§1.3 I $\quad \sin\theta = y$, $\cos\theta = \sqrt{1-y^2}$ (pythagore)

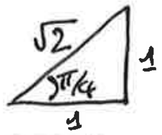
Par le triangle $\quad \sin 2\theta = \sqrt{1-y^2}$ (opposé / hypoténuse)

La donnée $\quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ entraîne alors que

$$\sqrt{1-y^2} = 2y\sqrt{1-y^2} \Rightarrow 1 = 2y \Rightarrow y = 1/2$$

($\theta = \frac{\pi}{6}$ est spécial, car l'autre angle du triangle rectangle est alors 2θ)

$\cos\frac{\pi}{4}$:



$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{3}}$: $\quad \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ (dessin)

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\frac{\pi}{2}$: $\quad \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1)$

$\cos\frac{2\pi}{3}$: On applique la question II :

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = \cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\cos\pi$: $\quad \cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1.$

$\cos\frac{5\pi}{4}$: $\quad \cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{4} - \sin\pi\sin\frac{\pi}{4} = -1\times\frac{1}{\sqrt2} - 0\times\frac{1}{\sqrt2} = -\frac{1}{\sqrt2}$

$(\sin\pi = 0)$

$\cos 2\pi = \cos 0 = 1$

$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\pi\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin 2\pi\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1\times\cos\frac{\pi}{4} - 0 \quad (\cos\alpha = \cos(-\alpha))$

$$= \frac{1}{\sqrt2}.$$

III $\quad \cos 2\pi = \cos^2\pi - \sin^2\pi = 1 - 0 = 1$, $\cos 4\pi = \cos^2 2\pi - \sin^2 2\pi = 1$

En plus $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, par récurrence, on en déduit que $\cos 2k\pi = 1$ et de la même façon $\sin 2k\pi = 0$

Puis $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta\cos 2k\pi - \sin\theta\sin 2k\pi = \cos\theta\times 1 - \sin\theta\times 0$

$$= \cos\theta$$

De même $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

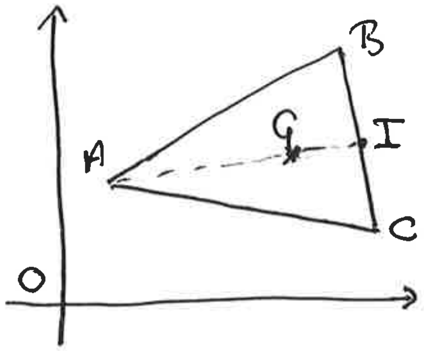
Soit $y = \cos x$: $\quad 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow (2y-1)(y-2) = 0$

$y = 2$ impossible, car $|\cos\theta| \leq 1$ quelque soit θ

d'où $\quad 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$

(solution générale : $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, k entier.)

IV



Soit $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

On remarque que

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$$

etc.

a) Avec ce choix de G :

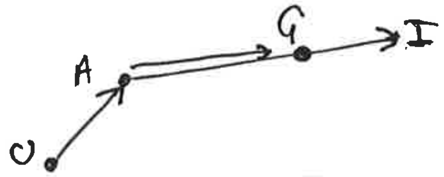
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG})$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3 \times \overrightarrow{OG} = 0 .$$

b) Le milieu de BC est donnée par I dont $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$



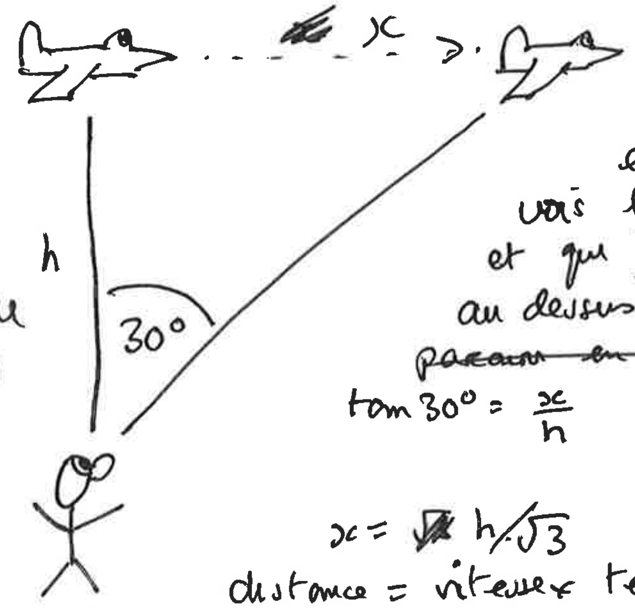
ce qui démontre que G est bien sur le segment AI et que l'on ait $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

c) Il en est de même pour les autres médianes. Puisque G est unique est bien défini : il s'ensuit que les trois médianes sont concourantes au point G.

