M1 Variable complexe - epreuve d'entrainement (3h)

Polycopie du cours seul document autorisé.

Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. Calculer

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^3(z-b)}\mathrm{d}z\,,$$

où $|a|>1$, $|b|<1$ et C est le cercle unité centré en 0 parcouru dans le sens direct.

(2 points)

II. Montrer que toutes les racine du polynôme

$$z^5+5z^2+1$$

se trouvent dans la coronne $\frac{1}{3}<z<2$. (3 points)

III. Soit $u:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ la fonction

$$u(x+\mathrm{i}y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3\,.$$

Trouver une fonction $v:\mathbf{C}\to\mathbf{R}$ telle que la fonction $f=u+\mathrm{i}v$ soit holomorphe. Exprîmer f en fonction de z. (3 points)

IV. Montrer que la fonction $f(z)=\ln_0(1+z)$ et bien définie et holomorphe dans l'ouvert $U:=\mathbf{C}\setminus\{z=x+\mathrm{i}y : y=0, x\le -1\}$. Trouver une primitive pour $f(z)$ dans U. (5 points)

V. (a) Montrer que la fonction

$$z\mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

détermine une bijection holomorphe du demi-plan $H:=\{z\in\mathbf{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ dans le disque unité $D=\{z\in\mathbf{C} : |z|<1\}$.

(b) Trouver une bijection holomorphe du plan coupé $U=\mathbf{C}\setminus\{z=x+\mathrm{i}y : y=0, x\le 0\}$ dans H et en déduire une bijection holomorphe de U dans D.

(c) Montrer que la fonction $\ln_0\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ est bien définie et holomorphe dans le disque unité D (considérer l'inverse de la fonction trouvée dans (b)). (7 points)

FIN