M1 Variable complexe – Feuille de TD 2 – Paul Baird

§3. Intégrale complexe

1. Soit f une fonction continue à valeurs réelles définie sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Pour chaque $z \in \mathbf{C}$, soit

$$F(z) = \int_\alpha^\beta e^{-zt} f(t) \mathrm{d}t .$$

En écrivant $e^z = 1 + z + z^2 g(z)$ ou autrement, montrer que

$$F'(z) = -\int_\alpha^\beta t e^{-zt} f(t) \mathrm{d}t$$

pour tout z. La fonction $F(z)$ est la *transformé de Laplace de* f.

2. Calculer l'intégrale de la fonction $z(z-1)$, puis $\mathrm{Re}\, z$ le long des segments droits: $[0 \to 1+\mathrm{i}]$, $[0 \to 1]$ et $[1 \to 1+\mathrm{i}]$. Qu'est ce qu'on peut remarquer sur la relation entre ces intégrales ?

3. Calculer l'intégrale de $1/z$ le long du carré avec sommets $\pm 1 \pm \mathrm{i}$ dans le sens contre l'aiguille d'une montre (indication : combiner les intégrales pour des arêtes opposées, avant de les calculer).

4. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ pour $|z| < R$ avec $R > 0$. Montrer que si $0 < r < R$ et $n > 0$, il existe z tel que $|z| = r$ et

$$\left| \int_{[0 \to r]} f \mathrm{d}z \right| \geq \frac{1}{n} |a_{n-1}| r^n .$$

5. Soit f une fonction paire. Montrer que

$$\int_{C(0,r)} f \mathrm{d}z = 0$$

pour tout $r > 0$.

6. On se rappelle que

$$\ln_0(1+z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

pour $|z| < r$. Montrer par intégration que cette série est toujours valable pour z tel que $|z| = 1$ et $z \neq -1$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = \frac{t}{2}$$

pour $-\pi < t < \pi$.

7. Montrer la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s} - z}\mathrm{d}s = 2\pi$$

pour $|z| < 1$ en appliquent la régle de Leibnitz en posant

$$\varphi(s,t) = \frac{e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s} - tz} \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\mathrm{d}s\,,$$

pour $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq s \leq 2\pi$ (on calcule $g'(t)$).