$$f'(x) - af(x) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle, c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation. On constate facilement que la fonction nulle (qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe 0) est solution de (7.1) mais il y a aussi la fonction $f : x \mapsto e^{ax}$. Cette fonction est en effet dérivable (comme exponentielle) et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$.

Théorème 7.1.1. *Les solutions de $y' - ay = 0$ sont les fonctions $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.*

Ce théorème signifie 2 choses : toutes les fonctions du type $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$ sont solutions de (7.1) et il n'y en a pas d'autres ! Nous allons donner la preuve de ce théorème car elle utilise ce qui est quasiment la seule méthode presque systématique pour trouver les solutions d'une équation différentielle.

Démonstration. Notons $u(x) = e^{ax}$. Nous avons vu que u était solution de l'équation. De plus elle ne s'annule jamais. Enfin, les formules de dérivations montrent que pour tout réel λ,

$$(\lambda.u)'(x) = \lambda.u'(x) = \lambda.a.u(x),$$

ce qui montrer que toute fonction du type $f(x) = \lambda.u(x)$ est solution de l'équation différentielle.

Réciproquement considérons une solution de l'équation f et posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{u(x)} =$

$f(x)e^{-ax}$ (ce qui est possible car u ne s'annule jamais). La fonction g est dérivable comme rapport de 2 fonctions dérivables et on a

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = e^{-ax}(f'(x) - af(x)).$$

Comme f est solution de (7.1), on obtient, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = 0$, ce qui signifie que g est une fonction constante. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(0)e^{ax},$$

ce qui signifie que f est du type annoncé. □

Cette méthode s'appelle *la méthode de la variation de la constante*, puisque l'idée est de démontrer que la constante en est bien une en montrant que sa dérivée est nulle.

Exemple. Résoudre $y' - 3y = 0$. Trouver la solution qui vaut 1 en 0.
Les solution de cette équation sont du type $f(x) = \lambda e^{3x}$. Si $f(0) = 1$, on doit donc avoir

$$\lambda = \lambda.e^{3\times 0} = 1,$$

ce qui signifie qu'il n'y a qu'une seule solution au problème compte-tenu des contraintes ; c'est la fonction définie par $f(x) = e^{3x}$.

7.1.2 Équation $y'' + ay = 0$.

Soit a dans $\mathbb{R}$. Une solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay = 0 \tag{7.2}$$

est une fonction 2 fois dérivable f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on cherche généralement le plus grand intervalle possible) telle que **pour tout x de I**,

$$f''(x) + af(x) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle, c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation. On constate facilement que la fonction nulle (qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe 0) est solution de (7.2).

Exemples
Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont des solutions de l'équation

$$y'' - y = 0,$$

puisqu'elles sont égales à leur dérivée seconde.
Comme $\sin'' = -\sin$ et $\cos'' = -\cos$, sinus et cosinus sont solutions de

$$y'' + y = 0.$$

Lemme 7.1.2. *Si u et v sont deux solutions de $y'' + ay = 0$ (définies sur un même intervalle), alors la fonction $x \mapsto u'(x)v(x) - v'(x)u(x)$ est constante.*

Démonstration. La fonction introduite s'appelle le Wronskien. Nous n'en ferons pas la théorie générale mais il suffit (faut ?) de se souvenir que cela s'étend à d'autre type d'équations différentielles et que c'est un outil pratique.
Posons $h = u'v - v'u$; h est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et on trouve

$$h'(x) = u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - v'(x)u(x) - v''(x)u(x).$$

On remplace alors u'' et v'' par $-au$ et $-av$, ce qui montre que h' est nulle, donc h est constante. □

Proposition 7.1.3. *Soient u et v deux solutions de $y'' + ay = 0$ telles que $h := u'v - v'u$ ne soit pas la fonction nulle. Alors les solutions de $y'' + ay = 0$ sont les fonctions du type $f = \lambda u + \mu v$, où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La fonction h est constante et n'est pas nulle ; Notons donc k sa valeur. On montre facilement que toute fonction du type $f = \lambda u + \mu v$ est solution de $y'' + ay = 0$. Réciproquement, soit f solution de cette équation différentielle. Le lemme précédent montre qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout x de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u'(x)f(x) - f'(x)u(x) &= \alpha, \\ v'(x)f(x) - v(x - f'(x) &= \beta. \end{aligned}$$

En multipliant la première égalité par $v(x)$ et la seconde par $u(x)$, puis en soustrayant on obtient pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))f(x) = \alpha v(x) - \beta u(x),$$

ce qui s'écrit aussi, compte-teu du fait que h est constante et vaut k,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{-\beta}{k}u(x) + \frac{-\alpha}{k}v(x).$$

