Epreuve d'entrainement : solutions

I. Soit $f(z) = \frac{1}{(z-a)^3}$. La formule intégrale de Cauchy affirme que $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-\zeta)}dz$ $\forall \zeta$ avec $|\zeta| < 1$

d'où $\int_C \frac{1}{(z-a)^3(z-\zeta)}dz = 2\pi i\, f(\zeta) = \frac{2\pi i}{(\zeta-a)^3}$.

II. (Correction à la question : $\frac{1}{3} < |z| < 2$ (plutôt que $\frac{1}{3} < z < 2$))

Pour $|z| = 2$: $|5z^2+1| \leq 5|z|^2+1 = 21 < |z|^5 = 32$

d'où, par le Théorème de Rouché, le nombre de zéros de z^5 et de z^5+5z^2+1 dans $D(0,2)$ (pour lequel $\mathrm{Ind}_\gamma = 1$ où $\gamma = 2e^{it}$) est le même, c'est à dire 5. Il s'agit de toutes les racines.

Soit $z = \frac{1}{w}$: $z^5+5z^2+1=0 \iff \frac{1}{w^5}+\frac{5}{w^2}+1=0 \iff \frac{1}{w^5}(w^5+5w^3+1)=0$

alors $|z| = \frac{1}{3} \iff |w| = 3$. $\iff w^5+5w^3+1 = 0$

Pour $|w| = 3$: $|5w^3+1| \leq 5|w|^3+1 = 5\times 27+1 = 136 < |w|^5 = 3^5 = 9\times 27$

Donc le nombre de ~~zéros~~ zéros de w^5 et w^5+5w^3+1 dans le disque $|w| < 3$ sont le même, c'est à dire 5.

Mais $|w| < 3 \iff |z| > \frac{1}{3}$. Donc tous les zéros du polynôme z^5+5z^2+1 se trouvent dans la couronne $\frac{1}{3} < |z| < 2$

(iii) Par les équations de Cauchy-Riemann, il faut que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 12xy - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2 - 6xy + 6y^2$

Il s'ensuit que $\frac{\partial v}{\partial x} = 6x^2 + 6xy - 6y^2$

$\Rightarrow v = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + \alpha(y)$ où α ne dépend que de y.

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 12xy + \alpha'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\Rightarrow \alpha'(y) = -3y^2 \Rightarrow \alpha(y) = -y^3 + C$ où C constante.

Donc $v = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3$ répond à la question.

Dans ce ~~cas~~ cas $f = u+iv = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + i(2x^3+3x^2y-6xy^2-y^3)$

$z^3 = (x+iy)(x^2-y^2+2ixy) = x^3 - xy^2 - 2xy^2 + i(yx^2 - y^3 + 2x^2y)$
$= x^3 - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y)$

et $f(z) = z^3 - 6x^2y + 2y^3 + i(2x^3 - 6xy^2)$
$= z^3 + 2(y-ix)^3 = z^3 + 2(-iz)^3 = z^3 + 2iz^3$.

IV $\ln_0(z)$ défini dans $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy \mid y=0, x \leq 0\}$

d'où $\ln_0(1+z)$ bien défini dans $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy \mid y=0, 1+x \leq 0\}$

Une primitive $F(z)$ est donnée par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \ln_0(1+z)\,dz$$ où γ_z est le

segment droit $\gamma_z : tz : 0 \leq t \leq 1$

– on remarque que $\gamma_z \subset U$

Alors $F(z) = \int_0^1 \ln_0(1+tz).z\,dt$ (définition de l'intégrale)

On fait une intégration par parties : $u = \ln_0(1+tz) \Rightarrow u' = \frac{z}{1+tz}$

$v' = z \Rightarrow v = tz$.

