Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Graphes, feuille TD 2 : suite de degrés, polynôme chromatique

1. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont graphiques ? Dans les cas où la suite est graphique, construire un graphe correspondant, et si c'est possible, un graphe connexe.

(i) $(4, 3, 3, 3, 1)$.

(ii) $(3, 2, 1, 0, 0)$.

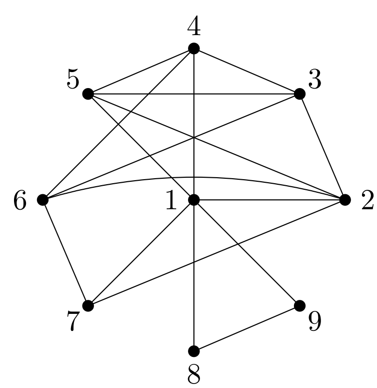
(iii) $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

(iv) $(2, 2, 2, 2, 2)$.

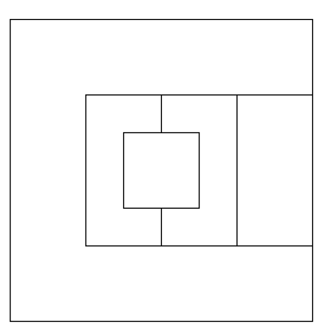
(v) $(7, 5, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$.

(vi) $(7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$.

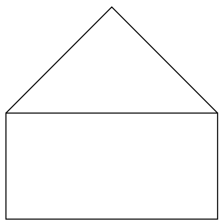
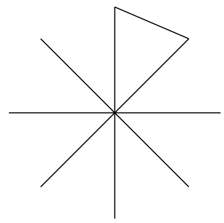
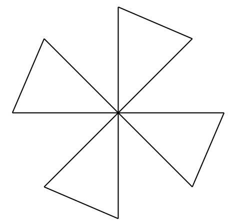
2. Par des échanges d'arêtes 2 par 2, transformer le graphe G suivant en un graphe H ayant les mêmes sommets, dont chaque sommet conserve son degré, de telle sorte que les voisins du sommet 1 sont les sommets $2, 3, 4, 5, 6, 7$; on indique chaque échange par un dessin.



2. On considère la décomposition du carré en régions comme indiqué. Pour chaque région on associe un sommet et on connecte deux sommets par une arête si les régions corréspondantes sont adjacentes. Dessiner le graphe qui se déduit. Combien de couleurs faut-il pour colorier ce graphe ? Calculer le polynôme chromatique associé à ce graphe.



3. Calculer le polynôme chromatiques de chacun des graphes suivants. Dans chaque cas, calculer le nombre de colorations avec 2, 3 et 4 coleurs. S'il existe une telle coloration, donner un exemple.

(i)  (ii)  (iii) 

4. Montrer que le polynôme chromatique du graphe cyclique C_n est $(x-1)^n+(-1)^n(x-1)$. Pour quels n est il possible de colorier ce graphe avec 2 couleurs ?
Montrer que le polynôme chromatique d'un arbre sur n sommets est $x(x-1)^{n-1}$.

5. On suppose $P_G(k)$ désigne le polynôme chromatique d'un graphe $G = (X, A)$.
(i) Montrer que le coefficient principal du polynôme chromatique est 1.
(ii) Si G est la réunion des composantes connexes $G_1, G_2, \dots G_k$; Montrer que le polynôme chromatique $P_G = \prod_{i=1}^{k} P_{G_i}$.
(iii) Montrer que le coefficient constant dans $P_G(k)$ est 0. Montrer que le coefficient de k dans $P_G(k)$ est non-zéro si et seulement si G est connexe.
(iv) Montrer que le coefficient de k^{n-1} dans P_G est $-|A|$, où $n = |X|$.