□

Théorème 7.1.4. *Soit a dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si $a = 0$, les solutions de $y'' + ay = 0$ sont les fonctions du type $x \mapsto \lambda x + \mu$.*
2. *Si $a > 0$, les solutions de $y'' + ay = 0$ sont les fonctions du type $x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{a}x) + \mu \sin(\sqrt{a}x)$.*
3. *Si $a < 0$, les solutions de $y'' + ay = 0$ sont les fonctions du type $x \mapsto \lambda e^{(\sqrt{|a|}x)} + \mu e^{(-\sqrt{|a|}x)}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier pour chaque cas que le h associé n'est pas nul et d'utiliser la proposition précédente. □

Exemple. Un mobile est accroché à un ressort horizontal de raideur $k > 0$. On note x son abscisse, avec comme origine la position de repos (le ressort n'est ni étiré ni contracté). On tire le ressort pour placer le mobile en position $x = l$ et on le lache. On cherche l'équation du mouvement.

Le mobile ne subit (horizontalement) que la force de rappel du ressort $-kx$. Le principe de la dynamique donne donc

$$mx''(t) = -kx(t),$$

ce qui signifie que la fonction x est solution de $y'' + ay = 0$ avec $a = \frac{k}{m}$. Donc x s'écrit

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t),$$

en posant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Il reste à déterminer λ et μ :
Pour $t = 0$ on a $x(0) = l$ et $x'(0) = 0$, ce qui donne $\lambda = l$ et $\mu = 0$. Ainsi l'équation du mouvement est

$$x(t) = l \cos(\omega t).$$

7.1.3 Équation $y'' + py' + qy = 0$.

Soient p et q deux réels. Une solution de l'équation différentielle

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7.3}$$

est une fonction 2 fois dérivable f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on cherche généralement le plus grand intervalle possible) telle que **pour tout** x **de** I,

$$f''(x) + pf'(x) + qf(x) = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle, c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation. On constate facilement que la fonction nulle (qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe 0) est solution de (7.3). comme nous avons déjà traité le cas $p = 0$ on suppose dans toute la suite que p n'est pas nul.
On pose Soit $R(X) = X^2 + pX + q$, et on l'appelle polynôme caractéristique de l'équation (7.3). On a alors $\Delta = p^2 - 4q$ et on pose $\delta = \sqrt{|\Delta|}$.

Théorème 7.1.5. *Avec les notations précédentes,*

1. *Si Δ est > 0, P a alors deux racines distinctes $r = \frac{-p-\delta}{2}$ et $s = \frac{-p+\delta}{2}$, et les solutions de (7.3) sont les fonctions du type $x \mapsto \lambda . e^{rx} + \mu . e^{sx}$.*
2. *Si $\Delta = 0$, P n'a qu'une seule racine, $r = \frac{-p}{2}$ et les solutions de (7.3) sont les fonctions du type $x \mapsto (\lambda . x + \mu) e^{rx}$.*
3. *Si Δ est < 0, P n'a alors aucune racine (dans $\mathbb{R}$) ; on pose $r = \frac{-p}{2}$ et les solutions de (7.3) sont les fonctions du type $x \mapsto e^{rx}(\lambda \cos(\frac{\delta}{2}x) + \mu . \sin(\frac{\delta}{2}x))$.*

Démonstration. Posons $a = \frac{-p}{2}$. Pour f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ on pose $g(x) = f(x)e^{-ax}$. La fonction g est deux fois dérivable et on trouve

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-ax}(f'x) - af(x)) \\ g''(x) &= e^{-ax}(f''(x) - af'(x) - af'(x) + a^2 f(x)) \\ \text{d'où } g''(x) &= e^{-ax}(f''(x) + pf'(x) + a^2 f(x)) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que g est solution de

$$y'' - \frac{\Delta}{4} y = 0 \tag{7.4}$$

si et seulement si f est solution de

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (7.3)$$

puisque $a^2 - \frac{\Delta}{4} = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$. On utilise alors le théorème 7.1.4 pour conclure. □

