Géométrie algébrique

§5. Applications rationnelles et birationnelles

Un anneau commutatif unitaire est dit *intègre* s'il est différent de l'anneau nul et s'il est sans diviseur de zéro ($ab = 0 \Rightarrow$ soit $a = 0$ soit $b = 0$). A un anneau intègre A, on peut associer son corps des fractions :

$$S := \left\{ \frac{a}{b} := [a,b]_\sim : a \in A, b \in A^*,\ (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \right\} .$$

Par exemple, si $A = \mathbf{Z}$, son corps des fraction est $\mathbf{Q}$; si $A = \mathbb{K}[x]$, son corps des fractions est l'ensemble des fonctions rationnelles $R_{\mathbb{K}}[x]$.

Un exemple fondamental d'un anneau intègre est donné par

$$A(X) := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X)\,,$$

où X est une variété algébrique irréductible dans $\mathbb{K}^n$. En effet $I(X)$ est premier et par définition le quotient $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ est intègre. L'anneau $A(X)$ s'appelle *l'anneau des coordonnées* sur X. On considère $A(X)$ comme l'anneau des fonctions polynomiales sur X:

deux polynomiales $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ déterminent la même fonction sur X si et seulement si $(f - g)(\vec{x}) = 0$ pour tout $\vec{x} \in X$ si et seulement si $(f - g) \in I(X)$.

Le corps des fractions de l'anneau des coordonées s'appelle *le corps des fractions (ou fonctions rationelles) sur X* ; on l'écrit $K(X)$. Les éléments de $K(X)$ sont des classes d'équivalences des couples des classes d'équivalence des éléments de $\mathbb{K}[x]$! Pour ne pas s'encombrer avec la notation, on les écrit tout simplement comme $f(x)/g(x)$ pour deux polynômes $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ avec $g(x) \notin I(X)$.

Cas des variétés projectives. Soit $X \subset \mathbb{K}P^n$ une variété projective irréductible et soit $I(X)$ son idéal homogène. L'anneau

$$S(X) := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I(X)\,,$$

s'appelle *l'anneau des coordonnées homogènes sur X*. Cette fois-ci les éléments de $S(X)$ ne déterminent pas les fonctions rationnelles sur X, car les coordonnées homogénes ne sont que déterminées à un multiple scalaire près. Il faut alors prendre le quotient de deux polynômes homogènes du même degré:

Définition : Soit

$$S(X)^{(d)} := \{f^{(d)} : f \in S(X)\}$$

la partie de degré d de $S(X)$. Il est bien défini car $f \in I(X) \Rightarrow f^{(d)} = 0$: I homogène entraîne $f^{(d)} \in I$ pour chaque $f \in I$. On définit le corps des fonctions rationelles sur X par

$$K(X) := \{f/g : f, g \in S(X)^{(d)} \text{ pour un } d, \text{ et } g \neq 0\} .$$

Applications polynomiales : Soient $X \subset \mathbb{K}^m$ et $Y \subset \mathbb{K}^n$ deux variétés affines avec X irréductible. Une application $\varphi : X \to Y$ est *polynomiale* (ou *régulière*) s'il existent polynômes $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ tels que $\varphi(a_1, \ldots, a_m) = (g_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, g_n(a_1, \ldots, a_m))$ pour tout $(a_1, \ldots, a_m) \in X$.

Si en plus Y est irréductible, toute application polynomiale $\varphi : X \to Y$ induit un homomorphisme $\widetilde{\varphi} : A(Y) \to A(X)$ défini par $\widetilde{\varphi}(f) = f \circ \varphi$.

Proposition : Soient $X \subset \mathbb{K}^m$ et $Y \subset \mathbb{K}^n$ deux variétés affines irréductibles. Il y a une correspondance bijective entre les applications polynomiales $\varphi : X \to Y$ et les homomorphismes $\widetilde{\varphi} : A(Y) \to A(X)$. Toute φ est la restriction d'une application polynomiale de $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$.

Preuve : On écrit $(x_1, \ldots, x_m)$ pour les coordonnées canoniques sur $\mathbb{K}^m$, et $(y_1, \ldots, y_n)$ pour les coordonnées canoniques sur $\mathbb{K}^n$. Dans la preuve on écrit $\overline{f}$ pour la classe de $f \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ dans $A(Y)$. Soit $\alpha : A(Y) \to A(X)$ un homomorphisme. Soit $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ tel que $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{g_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\varphi = (g_1, \ldots, g_n)$ est une application polynomiale de $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ qui détérmine alors $\widetilde{\varphi} : A(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to A(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$. On voit que $\widetilde{\varphi}(I(Y)) \subset I(X)$, d'où $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$ et φ détérmine une application polynomiale de X dans Y. On vérifie également que $\widetilde{\varphi} = \alpha$. q.e.d.

