Variable complexe – Paul Baird

§6. Le principe de l'argument et le théorème de Rouché

Résidu logarithmique : Soit f une fonction holomorphe et non-nulle dans un disque pointé $D(a,R)\setminus\{a\}$. On appelle *résidu logarithmique de f en a* le résidu de la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln f(z)$$

en a. On écrit $RL_a(f)$ pour le résidu logarithmique de f en a.

Soit a un zéro d'ordre m. Alors $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $g(a)\neq 0$ et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Puisque g'/g est holomorphe dans un voisinage de a et $g(a)\neq 0$, on voit que $RL_a(f) = m$. De la même manière, si a est un pôle d'ordre m, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

et $RL_a(f) = -m$.

Théorème 6.1 : Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert $U\subset \mathbf{C}$ avec pôles $p_1, p_2, \ldots, p_m$ et zéros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (enuméré avec multiplicité). Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U avec $\gamma\sim 0$ qui ne'intersecte pas l'ensemble des zéros et pôles de f. Alors

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ind}_\gamma(z_k) - \sum_{j=1}^{m}\mathrm{Ind}_\gamma(p_j)$$

où $\mathrm{Ind}_\gamma z$ est l'indice de γ en z (Théorème 3.2).

Preuve : La fonction f s'écrit comme

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_n)(z-p_1)^{-1}\cdots(z-p_m)^{-1}g(z)$$

avec g holomorphe et non-nulle dans U. Le résultat est une conséquence du Théorème de Cauchy (Théorème 4.6) et du résidu logarithmique. $\square$

Théorème 1' (version alternative) Soit f méromorphe dans un ouvert V et soit U un ouvert avec $\overline{U}\subset V$ dont son bord ∂U est continue n'intersect pas l'ensemble des zéros et pôles de f. Soit Z (P) le nombre de zéros (pôles) de f dans U (énuméré avec multiplicité). Alors

$$Z - P = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

<u>Exemple</u> ; Soit

$$f(z)=\frac{(z-2)^2(z+\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})^3(z+1)}$$

et soit γ un chemin qui fait trois tours dans le sens retrograde autour de $z=2$, un tour dans le sens direct autour de $z=\mathrm{i}$, un tour dans le sens direct autour de $z=-\mathrm{i}$ et un tour dans le sens direct autour de $z=-1$. Alors

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=-3\times 2+1-3-1=-9$$

<u>Théorème 6.2</u> (généralisation) Soit f méromorphe dans un ouvert U avec zéros $z_1,\ldots,z_n$ et pôles $p_1,\ldots,p_m$. Soit g holomorphe dans U et soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U qui n'intersecte pas l'ensemble des zéros et pôles de f avec $\gamma\sim 0$ dans U. Alors

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^n g(z_k)\mathrm{Ind}_\gamma(z_k)-\sum_{j=1}^m g(p_j)\mathrm{Ind}_\gamma(p_j)$$

La preuve est identique à celle du théorème 6.1.

<u>Corollaire 6.3</u> (formule de l'inverse) : Soit f holomorphe dans un ouvert $U\supset\overline{D(a,R)}$ et soit f injective dans $D(a,R)$. Soient $\Omega=f(D(a,R))$ et γ le cercle $|z-a|=R$. Alors $f^{-1}(w)$ est définie par la formule

$$f^{-1}(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{zf'(w)}{f(z)-w}\mathrm{d}z$$

pour chaque $w\in\Omega$.

<u>Preuve</u> : Soit $w=f(\xi)\in\Omega$; alors $f(z)-w$ présente un zéro et un seul ($z=\xi$) dans $D(a,R)$. On pose $g(z)=z$ dans le théorème 6.2 :

$$z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{zf'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z\,.$$

$\square$

<u>Théorème 6.4</u> (Rouché) Soit $U\subset\mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, soit f et g deux fonctions méromorphes sur U avec un ensemble fini F de zéros et de pôles. Soit γ un chemin fermé simple (injectif) à image dans $U\setminus F$ formant le bord d'un compact K. Si pour tout $z\in\gamma$ on a

$$|f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

alors $Z_f-P_f=Z_g-P_g$ où Z_f (P_f) sont le nombre de zéros (pôles) de f (en tenant compte de leur multiplicité) contenus dans K.

Preuve : Par hypothèse

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}+1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1$$

sur γ. Soit $\lambda(z) = f(z)/g(z)$. Si λ est réelle et positive alors l'inégalité devient $\lambda+1 < \lambda+1$, absurde, donc la fonction méromorphe f/g applique γ dans $\Omega = \mathbf{C}\setminus[0,\infty[$.

Soit ℓ une détermination de logarithme dans Ω ; alors $\ell(f(z)/g(z))$ est bien définie et détermine une primitive pour $(f/g)'/(f/g)$ dans un voisinage de γ. Il s'ensuit que

$$0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma (f/g)'/(f/g)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\mathrm{d}z = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g)$$

□

Exemple : Soient $f(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ et $g = 5z^3$. Soit γ le cercle $|z| = 1$. Alors sur γ

$$|f(z) + g(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4$$

D'autre part $|g(z)| = 5$ sur γ et les hypothèses du théorème de Rouché sont satisfaites. Il s'ensuit que $Z_f = Z_g$ (pas de pôles). Par ailleurs, g a un zéro tripe à l'origine ce qui nous indique que f admet trois zéros dans le disque ouvert $D(0,1)$.

Exemple (théorème fondamental d'algèbre) : Soit

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

alors

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad z \to \infty$$

Donc il existe $R > 0$ tel que $|z| \geq R$ entraîne

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

En particulier

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

pour $|z| = R$, c'est à dire $|p(z) - z^n| < |z|^n$ pour $|z| = R$. Le théorème de Rouché affirme alors que $Z_p = Z_{z^n} = n$, c'est à dire il y a n zéros de $p(z)$ dans la disque $D(0,R)$.

□

Théorème 6.5 : Soit $f(z)$ holomorphe non-constante dans un voisinage de z_0 et soit $f(z_0) = a_0$. Soit n l'ordre du zéro de $f(z) - a_0$ en z_0 (donc $n \geq 1$ et si en plus $f'(z_0) = 0$ on a $n \geq 2$). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall a \in D(a_0, \delta) \setminus \{a_0\}$ il existe n points distincts $z_1, \ldots, z_n \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ avec $f(z_j) = a$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Preuve : Le théorème d'unicité (théorème 3.13) implique que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, si $0 < |z - z_0| < 2\varepsilon$ on a que $f(z)$ est définie et (i) $f(z) \neq a_0$; (ii) $f'(z) \neq 0$ (sinon f est constante). Puisque $\{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$ est compacte

$$\inf\{|f(z) - a_0| : |z - z_0| = \varepsilon\} = \delta > 0\,.$$

Soit $a \in D(a_0, \delta) \setminus \{a_0\}$. Alors $|a_0 - a| < |f(z) - a_0|$ lorsque $|z - z_0| = \varepsilon$ d'où pour $|z - z_0| = \varepsilon$,

$$|f(z) - a - f(z) + a_0| = |a_0 - a| < |f(z) - a_0| \leq |f(z) - a| + |f(z) - a_0|$$

Par le théorème de Rouché, $f(z) - a$ et $f(z) - a_0$ possèdent le même nombre de zéros dans $D(z_0, \varepsilon)$, c'est à dire n. Puisque f' est non-nulle dans $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, les zéros de $f(z) - a$ sont tous simples et donc distincts. $\square$

Corollaire 6.6 : Soit $f(z)$ holomorphe et injective alors $f'(z)$ est non-nulle. $\square$