Exemple. Nous reprenons l'exemple du mobile, mais nous supposons en outre qu'il subit une force de frottement de l'air. Cette force est proportionnelle à sa vitesse. L'équation du mouvement est donc

$$mx'' = -kx - rx',$$

avec $r > 0$ puisque la force de frottement s'oppose au mouvement. En posant encore $\omega^2 = \frac{k}{m}$ et $p = \frac{r}{m}$ le polynôme caractéristique de l'équation du mouvement est

$$R(X) = X^2 + pX + \omega^2,$$

dont le discriminant vaut $\Delta = p^2 - 4\omega^2 = (p - 2\omega)(p + 2\omega)$. Il faut donc discuter en fonction de la valeur de Δ.
Si $p > 2\omega$, alors $\Delta > 0$ et l'équation du mouvement est du type

$$x(t) = \lambda.e^{\frac{-p-\delta}{2}t} + \mu.e^{\frac{-p+\delta}{2}t}.$$

Si $p = 2\omega$, alors $\Delta = 0$ et l'équation du mouvement est du type

$$x(t) = e^{\frac{-p}{2}t}(\lambda t + \mu).$$

Si $p < 2\omega$, alors $\Delta < 0$ et l'équation du mouvement est du type

$$x(t) = e^{\frac{-p}{2}t}(\lambda \cos(\frac{\delta}{2}t) + \mu \sin(\frac{\delta}{2}t)).$$

Ici s'achève la partie mathématique de la résolution ; ce sont les conditions physiques qui aideront à déterminer la solution dans chacun des 3 cas.

7.2 Équations non-homogènes

7.2.1 équation du type $y' - ay = F$

On considère toujours a dans $\mathbb{R}$ et on se donne une fonction F continue définie sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$). On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y' - ay = F \tag{7.5}$$

c'est à dire qu'on souhaite trouver toutes les solutions de cette équation.
On commence par remarque que si f et g sont deux solutions alors $f - g$ est solution de *l'équation linéaire homogène associée* (7.1), ce qui signifie que $f - g$ est du type $x \mapsto \lambda.e^{ax}$.

Réciproquement, si f est *une* solution de (7.5) et si g est une solution de (7.1), alors $f+g$ est encore solution de (7.5) :

$$(f+g)' - a(f+g) = f' - af + g' - ag = F + 0 = F.$$

On retiendra donc la règle : une solution générale de (7.5) sécrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation et d'une solution générale de l'équation homogène associée $y' - ay = 0$.

> Soit f *une* solution particulière de $y' - ay = F$. Alors, l'ensemble solution de l'équation $y' - ay = F$ est l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto f(x) + \lambda.e^{ax}$

Exemple. Un parachutiste subit la force dûe au poid et une force de résitence proportionnelle à sa vitesse. L'équation est donc

$$mz''(t) = mg - Kz',$$

ce qui donne comme équation différentielle $y' - ay = g$ où $a = -K/m$ et g est une constante. Une solution générale de l'équation homogène associée est $y(t) = \lambda.e^{-Kt/m}$ et une solution particulière de l'équation est la constante $y = \frac{-g}{a}$. La vitesse du parachutiste est donc

$$z'(t) = \frac{-g}{a} + \lambda.e^{-Kt/m},$$

où λ se détermine en fonction de la vitesse au temps $t = 0$ (lorsqu'il ouvre son parachute). On constate donc que assez rapidement la vitesse de chute est constante (K étant supposé positif, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-Kt/m} = 0$).

Pour ce type d'équation, il existe une manière systématique de trouver les solutions. Nous allons utiliser la méthode de la variation de la constante :
Soit f une solution de $y' - ay = F$; posons $g(x) = f(x)e^{-ax}$. On a donc $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x))$, ce qui donne

$$g'(x) = e^{-ax}F(x).$$

On doit donc avoir $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)dt = g(0) + \int_0^x e^{-at}F(t)dt$. Comme on ne cherche qu'une solution, on peut imposer $g(0) = 0$, et donc $f(x) = e^{ax}\displaystyle\int_0^x e^{-at}F(t)dt$. On retiendra :

> L'ensemble solution de léquation $y' - ay = F$ est l'ensemble des fonctions du type
>
> $$x \mapsto e^{ax}(\lambda + \int_0^x e^{-at}F(t)dt).$$

7.2.2 équation du type $y'' + py' + qy = F$

On considère toujours p et q deux réels (p peut être nul) et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. La méthode et les résultats de la partie précédente s'adaptent encore au cas des équations du second ordre, en un peu plus compliqué peut-être. Nous nous contenterons de donner quelques résultats :

> Soit f *une solution particulière* de $y'' + py' + qy = F$. Alors, l'ensemble solution de l'équation $y''+py'+qy = F$ est l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto f(x) + g(x)$, où g est une solution générale de l'équation homogène associée $y'' + py' + qy = 0$.

On peut encore utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière, mais une théorie générale est lourde à écrire du fait des 3 cas qu'il faut considérer. Nous nons contenterons de donner des exemples :

Cas où Δ est positif.

