**Arithmétique et applications, graphes et combinatoire**

**Cours No. 5, Théorie des graphes : le polynôme chromatique**

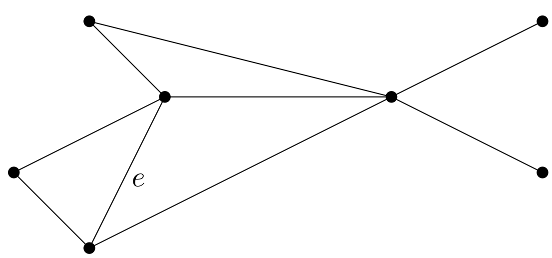
**Définition de** $P_G(k)$ : Le polynôme chromatique a été introduit par G. D. Birkhoff en 1912 pour étudier le problème des quatre couleurs pour un graphe planaire. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre $n$ et soit $k \in \mathbf{N}$. Une coloration (des sommets) d'un graphe est une application $\gamma : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$ (les nombres $1, \ldots, k$ sont les couleurs). La coloration est *propre* si $x \sim y \Rightarrow \gamma(x) \neq \gamma(y)$. La fonction chromatique $P_G(k)$ associée à $G$ est définie comme le nombre de colorations propres de $G$ avec $k$ couleurs. On verra dans la suite qu'il s'agit d'un polynôme de degré $n$.

Exemples : 1. Soit $G = (X, \emptyset)$ le graphe discret d'ordre $n$, alors $P_G(k) = k^n$.

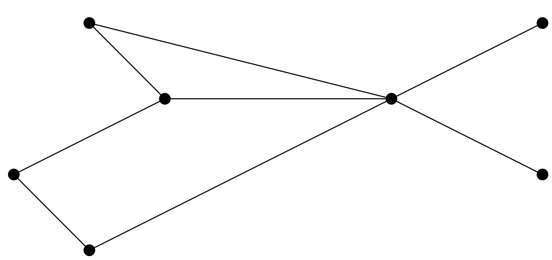
2. Soit $G = (X, A)$ le graphe linéaire avec $n$ sommets, alors $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.

3. Soit $G = K_n$ le graphe complet d'ordre $n$, alors $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$.

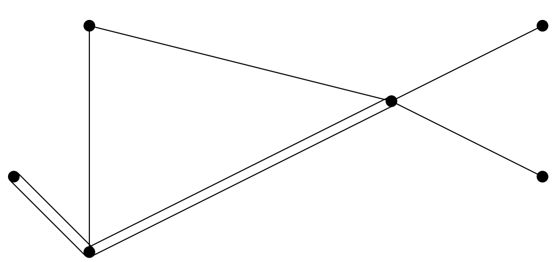
**Deux opérations sur un graphe** : On considère le graphe suivant avec une de ces arêtes indiquée.




On peut d'abord effacer l'arête $e$ pour obtenir le graphe $G - e$ :



Sinon, on peut contracter l'arête $a$ afin d'obtenir le multi-graphe $G/e$ :



Le théorème suivant donne un lien entre les polynômes chromatiques de ces trois graphes.

<u>Théorème</u> : Soit $G = (X, A)$ un graphe simple et soit $e$ une arête de $G$. Soient $G - e$ et $G/e$ les graphes obtenus de $G$ en effacant et en contractant l'arête $e$ respectivement. Alors $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$.

<u>Preuve</u> : On suppose que $e = \overline{xy}$ pour $x, y \in X$. Le nombre de $k$-colorations de $G - e$ pour lesquels $x$ et $y$ ont des colours différentes est identique avec ou sans l'arête $e$ et par suite est égale à $P_G(k)$. De même, le nombre de $k$-colorations de $G - e$ pour lesquels $x$ et $y$ one la même couleur est identique à $P_{G/e}(k)$. On remarque que le graphe $G/e$ n'est pas nécessairement simple, mais puisque $x$ et $y$ sont des sommets distincts, une contraction ne crée pas des boucles. En plus on peut ignorer les arêtes multiples car celles-ci n'ont aucun effet sur le calcul de polynôme chromatique (car des sommets adjacents restent adjacents indépendamment du nombre d'arêtes entre eux). Il s'ensuit que le nombre de $k$-colorations de $G - e$ est $P_G(k) + P_{G/e}(k)$ d'où le resultat. $\square$

<u>Corollaire</u> : La fonction chromatique d'un graphe simple est polynomiale.

<u>Preuve</u> : On commence avec un graphe simple $G$, puis on choisit une arête comme dans la preuve ci-dessus afin d'obtenir les deux graphes $G - e$ et $G/e$ (on peut remplacer les arêtes multiples dans $G/e$ par des arêtes simples). On continue de la même façon en choisissant des nouvelles arêtes dans $G - e$ et $G/e$ pour obtenir quatre nouvelles graphes. Ce processus termine quand tous les graphes qui en résulte sont des graphes discrets dont on connait le polynôme chormatique ($k^n$). On voit alors que la fonction chromatique est la somme des polynômes donc polynomiale.

$\square$

<u>Remarques</u> : 1. Puisqu'il n'y a aucune coloration d'un graphe avec zéro couleurs, on a toujours $P_G(0) = 0$ c'est à dire il n'y a pas de terme constante. A part le graphe discret, il n'y aucune coloration avec une couleur et donc $P_G(1) = 0$ ; autrement dit la somme des coefficients est nulle.

2. Les coefficients du polynôme chromatique sont de signes alternées et la valeur absolu du coefficient de $k^{n-1}$ corréspond au nombre d'arêtes du graphe. On montrera ces propriétés dans la suite.

<u>Exercices</u> : 1. Calculer le polynôme chromatique pour le graphe cyclique $C_n$.

2. Calculer le polynôme chromatique du graphe indiqué comme exemple ci-dessus.

**Référence** : 1. R. Diestel, Graph Theory, Springer 2005.