Arithmétique et applications, graphes et combinatoire

Cours No. 8, Théorie des graphes : nombres de Ramsey

Définition : Le nombre de Ramsey $R(k,\ell)$ est le plus petit entier n tel que toute coloration par deux couleurs, rouge/bleue disons, des arêtes d'un graphe complet d'ordre n contient soit un sous-graphe K_k rouge soit un sous-graphe K_ℓ bleu.

En 1929, Ramsey a montré que ce nombre est fini. En particulier, ce résultat montre que pour un k donné, pour tout graphe assez grand, soit il contient toujours un sous-graphe complet K_k, soit son complément contient un sous-graphe complet K_k. Une interprétation de ce résultat est qu'on peut toujours trouver de l'ordre parmi le désordre assez complexe. Dans le premier théorème on trouve une borne inférieure pour les nombre de Ramsey diagonale $R(k,k)$.

Théorème : Si $\binom{n}{k} \times 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, alors $R(k,k) > n$. En particulier $R(k,k) > [2^{k/2}]$ pour tout $k \geq 3$.

Preuve : On considère une 2-coloration aléatoire des arêtes de K_n, obtenue en coloriant chaque arête indépendamment en chaqu'une de deux couleurs, avec chaque couleur équiprobable. Pour chaque ensemble fixe R de k sommets, soit A_R l'évenement que le sous-graphe induit par R est monochromatique (c'est à dire toutes ses arêtes sont soit rouge soit bleue). On voit que la probabilité de A_R est donnée par $P[A_R] = 2^{1-\binom{k}{2}}$ (pourquoi ?) Le nombre de possibilités pour R est $\binom{n}{k}$ et par suite la probabilité qu'au moins un évenement A_R a lieu est au plus $\binom{n}{k} \times 2^{1-\binom{k}{2}}$ qui est < 1 par hypothèse. Donc avec probabilité positive, aucun des évenements A_R a lieu et il existe une 2-coloration de K_n sans un monochromatique K_k ; c'est à dire $R(k,k) > n$. On remarque que si $k \geq 3$ et on prend $n = [2^{k/2}]$ alors

$$\binom{n}{k} \times 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} \frac{n^k}{2^{k^2/2}} < 1\,,$$

d'où $R(k,k) > [2^{k/2}]$ pour tout $k \geq 3$. $\square$

La preuve ci-dessus est une preuve probabiliste : elle démontre avec probabilité positive qu'il existe une 2-coloration des arêtes de K_n qui ne contient aucun $K_{2\ln_2 n}$ monochromatique. Elle ne donne pas de méthode constructive pour en trouver une telle coloration. Pour le faire on doit essayer toutes les colorations, environ $2^{\binom{n}{2}}$ éssais ! Ce qui n'est pas pratique pour un graphe de grande taille. Il s'agit d'un temps exponentielle en n. La classe des problème qui se résolvent en temps polynomial est noté par $\mathbf{P}$; il s'agit de la classe de problèmes "résolubles".

Exemple (problème des amis et des étrangers) : On montre assez facilement que $R(3,3) = 6$ (exercice). Une interprétation de ce fait est que dans tout ensemble de six personnes, soit au moins trois sont des étrangers mutuels soit au moins trois sont des amis mutuels.

Lemme : $R(r,s) \leq R(r-1,s) + R(r,s-1)$

Preuve : On considère le graphe complet 2-coloré ayant $R(r-1,s)+R(r,s-1)$ sommets (noté par l'ensemble X). On choisit arbitrairment un sommet $x \in X$ et on définit deux ensembles : $M := \{y \in X : xy \text{ est bleue}\}$; $N := \{y \in X : xy \text{ est rouge}\}$. Puisque le graphe a $R(r-1,s) + R(r,s-1) = |M| + |N| + 1$ sommets, il s'ensuit que soit $|M| \geq R(r-1,s)$ soit $|N| \geq R(r,s-1)$. Dans le premier cas M contient un K_s rouge ; de même pour le graphe original. Sinon, M contient un K_{r-1} bleu et $M \cup \{x\}$ contient un K_r bleu ; de même pour le graphe original. Le cas $|N| \geq R(r,s-1)$ est analogue et le lemme est démontré. $\square$

Le résultat suivant se déduit de ce lemme par récurrence.

Théorème (Ramsey 1929). Le nombre $R(k,\ell)$ est fini.

Exercice : 1. Appliquer le lemme pour montrer par récurrence que

$$R(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

2. Montrer que $R(k,2) = k$ pour tout k.
3. Montrer que $R(3,3) = 6$.

En général il est difficile de trouver le nombres de Ramsey. On sait que $R(4,4) = 18$ et que $R(4,5) = 25$ (B. McKay. S. Radziszowski 1995). La valeur de $R(5,5)$ est inconnu, mais on sait qu'il est entre 43 et 49. Avec l'aide des méthodes informatiques on conjecture que $R(5,5) = 43$. Sinon, on n'a que des estimations. Erdős a fait la remarque que si on est attaqué par des aliens beaucoup plus forts que nous qui menacent de détruire la terre si on ne peut pas les donner la valeur de $R(5,5)$, on doit utiliser tous les ordinateurs existants pour essayer de trouver ce nombre. Par contre si ils nous demandent la valeur de $R(6,6)$, notre seule chance est de se battre.