Une application polynomiale $\varphi : X \to Y$ est un *isomorphisme* s'il existe une application polynomiale $\psi : Y \to X$ telle que $\psi \circ \varphi = Id_X$ et $\varphi \circ \psi = Id_Y$. La proposition ci-dessus montre que deux variétés affines sont isomorphes si et seulement si les anneaux de coordonnées $A(X)$ et $A(Y)$ sont isomorphes sur $\mathbb{K}$.

Un changement de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$ est une application polynomiale bijective $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ de degré 1.

Cas projectif : Dans le cas où $X \subset \mathbb{K}P^m$ et $Y \subset \mathbb{K}P^n$ sont des variétés projectifs irréductibles, une application $\varphi : X \to Y$ est *polynomiale* (ou *régulière*) s'il existent polynômes <u>homogènes du même degré</u> $g_0, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ tels que $\varphi([a_0, a_1, \ldots, a_m]) = [g_0(a_0, \ldots, a_m), g_1(a_0, \ldots, a_m), \ldots, g_n(a_0, \ldots, a_m)]$ pour tout $[a_0, \ldots, a_m] \in X$.

Exemple : Soit $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^2$ l'application $\varphi[s,t] = [s^2, st, t^2]$. Soit $X = \varphi(\mathbf{C}P^1)$. On montre que X est une variété projective avec idéal $I = (xz - y^2)$. Clairement $\varphi(\mathbf{C}P^1) \subset V(I)$. Reciproquement, soit $\vec{x} = [x,y,z] \in V(I)$. Puisque $xz - y^2 = 0$ il s'ensuit que soit $x \neq 0$ soit $z \neq 0$; sans perdre la généralité on suppose que $x \neq 0$. Puis $[x,y]$ est un point qui est appliqué en $[x^2, xy, y^2] = [x^2, xy, xz] = [x,y,z]$, qui démontre l'affirmation.

Soit X une variété algébrique affine irréductible et soit Y une variété algébrique affine. Une *application rationnelle* $\varphi : X \to Y$ est une applications définies par des fonctions rationnelles : $\varphi(x) = (r_1(x), \ldots, r_n(x))$ pour $r_j \in R_{\mathbb{K}}[x]$ pour chaque $j = 1, \ldots, n$ et pour chaque $x \in X$. Si $r_j(x) = f_j(x)/g_j(x)$, on remarque que l'application n'est pas définie aux points $x \in X$ où $g_j(x) = 0$. L'ensemble des ces points constituent un sous-ensemble fermé de X dans la topologie de Zariski.

Si en plus Y est irréductible, on dit que φ est *birationnelle*, s'il existe une application rationnelle $\psi : Y \to X$ telle que $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont les applications identité lorsqu'elles sont définies.

Une variété est dite rationnelle si elle est birationnelle à un espace affine, par exemple, le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une courbe rationnelle car les formules $x = 2t/(1+t^2)$, $y = (1-t^2)/(1+t^2)$ déterminent une application rationnelle de la droite affine dans le cercle (avec reciproque $(x,y) \mapsto (1-y)/x$).

Cas projectif : On remarque que si une application φ entre variétés projectives $X \subset \mathbb{K}P^m$ et $Y \subset \mathbb{K}P^n$ (X irréductible) est définie par des fonctions rationnelles : $\varphi([x_0, \ldots, x_m]) = [r_0(x_0, \ldots, x_m), \ldots r_n(x_0, \ldots, x_m)]$, on peut multiplier par les ppcm des dénominateurs des r_j afin que la partie droite soit définies par des polynômes (nécessairement homogènes du même degré) : $\varphi = [g_0, \ldots g_n]$, eventuellement avec des points $x \in X$ où $g_0(x) = \cdots = g_n(x) = 0$, c'est à dire où l'application n'est pas définie. L'ensemble de ces points est un fermé dans X dans la topologie de Zariski. Ainsi, on a la définition suivante.

Soit X une variété projective irréductible et soit Y une variété projective. Une *application rationnelle* $\varphi : X \to Y$ est une classe d'équivalence de couples (U, γ) telle que $U \subset X$ est un ouvert dense dans la topologie de Zariski et $\gamma : U \to Y$ est polynomiale, avec $(U,\gamma) \sim (V,\eta)$ ssi $\gamma|_{U\cap V} = \eta|_{U\cap V}$. L'application φ est *birationnelle* ssi il existe une application rationnelle $\psi : Y \to X$ qui est la reciproque dans le sens ci-dessus (sur un ouvert dense). Une application birationnelle détermine un isomorphisme polynomial d'un ouvert non-vide de X sur un ouvert non-vide de Y.