VI

QUESTION MAL POSÉE:

J'aurai du demander : quelle est la vitesse de l'avion;



Soit h la hauteur et soit t le temps écoulé depuis que je vois l'avion au dessus, et que j'entends son bruit au dessus. Soit ~~x la distance parcouru en temps t~~ v la vitesse de l'avion

$\tan 30° = \frac{x}{h}$ mais $\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

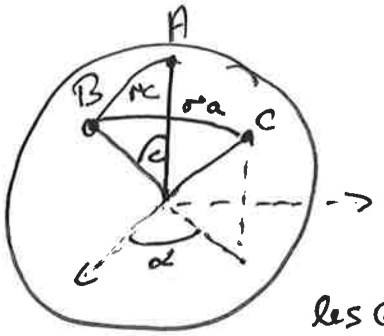
$x = h/\sqrt{3}$

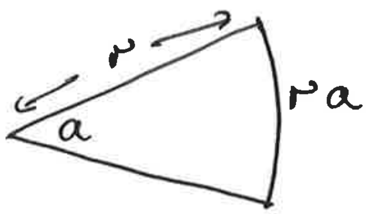
distance = vitesse × temps $\Rightarrow h = 1200\,t$

$x = \cancel{500t}\ vt$

$vt = \frac{1200t}{\sqrt{3}} \Rightarrow v = \frac{1200}{\sqrt{3}}$ soit environ 694 km/hr

VII Ça dépend de la notation. ~~Si on~~ Soit r le rayon de la sphère. Si on maintient la notation a, b, c pour les angles sous-tendus au centre de la sphère, alors la longueur des côtés du triangle sphérique deviennent ra, rb, rc resp.





Dans cette notation A, B, C sont les ~~deux~~ points avec coordonnées cartésiennes

$(0,0,r)$, $(r\sin c, 0, r\cos c)$, $(r\sin b\cos\alpha, r\sin b\sin\alpha, r\cos b)$ resp.

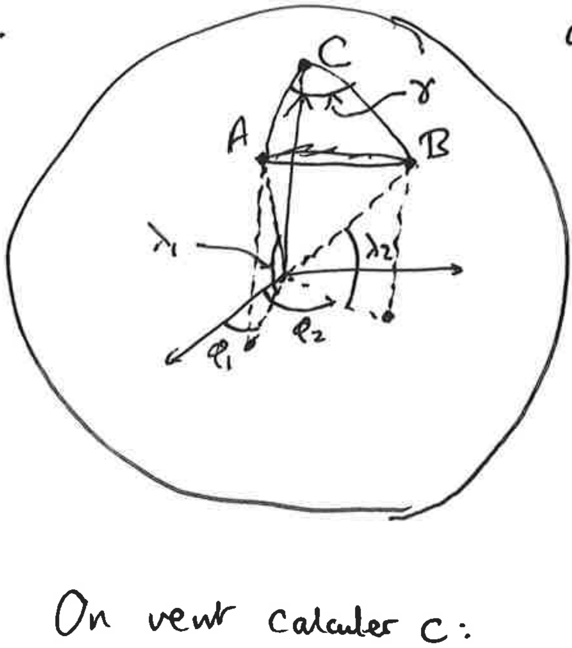
D'une part: $\vec{OB}\cdot\vec{OC} = r^2\cos a$ (longueurs des vecteurs × cos angle entre eux)

d'autre part $\vec{OB}\cdot\vec{OC} = r^2(\sin c\sin b\cos\alpha + \cos c\cos b)$

et la loi reste inchangée.

