

Variable complexe – Paul Baird

§1. Notions de base

L'ensemble des nombres complexes est le plan $\mathbf{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ avec les opérations d'addition et de multiplication :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

Il s'agit d'un corps commutatif engendré par les réels $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ et l'élément $i := (0, 1)$. Tout élément s'écrit alors comme $x + yi$ avec la propriété $i^2 = -1$.

Si on abandonne commutativité de multiplication on peut définir les quaternions \mathbb{H} :

$$x + yi + zj + tk \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k$$

Si on abandonne l'associativité de multiplication on est ramené aux octonions de Cayley \mathbb{O} . $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ sont tous les algèbres de division (tout élément non-nul est inversible). Parmi ces quatre algèbres ce n'est que \mathbf{C} qui est algébriquement fermé (tout élément algébrique, c'est à dire qui est racine d'un polynôme, appartient à \mathbf{C}).

Notations : $z = x + yi$,

- x est la partie réelle de z : $x = \operatorname{Re} z$;
- y est la partie imaginaire de z : $y = \operatorname{Im} z$;
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la module de z ;
- $\bar{z} = x - yi$ est la conjuguée de z : $|z|^2 = z\bar{z}$;
- l'inverse de z est donnée par $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

On identifie $z \in \mathbf{C}$ avec le point $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ dans la plan \mathbf{R}^2 .

Forme polaire : On écrit $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, puis $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est la module de z . On appelle θ l'argument de z . Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Racine n -ième de a : Les solutions de l'équation $z^n = a = |a|e^{i\alpha} \in \mathbf{C}$ sont données par

$$z = |a|^{1/n} e^{i(\alpha + 2k\pi)/n} \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Séries entières : Soit $\{a_n\}$ une suite dans \mathbf{C} telle que $S_n := a_0 + \dots + a_n \rightarrow S$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge avec limite S . On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Si $\sum |a_n|$ converge on dit que $\sum a_n$ est absolument convergente.

²Théorème 1 : Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ suites telles que $\sum a_n = A$ et $\sum b_n = B$ avec $\sum |a_n|$ convergente. Soit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Convergence ponctuelle : Soit $U \subset \mathbf{C}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n : U \rightarrow \mathbf{C}$. La suite $\{f_n\}$ converge ponctuellement en $a \in U$ s'il existe un nombre qu'on note $f(a) \in \mathbf{C}$ tel que $f_n(a) \rightarrow f(a)$. Si $\{f_n\}$ converge ponctuellement en chaque point de U et chaque f_n est continue, ce n'est pas nécessairement le cas que la fonction limite f est continue. Voir, par exemple, le cas où $U = [-1, 1]$ et $f_n(x) = x^{2n}$.

Convergence uniforme : On dit que f_n converge uniformément vers f sur U si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout $a \in U$.

Théorème 2 : Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues définies sur $U \subset \mathbf{C}$ qui convergent uniformément vers $f : U \rightarrow \mathbf{C}$. Alors f est continue.

Convergence uniforme d'une série : On dit que la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément dans $U \subset \mathbf{C}$ si la suite des sommes partielles : $S_n = f_1 + \dots + f_n$ converge uniformément.

Théorème 3 (critère de convergence de Weierstrass) : Soit $\{M_n\}$ une suite de nombres réels non-négatifs telle que $\sum_n M_n$ converge et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $U \subset \mathbf{C}$ telle que pour chaque n on a $|f_n(z)| \leq M_n$ pour tout $z \in U$. Alors $\sum_n f_n$ converge uniformément dans U .

Preuve : Pour chaque $z \in U$, $\sum_n f_n(z)$ converge puisqu'elle converge absolument. Soit $S(z) = \sum_n f_n(z)$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\sum_{N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Pour $z \in U$, $m \geq N$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^m f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^m M_n \leq \varepsilon.$$

Lorsque $m \rightarrow \infty$, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| = \left| S(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| \leq \varepsilon.$$

□

Une conséquence du théorème précédente est la caractérisation de convergence des séries entières :

Théorème 4 : Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres complexes. Alors

soit (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$;

soit (ii) il existe $R \geq 0$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.

Si $0 \leq r < R$ (ou si $r > 0$ dans le cas (i)) alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément dans le disque $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$.

Le nombre R s'appelle le rayon de convergence de la série entière.

Corollaire 1 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergentes pour $|z| < R$ avec sommes $a(z)$ et $b(z)$ respectivement. Soit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = a(z)b(z)$ pour $|z| < R$.

Corollaire 2 : Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge à $S(z)$ pour $|z| < R$, alors S est continue dans le disque $|z| < R$.

Exemples : (i) $\sum z^n$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$. Donc $R = 1$ et la série est divergente pour tout z tel que $|z| = R$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $z = 1$ donc $R = 1$. La série converge lorsque $z = -1$.

(iii) $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$; de même pour $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

Théorème 5 (théorème d'unicité des séries entières) : Soient $\sum_n a_n z^n = a(z)$ et $\sum_n b_n z^n = b(z)$ pour $|z| < R$, $R > 0$. Soit $\{z_k\}$ une suite de nombre complexes non-nuls telle que $z_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$ et $a(z_k) = b(z_k)$ pour chaque k . Alors $a_n = b_n$ pour tout n .

