

M1 Variable complexe - epreuve d'entraînement (3h)

Polycopie du cours seul document autorisé.

Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. Calculer

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^3(z-b)} dz,$$

où $|a| > 1$, $|b| < 1$ et C est le cercle unité centré en 0 parcouru dans le sens direct.

(2 points)

II. Montrer que toutes les racine du polynôme

$$z^5 + 5z^2 + 1$$

se trouvent dans la coronne $\frac{1}{3} < z < 2$.

(3 points)

III. Soit $u : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction

$$u(x + iy) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3.$$

Trouver une fonction $v : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe.

Exprimer f en fonction de z .

(3 points)

IV. Montrer que la fonction $f(z) = \ln_0(1+z)$ est bien définie et holomorphe dans l'ouvert $U := \mathbf{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq -1\}$. Trouver une primitive pour $f(z)$ dans U .

(5 points)

V. (a) Montrer que la fonction

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

détermine une bijection holomorphe du demi-plan $H := \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$ dans le disque unité $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

(b) Trouver une bijection holomorphe du plan coupé $U = \mathbf{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq 0\}$ dans H et en déduire une bijection holomorphe de U dans D .

(c) Montrer que la fonction $\ln_0 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$ est bien définie et holomorphe dans le disque unité D (considérer l'inverse de la fonction trouvée dans (b)).

(7 points)

FIN