M1 Variable complexe – Feuille de TD 6 – Paul Baird

§6. Zéros, pôles et le théorème de Rouché.

1. Montrer que

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^{az}}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin a$$

2. On se rappelle que $ord(f,a)$ est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ dans la série de Laurent de f en $z = a$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Si $ord(f,a) = k > 0$ et $ord(g,a) = k+1$, montrer que

$$res(f/g, a) = (k+1)\frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}$$

3. Trouver les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :

$$\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^3+z} \text{ en i et 1,} \quad \frac{1}{1-\cos z} \text{ en 0,} \quad \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \text{ en 1,} \quad \frac{1}{z-\sin z} \text{ en 0.}$$

4. (i) Montrer que si $ord(f,a) = -1$ et $ord(g,a) = 0$, alors $res(fg,a) = g(a)res(f,a)$.

(ii) Montrer que si $ord(f,a) = 0$ et $ord(g,a) = 1$, alors $res(f/g,a) = f(a)/g'(a)$.

(iii) Montrer par un exemple, que (i) n'est plus vraie si $ord(f,a) \leq -2$.

5. Montrer que le polynôme $z^4 + 26z + 2$ présente exactement trois zéros dans la couronne $5/2 < |z| < 3$.

6. Estimer une couronne $R_1 < |z| < R_2$ qui contient toutes les racines du polynôme palindromique $15z^4 + 18z^2 + 15$.

7. On suppose que f holomorphe dans un ouvert U simplement connexe sauf en un nombre fini de pôles. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin continu fermé. On suppose aussi que $\{z \in U : ord(f,z) \neq 0\}$ est un ensemble fini $\{z_1, \ldots, z_n\}$ disjoint de $\gamma([0,1])$. On écrit

$$ZP(f,\gamma) := \sum_{j=1}^{n} ord(f,z_j)ind(\gamma,z_j)$$

où $ind(\gamma, z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

Soit g une fonction holomorphe en U sauf en un nombre fini de pôles disjoints de $\gamma([0,1])$ et que pour tout $z \in \gamma([0,1])$ on a $|g(z)| < |f(z)|$.

(i) Montrer que $\inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \gamma([0,1])\} = \delta > 0$.

Pour $0 \leq t \leq 1$, soit

$$E(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\mathrm{d}z$$

(ii) Montrer que $E(t)$ est bien définie et prend ses valeurs dans les entiers.

(iii) Montrer que pour $0 \le t < u \le 1$ et $z \in \gamma([0,1])$, on a

$$\left| \frac{(f' + ug')(z)}{(f + ug)(z)} - \frac{(f' + tg')(z)}{(f + tg)(z)} \right| \le \frac{u - t}{\delta^2} |f'g - fg')(z)|$$

et par suite que $|E(u) - E(t)| \le k(u - t)$ pour une constante k indépendante de t et u.

(iv) Montrer que si $u - t < 1/k$ alors $|E(u) - E(t)| < 1$ et donc $E(u) = E(t)$.

(v) En déduire que $E(1) = E(0)$ et que $ZP(f + g, \gamma) = ZP(f, \gamma)$.