Preuve : Puisque $a(z)$ et $b(z)$ sont continues en $z = 0$, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a(z_k) = a_0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b(z_k) = b_0$$

donc $a_0 = b_0$. Supposons qu'on a établi que $a_r = b_r$, $r = 0, 1, \dots, m$. Soient

$$a^*(z) = a_{m+1} + a_{m+2}z + \dots, \quad b^*(z) = b_{m+1} + b_{m+2}z + \dots$$

alors $a^*(z_k) = b^*(z_k)$ pour chaque k , donc, lorsque $k \rightarrow \infty$ on en déduit que $a_{m+1} = b_{m+1}$. Par récurrence, on a $a_n = b_n$ pour tout n □

Chemins : Un chemin est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. Deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{C}$ sont équivalents s'il existe une fonction continue strictement croissante $\tau : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ telle que $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ pour

⁴ tout $t \in [a_1, b_1]$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. Une courbe est une classe d'équivalence de chemins.

Réunion de deux chemins : Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ deux chemins tels que $\gamma(b) = \delta(c)$. Soit $\delta_1(t) = \delta(t + c - b)$, $b \leq t \leq b + d - c$. Alors δ_1 est équivalent à δ . En plus, la fonction qui est confondue avec γ sur $[a, b]$ et δ_1 sur $[b, b + d - c]$ est continue dans $[a, b + d - c]$ et détermine un chemin noté $\gamma \cup \delta$.

Chemin continuellement différentiable : Un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est dit continuellement différentiable, ou de classe C^1 , si $\gamma(t)$ admet une dérivée $\gamma'(t)$ qui est continue en chaque point $t \in [a, b]$. Si en plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ on dit que γ est régulière.

Un chemin γ est continuellement différentiable par morceaux si $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ avec chaque γ_j continuellement différentiable.

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin et soit $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. Soit

$$L(\gamma, S) := \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Par l'inégalité triangulaire, $L(\gamma, S') \geq L(\gamma, S)$ lorsque $S' \supseteq S$. On dit que γ est rectifiable si $\{L(\gamma, S) | S \text{ une subdivision de } [a, b]\}$ est majoré. La borne supérieure est la longueur de γ notée $|\gamma|$.

Exercices : (i) soit $\gamma(t) = tz + (1-t)w$, ($t \in [0, 1], z, w \in \mathbf{C}$). Montrer que $|\gamma| = |w - z|$.

(ii) Montrer que $|\gamma \cup \delta| = |\gamma| + |\delta|$.

Théorème : Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continuellement différentiable régulière, alors

$$|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Preuve : Soit S une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}),$$

donc

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque γ' est uniformément continue dans $[a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que $s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \Rightarrow |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$. Soit $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

une subdivision de $[a, b]$ tel que $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ pour chaque j . Posons $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$.⁵
 Pour chaque j , il existe $p_j, q_j \in (t_{j-1}, t_j)$ tels que

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})(u'(p_j) + iv'(q_j))$$

(formule des accroissements finis). Soit $\psi(t) = u'(p_j) + iv'(q_j)$ pour $t_{j-1} \leq t < t_j$. Alors ψ est constante sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et

$$|\psi(t) - \gamma'(t)| = |u'(p_j) + iv'(q_j) - u'(t) - iv'(t)| \leq 2\varepsilon$$

pour tout t . Donc

$$\begin{aligned} & \int_a^b (|\gamma'(t)| - |\psi(t)|) dt \leq 2\varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow |\gamma| & \geq L(\psi, S) = \int_a^b |\psi(t)| dt \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt - 2\varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

et $|\gamma| \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. □

Plan compactifié : On ajoute un point à l'infini $z = \infty$. On écrit $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{C}_\infty$. On réalise \mathbf{C}_∞ comme la sphère unité dans \mathbf{R}^3 : $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ (appelé sphère de Riemann). A chaque point $z \in \mathbf{C}$ on associe le point $X = (x_1, x_2, x_3)$ d'intersection de S^2 avec le rayon joignant le pôle nord $N = (0, 0, 1)$ au point z . La correspondance $X \leftrightarrow z$ s'appelle la projection stéréographique. Le point $N \leftrightarrow \infty$.

Soit $z = x + iy$. Le rayon est paramétré comme $\{t(0, 0, 1) + (1-t)(x, y, 0) | 0 \leq t \leq 1\}$. Le point d'intersection avec la sphère est donnée par $t = (|z|^2 - 1)/(|z|^2 + 1)$ d'où

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|z|^2 + 1} (2\operatorname{Re} z, 2\operatorname{Im} z, |z|^2 - 1).$$

Reciproquement, $z = x + iy = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$.

Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe telle que $|f(z)| \rightarrow \infty$ lorsque $z \rightarrow a \in \mathbf{C}$. Alors on associe la valeur ∞ à $f(z)$ lorsque $z = a$. Reciproquement, si $f(z) \rightarrow b$ lorsque $|z| \rightarrow \infty$ on écrit $f(\infty) = b$. Par exemple, soit $f(z) = 1/z$, alors $f(0) = \infty$ et $f(\infty) = 0$.