On appelle r et s les deux racines distinctes de $R(X) = X^2+pX+q$. Soient f solution de $y'' + py' + qy = F$ et g la fonction définie par $g(x) = e^{-rx}f(x)$. On a donc

$$f'(x) = e^{rx}(g'(x) + r.g(x))$$

$$\text{et } f''(x) = e^{rx}(g''(x) + 2r.g'(x) + r^2 g(x)),$$

ce qui donne comme équation en g :

$$\forall x, \quad g''(x) + (2r + p)g'(x) = e^{-rx}F(x).$$

On sait résoudre cette équation, ce qui nous permet de trouver une solution particulière.

Cas où F est un polynôme.

Si $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, on cherche la solution particulière sous la forme d'un polynôme $b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$.

Exemple. Solutions de $y'' + y' + y = 3 + 2x + x^2$.
Le calcul donne $\Delta = -3$ et donc les solutions générales sont du type $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$. On cherche une solution particulière sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
on a donc $f'(x) = 2ax + b$ et $f''(x) = 2a$, ce qui donne

$$ax^2 + (b + 2a)x + (b + 2a + c) = 3 + 2x + x^2,$$

ceci devant être vrai pour tout x. Par identification on trouve $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$.
Les solutions de l'équation sont les fonctions du type $f(x) = x^2 + 1 + e^{-\frac{1}{2}x}(\lambda\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x))$.

Cas où F est une exponentielle.

Si $F(x) = e^{ax}$ on cherche une solution particulière sous la $f(x) = Ce^{ax}$. Si une solution présente cette forme, elle doit vérifier :

$$C.R(a)e^{ax} = f''(x) + pf'(x) + qf(x) = e^{ax}.$$

Il faut donc considérer deux cas : Si a n'est pas racine de R alors on choisit $C = \dfrac{1}{R(a)}$. Sinon on cherche la solution sous la forme $P(x)e^{ax}$ où P est un polynôme (on commence par chercher avec un degré 1).

Exemples
La solution de $y'' + y' + y = e^x$ qui vaut 0 en 0 et avec une dérivée vallant 1 en 0.
On cherhce la solution particulière sou sla forme $f(x) = Ce^x$. On aura alors

$$3Ce^x = e^x,$$

ce qui donne une solution générale de la forme

$$g(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(\lambda\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)).$$

Comme on veut $g(0) = 0$ on doit avoir $\lambda = 0$ et comme on veut $g'(0) = 1$ on doit avoir

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu = 1.$$

On trouve alors $\mu = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.
la solution de $y'' - y' = e^x$ qui vaut 0 en 0 et avec une dérivée nulle en 0.
On cherche la solution particulière sous la forme $f(x) = Ce^x$, mais cela donne $0 = e^x$ qui est impossible comme équation (ici $R(x) = x^2 - 1$ et $R(1) = 0$!). On cherche donc la solution sous la forme $f(x) = (ax + b)e^x$ et on trouve que $\frac{1}{2}xe^x$ convient. Les solutions générales sont donc du type

$$g(x) = \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

On veut $g(0) = 0 = g'(0)$, ce qui donne $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \mu = -\frac{1}{2}$.

Cas où F est trigonométrique

Si $F(x)$ est du type $\cos(ax)$ ou $\sin(ax)$ et si F n'est pas solution de l'équation homogène, on, cherche une solution particulière sous la forme $f(x) = \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$.

Exemple. Solution particulière de $y'' + y' + y = \cos(2x)$? On la cherche sous la forme indiquée. On aura donc pour tout x, $f'(x) = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$ et $f''(x) = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x)$, ce qui donne, une fois réinjecté dans l'équation,

$$(-3\alpha + 2\beta)\cos(2x) + (-3\beta - 2\alpha)\sin(2x) = \cos(2x),$$

(ceci devant être vrai pour tout x). L'unique solution est obtenue par le couple (α, β) qui vérifie

$$-3\alpha + 2\beta = 1 \text{ et } -3\beta - 2\alpha = 0.$$

7.3 D'autres équations différentielles

7.3.1 Équations à coefficients non constants

Équations homogènes

On cherche à résoudre l'équation

$$y' - a(x)y = 0, \tag{7.6}$$

où a est une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. En tant que fonction continue, a admet une primitive sur I, que nous noterons A. Nous allons utiliser la méthode de la variation de la constante pour montrer que les solutions de (7.6) sont les fonctions du type $f : x \mapsto C.e^{A(x)}$, où C est une constante réelle.
Commençons par montrer qu'une fonction de ce type est solution de (7.6). La fonction $f : x \mapsto C.e^{A(x)}$ est dérivable et $f'(x) = A'(x).C.e^{A(x)} = a(x).f(x)$. Donc f est bien solution de l'équation considérée.
Réciproquement soit f une solution de l'équation (7.6) ; écrivons

$$f(x) = C(x)e^{A(x)},$$

ce qui est possible car une exponentielle ne s'annule jamais. On a donc $f'(x) = C'(x).e^{A(x)} + a(x)f(x)$. Ceci montre que $C'(x) = 0$; pour tout x de I, donc C est une constante.