L'application $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to X$ dans l'exemple ci-dessus est birationnelle : l'application reciproque $\varphi^{-1} : X \to \mathbf{C}P^1$ est donnée par

$$\varphi^{-1}[x,y,z] = [x,y] \text{ sur } X \setminus \{x=y=0\} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}[x,y,z] = [y,z] \text{ sur } X \setminus \{y=z=0\}\,.$$

On note qu'au moins un des points $[x,y]$, $[x,z]$ est bien défini, et s'ils sont tous les deux définis alors ils sont égaux car $xz = y^2$.

Théorème: Si X et Y sont irréductibles, il y a une corréspondance entre les applications rationnelles $\varphi : X \to Y$ est les homorphismes de corps $\widetilde{\varphi} : K(Y) \to K(X)$.

Preuve: Comme pour la proposition ci-dessus.

Exemple: $\mathbf{C}P^2$ est birationelle à $X := \{[w,x,y,z] \in \mathbf{C}P^3 : xy - wz = 0\}$; ces variétés ne sont pas isomorphes. En effet, deux droites dans $\mathbf{C}P^2$ interesectent, mais les droites dans X définies par $w = x = 0$ et $y = z = 0$ n'interesectent pas car un tel point aurait toutes ses coordonnées zéro. Afin de calculer le corps des fractions, on passe a un sous-ensemble affine (ce qui ne modifie pas le corps car une application rationnelle ne dépend que sur son comportment sur un ouvert) sur lequel $w \neq 0$; dans l'espace projectif on prend $w = 1$ et l'on l'identifie avec un sous-ensemble de l'espace affine des xyz. L'anneau des coorodonnées sur X est

$$A(X) = \mathbf{C}[x,y,z]/(xy - z) \cong \mathbf{C}[x,y]$$

par l'application $p(x,y,z) \mapsto p(x,y,xy)$. Le corps des fractions est donc $\mathbf{C}(x,y)$, isomorphe à celui de $\mathbf{C}P^2$. On note que ce n'était pas nécessaire d'expliciter l'application rationnelle : *exercice*: trouver explicitement cette application.

Exemple : On considère $\mathbf{C}P^m$ avec coordonnées $[x_0,\ldots,x_m]$ et $\mathbf{C}P^n$ avec coordonnées $[y_0,\ldots,y_n]$. Soit $\mathbf{C}P^N = \mathbf{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ l'espace projectif avec coordonnées z_{ij} , $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$. Soit $\varphi : \mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^N$ donnée par $z_{ij} = x_i y_j$. Alors l'image $X = \varphi(\mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n)$ est une variété projective dans $\mathbf{C}P^N$ avec idéal engendré par les polynômes homogènes $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}$ pour tout $0 \le i,k \le m$ et $0 \le j,l \le n$. Il s'agit d'un isomorphisme qui s'appelle le plongement de Segre.

Comme cas particulier on considère l'application $\varphi : \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^3$ donnée par

$$\varphi([x_0,x_1],[y_0,y_1]) = [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1]\,.$$

Il s'agit d'un isomorphisme dans la surface quadratique:

$$X = \{[z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}] : z_{00}z_{11} = z_{10}z_{01}\} \subset \mathbf{C}P^3\,.$$

En fait les droites $\mathbf{C}P^1 \times [y_0, y_1]$ et $[x_0, x_1] \times \mathbf{C}P^1$ sont appliquées sur deux familles de droites dans la surface X : X est doublement règlées.

Exercices : 1. Soit $\varphi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ une application polynomiale et soit $X \subset \mathbb{K}^n$ algébrique. Si $\varphi^{-1}(X)$ est irréductible et $X \subset \mathrm{image}(\varphi)$, montrer que X est irréductible.

2. (i) Montrer que $\{(t, t^2, t^3) \subset \mathbf{C}^3 : t \in \mathbf{C}\}$ est une variété affine ; (ii) Montrer que $X = V(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbf{C}^3$ est une variété affine (indication : $y^3 - x^4, z^3 - x^5, z^4 - y^5 \in I(X)$; trouver une application polynomiale de $\mathbf{C}$ dans X).

3. (i) Soit $\varphi : \mathbf{C} \to X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbf{C}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Montrer que φ est une application polynomiale bijective qui n'est pas un isomoprhisme (indication : $\widetilde{\varphi}(A(X)) = \mathbf{C}[t^2, t^3] \subset \mathbf{C}[t] = A(\mathbf{C})$) ;
(ii) Soit $\varphi : \mathbf{C} \to X = V(y^2 - x^2(x+1))$ définie par $\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$; montrer que φ est bijective sauf pour $\varphi(\pm 1) = (0, 0)$.