Département de Mathématiques Année Universitaire 2018–19

L3 Maths, DMAT6AAP : Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

mardi 7 mai 2019 08h00. Durée : 3 heures

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

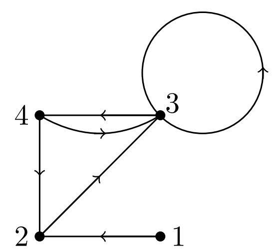
aucun document autorisé, usage de calculatrices interdit,

tous les calculs se font à la main, chaque réponse devra être justifiée.

Trois petites questions pour commencer :

1. Montrer que le polynôme $f(x) = x^2 + 2 \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$ est irréductible mais pas primitif.

2. Calculer la matrice d'adjacence du multigraphe orienté avec boucle :



Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet 4 au sommet 3.

3. Déterminer si les deux suites suivantes sont graphiques ? Dans les cas où la suite est graphique, construire un graphe correspondant, et si c'est possible, un graphe connexe.

$$(5, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad (4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Question sur les corps finis et les codes BCH :

4. Soit $p(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x] = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[x]$.

(a) Montrer que $p(x)$ est irréductible. Combien d'éléments y a-t-il dans le corps $K = \mathbb{F}_2[x]/(p(x))$? Calculer l'inverse multiplicative de $x^2 + x + 1$ dans K.

(b) Montrer que $p(x)$ est primitif.

(c) Utiliser $p(x)$ pour construire le polynôme générateur d'un code BCH de distance construite $s = 2$ sur $\mathbb{F}_2$. Calculer le polynôme générateur $g(x)$ pour ce code. Il s'agit d'un code linéaire de quelle dimension ?

(d) Un mot c est transmis avec ce code et on reçoit le vecteur $r = (1011011) \in {\mathbb{F}_2}^7$ ce qui correspond au polynôme $r(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^5 + x^6 \in \mathbb{F}_2[x]$. Calculer les syndromes r_1, r_2, puis calculer le polynôme localisateur d'erreurs. Corriger le vecteur r afin de trouver le mot c.

SUITE...

Question sur les codes correcteurs :

5. (a) Construire le $[9, 3]$-code linéaire C avec matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la matrice de contrôle H pour C.

(c) Trouver la distance minimale d pour C et en déduire t pour lequel ce code est t-correcteur.

(d) Calculer les syndromes associés aux erreurs de poids $\leq t$.

(e) Parmi les vecteurs reçus $r_1 = (111011110), r_2 = (101001011)$, lesquels sont corrigibles par la méthode des syndromes ? Dans le cas où c'est corrigible, corriger-le.

(On se rappelle qu'un $[n, k]$-code linéaire corréspond à un sous-espace de dimension k dans ${\mathbb{F}_2}^n$)

Question sur les nombres de Ramsey :

6. (a) Montrer que le nombre de Ramsey $R(3, 3) = 6$.

(b) On définit le nombre de Ramsey $R(\ell, \ell, \ell)$ comme le plus petit entier n tel que toute coloration du graphe complet K_n avec <u>trois</u> couleurs contient un sous-K_ℓ monochromatique.

Montrer que $R(3, 3, 3) \leq 17$, c'est à dire, que toute coloration du graphe complet K_{17} avec trois couleurs (disons rouge, bleue et verte) contient un triangle monochromatique. (Indication : Soit X l'ensemble des sommets de K_{17} ; on fixe un sommet $x \in X$ et on définit $R_x := \{y \in X : xy \text{ rouge}\}$, $B_x := \{y \in X : xy \text{ bleue}\}$, $V_x := \{y \in X : xy \text{ verte}\}$, ...)

(Pour information $R(3, 3, 3) = 17$, mais il est difficile d'exposer une coloration de K_{16} avec trois couleurs contenant aucun triangle monochromatique.)

FIN