Epreuve d'entraînement : Solutions

1. (a) $\int \sqrt{1+x}\,dx$: Soit $u = 1+x \Rightarrow du = dx$

$$\int \sqrt{1+x}\,dx = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$$

(b) $y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = (x+\frac{1}{2})^2$

Soit $Y = y - \frac{3}{4}$, $X = x + \frac{1}{2}$, alors $Y = X^2$

On se rappelle que $y^2 = 2ax$ est une parabole avec foyer en $(\frac{a}{2}, 0)$ d'où $Y = X^2$ a foyer en $(0, \frac{1}{4})$, c'est à dire $X = 0$ et $Y = \frac{1}{4}$

autrement dit $x + \frac{1}{2} = 0$ et $y - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2},\ y = 1}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 & ① \\ 5x - y + z = 0 & ② \end{cases}$ $① + ② \Rightarrow 6x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 6x$

puis ① entraîne $z = x + 2y - 3$
$= x + 2(3-6x) - 3$
$= -11x + 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3-6x \\ 3-11x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}$ passant par le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $f(x,y) = x^2y + 2x - y + 1$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

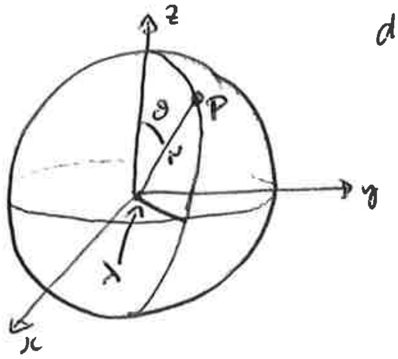
$$(\text{grad } f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2 \\ x^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Le gradient s'annulle lorsque $x^2 - 1 = 0$ et $2xy + 2 = 0$

$\Rightarrow x = +1$ ou -1 ; si $x = +1$ alors $2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$
si $x = -1$ alors $-2y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$

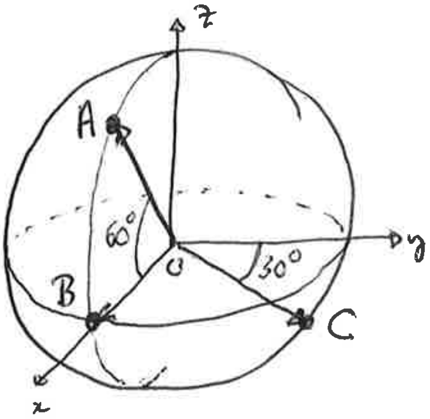
Deux points $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. (a) On considère les coordonnées sphériques ~~comme indiquées~~ (r, λ, θ) d'un point P comme indiquées :



Alors λ est la longitude de P et $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude de P.

(b)



(c) Soit $\Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_C| = 90°$

~~So~~ $d_{AC} = 6400 \times \arccos\left(\sin\varphi_A \sin\varphi_C + \cos\varphi_A \cos\varphi_C \cos(\Delta\lambda)\right)$

Mais $\cos\Delta\lambda = 0$, d'où

$d_{AC} = 6400 \times \arccos\left(\sin 60° \sin(-30°)\right)$

$= 6400 \times \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{6400 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

Mais $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ est entre $\frac{\pi}{2}$ et π (car $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ est négatif)

c'est à dire $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) > \frac{\pi}{2} \sim \frac{3.14}{2} > 1$

d'où cette distance est supérieure au rayon de la terre.

(d) d_{BC} : Soit $\Delta\lambda = |\lambda_B - \lambda_C| = 90°$

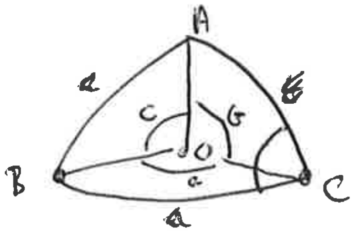
$d_{BC} = 6400 \arccos\left(\sin\varphi_B \sin\varphi_C + \cos\varphi_B \cos\varphi_C \cos(\Delta\lambda)\right)$

$= 6400 \arccos\left(\sin 0 \sin(-30°)\right) = 6400 \arccos 0 = 6400\frac{\pi}{2} = 3200\pi.$

$d_{AB} = 6400 \times \widehat{AOB}$ où $\widehat{AOB}$ est l'angle $60°$ en radians,

c'est à dire $2\pi \times \frac{60}{360} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Pour trouver l'angle $\widehat{ACB}$ on applique la loi des cosinus.



La formule est donnée en fin de l'épreuve, il faut permuter les symboles:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \widehat{ACB}$$

Mais $b = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $a = 90°$, $c = 60°$

On remarque que $\cos b = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin b = \sqrt{1-\cos^2 b} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

d'où $\cos 60° = \cos 90° \cancel{\cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \sin 90 \sin b \cos \widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 0 + \frac{\sqrt{13}}{4}\cos\widehat{ACB} \Rightarrow \cos\widehat{ACB} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\boxed{\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}$$

---

3. (a) vecteur directeur: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

paramétrisation $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ pour $-\infty < t < +\infty$

(b) la droite intersecte le plan lorsque

$$2(1-t) + 1+t - (1-2t) - 1 = 0$$

c'est à dire lorsque $2+1-1-1-2t+t+2t=0$

$$\Leftrightarrow 1+t=0 \Rightarrow t=-1$$

il s'agit du point $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

(c) $\text{dist}(A,P) = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\text{dist}(B,P) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

donc A est le plus proche

(d) Il s'agit de l'angle entre le vecteur directeur $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et le normal $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ au plan: en général, l'angle θ entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par $\cos\theta = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Dans ce cas

$$\cos\theta = \frac{(-1,1,-2)}{\sqrt{6}}\cdot\frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}} = \frac{-2+1+2}{6} = \frac{1}{6} \;:\; \boxed{\theta = \arccos\frac{1}{6}}$$

4. (a) AB - non ; BA - non , AC - oui , CA - oui , BC - oui, CB - non

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1 - 1\times5 + 1\times3 & 1\times0 + (-1)(-1) + 1\times(-1) \\ 2\times1 + 3\times5 + 0\times3 & 2\times0 + 3\times(-1) + 0\times(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-5+3 & 1-1 \\ 2+15 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+0\times2 & 1\times(-1)+0\times3 & 1\times1+0\times0 \\ 5\times1+(-1)2 & 5\times(-1)+(-1)3 & 5\times1+(-1)0 \\ 3\times1-2 & -3-3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -8 & 5 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-10+9 & 0+2-3 \end{pmatrix} = (-1, -1).$$

(b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

det A : On développe le long de la 1ère ligne.

$$\det A = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1) + 2(-3-2)$$

$$= -1 - 10 = -11$$

$$\mathrm{com}(A) : \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 6 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{com}(A)^t = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Ce système s'écrit $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2+6+2 \\ 2-5+2 \\ 10-3-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$ (On vérifie que c'est bien la solution)