Exemple. Les solutions de $y' - 3xy = 0$ sont les fonctions du type $f(x) = C.e^{\frac{3}{2}x^2}$.

Équation avec second membre

La même technique permet de résoudre des équations du type

$$y' - a(x)y = b(x), \tag{7.7}$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de$\mathbb{R}$. On retiendra

Soit f *une* solution particulière de $y' - a(x)y = b(x)$. Alors, l'ensemble solution de l'équation $y' - a(x)y = b(x)$ est l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto f(x) + \lambda.e^{A(x)}$ où A est une primitive de a.

7.3.2 Équations à variables séparables

On dit qu'une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut s'écrire sous la forme

$$a(x) = y'b(y), \tag{7.8}$$

où a et b sont deux fonctions continues.

Exemple. L'équation $(1 + x^2)^2 y' + 2x + 2xy^2 = 0$ est à variable séparables car elle s'écrit aussi

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Considérons une équation différentielle du premier ordre et à variables séparables écrite sous la forme (7.8). Soient A et B des primitives respectives de a et b. Alors, il existe une constante C telle que

$$B(y) = A(x) + C.$$

Si la fonction B est bijective, on peut alors en déduire la valeur de $y(x)$, par la formule

$$y(x) = B^{-1}\left(A(x) + C\right).$$

Exemple. Dans l'exemple précédent on aura $\arctan(y) = \dfrac{1}{1+x^2} + C$, d'où

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{1+x^2} + C\right).$$

7.4 Exercices

Exercice 39
Résoudre l'équation différentielle $y' - 3y = 0$.

Exercice 40
Résoudre les équations différentielles $y'' - 2y' + 4y = 0$ et $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Exercice 41
Soient a et b deux nombres réels fixés. Montrer qu'il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 3y = 0$ telle que $f(0) = a$ et $f'(0) = b$. Expliciter cette solution

Exercice 42

1/ Résoudre l'équation $(*)$ $y' + y = x$ (c'est à dire qu'on cherche $y : x \mapsto y(x)$ telle que pour tout x, $y'(x) + y(x) = x$).
2/ Résoudre aussi $y' + y = 8e^{-x}$.

Exercice 43
Résoudre les équations suivantes et trouver dans chaque cas la solution qui, pour $x = 0$ s'annule ainsi que sa dérivée.
1/ $y'' - 4y = 0$.
2/ $y'' - 4y = e^{mx}$ (on discutera en fonction de la valeur de m.)
3/ $y'' - 4y' + 4y = xe^{mx}$ (on discutera en fonction de la valeur de m.)
4/ $y'' + y' + y = \cos\beta x$.

Exercice 44
On veut résoudre l'équation fonctionnelle $E \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$, ce qui signifie qu'on cherche les fonctions continues f telles que pour tout x et pour tout y, on ait $f(x+y) = f(x)f(y)$.
1/ On suppose que f est solution de E. Montrer que $f(0)$ vaut 0 ou 1.

2/ Montrer que si f est solution et si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
3/ On suppose que f est solution et que $f(0) = 1$. On suppose aussi que f est dérivable en 0. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$.
Trouver alors une équation différentielle vérifiée par f et en déduire la forme de f.
4/ Donner l'ensemble des solutions de E qui sont dérivables en 0.

Exercice 45
Le but est de chercher les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est deux fois dérivable,} \\ x^2 f''(x) - 2f(x) = 0 \text{ pour tout } x > 0. \end{array} \right.$$

1/ Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$. Justifier qu'on peut définir une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f vérifie les conditions $(*)$ **si et seulement si** g est solution de $y'' - y' - 2y = 0$.
2/ Trouver toutes les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions $(*)$.

Exercice 46
Résoudre les équations suivantes :
1/ $y' + (\cos x)y = 0$, avec condition initiale $y(0) = 1$
2/ $y' +' x^2 y = x^4$.
3/ $y' + \dfrac{1}{1 - x^2} y = 0$.

Exercice 47
Résoudre les équations suivantes :
1/ $y'\sqrt{1 + x^2} - y^2 - y - 1 = 0$.
2/ $\dfrac{y'}{\sqrt{1 + x^2}} - e^{-y} = 0$.