$$F(z) = \cancel{tz}\; tz\ln_0(1+tz)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{tz^2}{1+tz}\,dt.$$

$$= z\ln_0(1+z) - \cancel{\int_0^1 \frac{1+tz-1}{1+tz}dt = z\ln_0(1+tz)} - z\int_0^1 \frac{tz+1-1}{1+tz}\,dt$$

$$= z\ln_0(1+z) - z + \int_0^1 \frac{z}{1+tz}\,dz = z\ln_0(1+z) - z + \ln_0(1+tz)\Big|_0^1$$

$$\boxed{= z\ln_0(1+z) - z + \ln_0(1+z)}$$

On vérifie : $F'(z) = \ln_0(1+z) + \frac{z}{1+z} - 1 + \frac{1}{1+z} = \ln_0(1+z)$.

V (a) $$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)\left(\frac{\bar z+i}{\bar z-i}\right) = \frac{|z|^2+1+i(z-\bar z)}{|z|^2+1-i(z-\bar z)} = \frac{|z|^2+1-2y}{|z|^2+1+2y} < 1$$

si $y > 0$ $(z = x+iy)$, d'où l'application prend ses valeurs dans le disque.

Soit $w \in D(0,1)$: $w = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow z = \frac{i(1+w)}{1-w} = \frac{i(1+w)(1-\bar w)}{1-w-\bar w+|w|^2}$

$$= \frac{i(1-|w|^2+w-\bar w)}{1-w-\bar w+|w|^2}$$ Soit $w = u+iv$

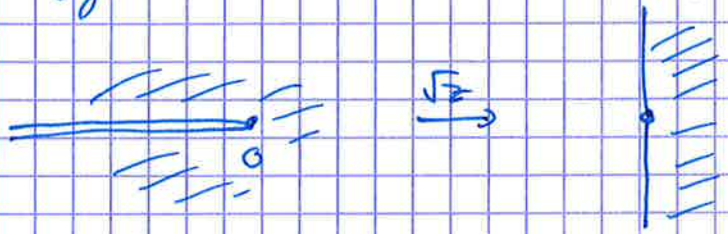
La partie imaginaire de z est $\frac{1-|w|^2}{1-2u+u^2+v^2} = \frac{1-|w|^2}{(1-u)^2+v^2} > 0$ par $|w| < 1$

Donc l'application est inversible

Puisque l'application et son inverse sont holomorphes (étant des homographies) on voit que l'application détermine une bijection holomorphe de H dans D.

(b) Une bijection holomorphe de $U = \mathbb{C} \setminus \{z = x+iy \mid y = 0, x \leq 0\}$ dans H :

D'abord l'application $z \mapsto \sqrt{z}$ détermine une bijection de U dans le demi-plan $\mathrm{Re}\, z > 0$.



($\sqrt{z}$ est bien holomorphe, car elle est $\mathbb{C}$-différentiable pour $z \neq 0$)

Ensuite, on effectue une rotation par $+\pi/2$, pour ça il suffit de multiplier par $e^{i\pi/2} = i$

Donc $z \mapsto i\sqrt{z}$ donne une bijection holomorphe de U dans H.

Par (a), une bijection de U dans D est donnée par la composée :

$$z \mapsto i\sqrt{z} \mapsto \frac{i\sqrt{z} - i}{i\sqrt{z} + i} = \frac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 1}$$

L'inverse de $z \mapsto i\sqrt{z}$ est donnée par : $\tilde{z} = i\sqrt{z}$
$\Rightarrow \tilde{z}^2 = -z$ et $z = -\tilde{z}^2$

d'autre part l'inverse de $H \to D$ se trouve dans la partie (a), il s'agit de $z = \frac{i(1+w)}{1-w}$

On prend la composée $z = -\left(\frac{i(1+w)}{1-w}\right)^2 = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2$

- il s'agit une application holomorphe bijective de D dans U. Puisque $\ln_0$ est ~~bien défini~~ bien défini dans U, il s'ensuit que l'application

$$\ln_0 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 \text{ est bien défini } \cancel{\text{pour}}$$

et holomorphe pour tout $w \in D$.