Par contre Si on applique la loi des cosinus afin de calculer a, il faut multiplier par r pour avoir la distance entre B et C

VIII



a) On ajoute le point C au pôle nord afin de former un triangle

Par la loi des cosinus

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$$

où $\gamma = |\varphi_2 - \varphi_1|$

$b = \theta_1$ et $a = \theta_2$

où θ_1 est la colatitude de A et θ_2 est la colatitude de B

On veut calculer c:

$$\cos c = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1\cos\Delta\varphi.$$

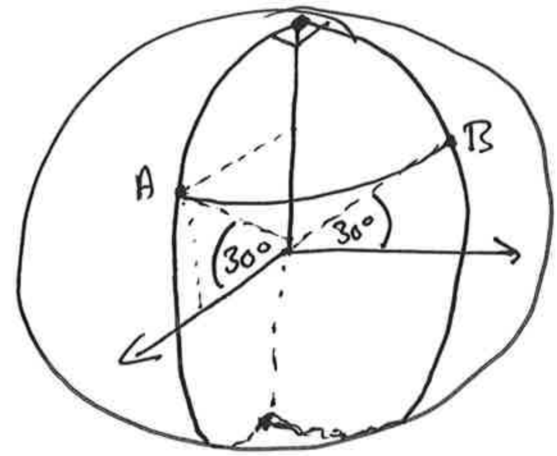
Mais $\lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \Rightarrow \cos\theta_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda_1) = \sin\lambda_1$ (formule pour la somme des angles)

$\sin\theta_1 = \sin(\frac{\pi}{2} - \lambda_1) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\lambda_1 = \cos\lambda_1$ etc.

$$\Rightarrow \Delta\sigma = c = \arccos(\sin\lambda_1\sin\lambda_2 + \cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\Delta\varphi)$$

b) Puisque la sphère est de rayon r, la distance géodésique entre A et B est $r \times \Delta\sigma$ (voir question VII)

IX

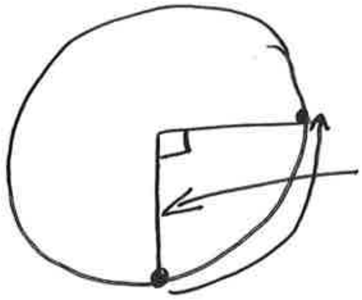


On applique la question ~~8~~ VIII

$$\Delta\varphi = 90°$$
$$\cos 90° = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 30° \qquad \sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\Delta\sigma = \arccos\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \arccos\frac{1}{4}$$
~ 1.318 radians.

$$d_{AB} = 1.318 \times 6400 \text{ kms} = 8435{,}2 \text{ kms.}$$

En restant sur le même parallèle:



on parcourt un quart de cercle de rayon $6400 \times \cos 30° = 6400 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 5542{,}56$

d'où $d'_{AB} = 5542{,}56 \times \frac{\pi}{2} \sim 8701{,}8$ kms. (plus long)

Afin que A, B soient à la latitude λ telle que $d'_{AB} = d_{AB}$, il faut que $6400 \times \cos\lambda \times \frac{\pi}{2} = 8435{,}2$

$$\Rightarrow \cos\lambda = \frac{8435{,}2}{6400} \times \frac{2}{\pi} \sim 0{,}84.$$

$$\Rightarrow \lambda = \arccos 0{,}84 \sim \cancel{32}\ 33°.$$

X

Distance entre Londres et New York: On applique la question VIII

$$\Delta\varphi = |0°10' + 74°01'| = 73°51'$$

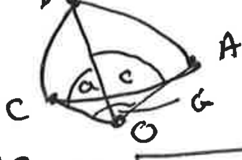
Formule: distance $= 6400 \times \arccos(\sin 51°30' \sin 40°43' + \cos 51°30' \cos 40°43' \cos 73°51')$ kms.
$\quad \parallel$
$\quad d_{AB}$

Il vous faut une bonne calculatrice: $6400 \times \arccos(0{,}78 \times 0{,}64 + 0.63 \times 0{,}77 \times 0{,}29$

$\sim 6400 \times \arccos(0{,}5 + 0{,}14) = 6400 \times \arccos(0{,}64) \sim 5632$ kms

(d'après l'internet c'est 5577 kms)

De même on calcule d_{BC} et d_{AC}



Pour calculer les angles on applique la loi des cosinus:

Alors $a = \frac{d_{BC}}{6400}$ rad, $b = \frac{d_{AC}}{6400}$ rad, $c = \frac{d_{AB}}{6400}$ rad

Loi des cosinus: $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

On calcule α, β, γ

Enfin, on applique la formule de l'aire

$$\text{Aire} = 6400^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$