Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Contrôle No. 3, 24 avril 2019, polynôme chromatique, graphes eulériens

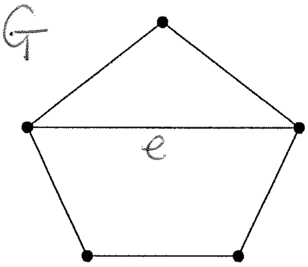
Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

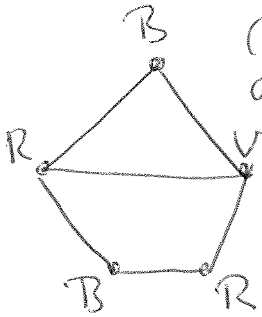
NOM : SOLUTION

1. Calculer le polynôme chromatique du graphe suivant. Combien de colorations y a-t-il avec deux couleurs, avec trois couleurs ? Si une telle coloration existe, donner un exemple.

$P_G = P_{G-e} - P_{G/e}$

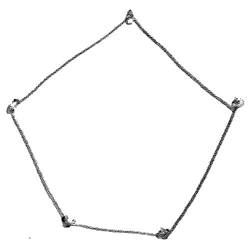
G





Coloration avec 3 couleurs

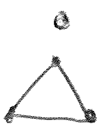
G−e



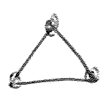
G_1

G/e

G_2



G_3



G_4

Rappel : $P_{C_n} = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$

$P_{C_3} = k(k-1)(k-2)$

$P_{G_3} = k^2 (k-1)(k-2)$

Vérif : deg $P_G = 5 = \#$ sommets

Coeff du k^4 : $P_G = (k^3 - 3k^2 + 2k)(k^2 - 3k + 3)$

$-3 - 3 = -6 = -|A|$ OK

$P_{G_2} = P_{G_3} - P_{G_4} = k^2(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2) = k(k-1)^2(k-2)$

$P_{G_1} = (k-1)^5 - (k-1) = (k-1)[(k-1)^4 - 1] = (k-1)(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k)$

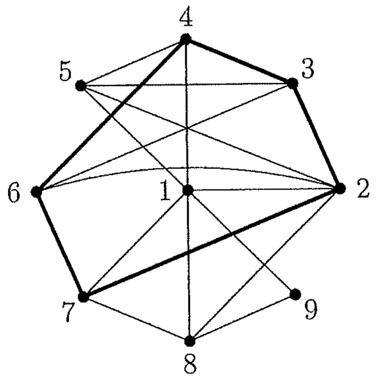
$= k(k-1)(k^3 - 4k^2 + 6k - 4) = k(k-1)(k-2)(k^2 - 2k + 2)$

$P_G = P_{G_1} - P_{G_2} = k(k-1)(k-2)(k^2-2k+2) - k(k-1)^2(k-2)$

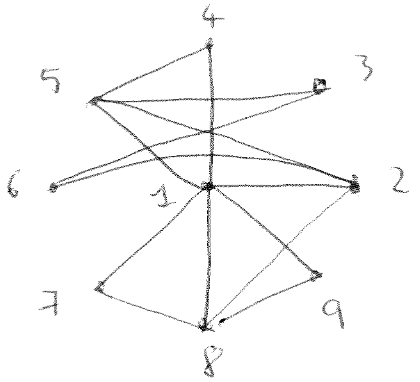
$= k(k-1)(k-2)[k^2 - 2k + 2 - k + 1] = k(k-1)(k-2)(k^2 - 3k + 3)$

$P_G(2) = 0$ colorations avec 2 couleurs $P_G(3) = 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 18$.

2
2. L'objectif de cette question est de construire un cycle eulérien en suivant l'algorithme donné dans le cours. On commence avec le cycle $\varphi = 234672$ indiqué en gras. Indiquer tous les sous-cycles que vous construisez à partir des sommets de φ ainsi que le chemin eulérien qui se déduit.

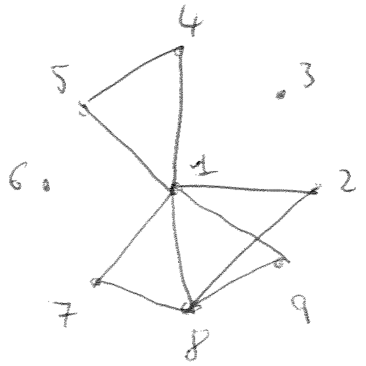


$G - \varphi$



A partir de 2 : cycle $\varphi_1 = 26352$

$G - \varphi - \varphi_1$



à partir de 4 : 4514

—— 7 : 78912817

$\varphi = 234672 \longrightarrow \underbrace{26352}_{2}3\ \underbrace{4514}_{4}\ 6\ \underbrace{78912817}_{7}\ 2$ chemin eulérien.

il contient 19 arêtes

Somme des degrés : $6+6+4+4+4+4+4+4+2 = 38 = 2 \times 18$

OK.