Géométrie algébrique

§5. Courbes algébriques complexes

Soit $P(x, y)$ un polynôme non-constant en deux variables avec coefficients complexes. On dit que P n'a pas de facteur multiple si P ne s'exprîme pas comme

$$P(x, y) = (Q(x, y))^2 R(x, y)\,,$$

où $Q(x, y)$ et $R(x, y)$ sont polynômes avec Q non-constant.

Conséquence du Nullstellentsatz : Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux polynômes avec coefficients complexes, alors

$$V(P) = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : P(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : Q(x, y) = 0\} = V(Q)$$

$\Leftrightarrow$

il existe entiers positifs m et n tels que P divise Q^n et Q divise P^m

$\Leftrightarrow$

P et Q ont les mêmes facteurs irréductibles eventuellement avec multiplicités différentes.

Il s'ensuit que si P et Q n'ont pas de facteurs multiples, alors $V(P) = V(Q)$ si et seulement si $P(x, y) = \lambda Q(x, y)$ pour $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Si $P(x, y)$ n'a pas de facteurs multiples on appelle

$$C := V(P) = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : P(x, y) = 0\}$$

la courbe algébrique complexe définie par P. Son *degré* est le degré du polynôme P.

Un point $(a, b) \in C$ s'appelle un *point singulier* si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)\,.$$

On écrit l'ensemble de points singuliers comme $sing(C)$; C est dite non-singulière si $sing(C) = \emptyset$.

Une courbe définie par une équation linéaire : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ s'appelle une *droite.*

Lemme : Soit $P(x, y)$ non-nul homogène de degré d, alors P se factorise comme produit de polynômes linéaires :

$$P(x, y) = \prod_{j=1}^{d} (\alpha_j x + \beta_j y)\,,$$

pour des nombres complexes α_j et β_j.

Preuve On écrit P comme

$$P(x,y)=\sum_{r=0}^{d}a_rx^ry^{d-r}=y^d\sum_{r=0}^{d}a_r\left(\frac{x}{y}\right)^r .$$

Soit $e\in\{0,\ldots,d\}$ le plus grand élément tel que a_e soit non-nul. Alors

$$\sum_{r=0}^{d}a_rt^r ,$$

est un polynôme de degré e en t qui se factorise comme

$$\sum_{r=0}^{d}a_rt^r=a_e\prod_{j=1}^{e}(y-\gamma_j) ,$$

pour des nombres $\gamma_j\in\mathbf{C}$. Il s'ensuit que

$$P(x,y)=a_ey^d\prod_{j=1}^{e}(\frac{x}{y}-\gamma_j)=a_ey^{d-e}\prod_{j=1}^{e}(x-\gamma_jy) ,$$

d'où le resultat. q.e.d.

On note que puisque P est polynomial il a un dévelopement Taylor-Lagrange fini:

$$P(x,y)=\sum_{j,k\geq 0}\frac{\partial^{j+k}P}{\partial x^j\partial y^k}(a,b)\frac{(x-a)^j(y-b)^k}{j!k!} ,$$

en tout point $(a,b)\in\mathbf{C}^2$.

La *multiplicité* d'une courbe C définie par $P(x,y)$ en (a,b) est le plus petit entier m tel que

$$\frac{\partial^mP}{\partial x^j\partial y^k}(a,b)\neq 0 ,$$

pour des $j\geq 0$, $k\geq 0$ tels que $j+k=m$. Le polynôme

$$\sum_{j+k=m}\frac{\partial^{j+k}P}{\partial x^j\partial y^k}(a,b)\frac{(x-a)^j(y-b)^k}{j!k!} , \tag{1}$$

est alors homogène de degré m et se factorise comme produit linéaire des polynômes du type

$$\lambda(x-a)+\beta(y-b) .$$

Ce sont les *droites tangentes* à C en (a,b). Un point est non-singulier si et seulement si sa multiplicité m est 1 ; dans ce cas il n'y a qu'une seule droite tangente en (a,b) définie par

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial}{\partial y}(a,b)(y-b)=0 .$$

Un point (a,b) s'appelle un point double (triple...) si sa multiplicité est deux (trois....). Un point singulier (a,b) s'appelle un point *ordinaire* si le polynôme (1) n'a pas de facteurs multiples ; c'est à dire si C présente m droites tangentes distinctes en (a,b).

Exemple : Les courbes

$$y^2 = x^3 + x^2 \qquad \text{et} \qquad y^2 = x^3\,,$$

de degrés trois ont des points doubles à l'origine ; le premier est un point double ordinaire, mais la deuxième ne l'est pas. La courbe

$$(x^4 + y^4)^2 = x^2 y^2\,,$$

a un point singulier de multiplicité quatre à l'origine qui n'est pas ordinaire ; la courbe

$$(x^4 + y^4 - x^2 - y^2)^2 = 9x^2 y^2\,,$$

a un point singulier ordinaire de multiplicité quatre à l'origine.

Une courbe C définie par un polynôme $P(x,y)$ est *irréductible* si P est irréductible; c'est à dire P n'a pas d'autres facteurs que les constantes et les multiples de P. Si $P(x,y)$ se décompose comme produit de facteurs irréductibles :

$$P(x,y) = P_1(x,y) \cdots P_k(x,y)$$

alors les courbes définies par chaque P_j sont appelés les *composantes irréductibles* de C.

Bien évidemment, si $P = QR$ est un polynôme réductible, et $I = (P)$, $J = (Q)$, $K = (R)$ sont les idéaux réspectifs, on a $I = J \cap K$: l'irréductibilité de P correspond au fait que $I = (P)$ soit premier.

Courbes algébriques projectives

Une *transformation projective* $\varphi : \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$ est une bijection dont il existe une transformation linéaire inversible $\widetilde{\varphi} : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ avec

$$\varphi \circ \pi = \pi \circ \widetilde{\varphi}\,,$$

où $\pi : \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}P^n$ est l'application quotiente : $\pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0, \ldots, x_n]$.

Un *hyperplan* dans $\mathbf{C}P^n$ est l'image par π de $V \setminus \{0\}$ où V est un sous-espace linéaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ de dimension n.

Lemme Donné $n+2$ points distincts $p_0, \ldots, p_n, q$ dans $\mathbf{C}P^n$ dont aucun sous-ensemble de $n+1$ points est contenu dans un hyperplan, il existe une transformation projective unique φ pour laquelle $\varphi(p_j) = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0]$ (1 dans la place j) et $\varphi(q) = [1, 1, \ldots, 1]$.

Preuve : Soient $u_0, \ldots, u_n$ et v des points de $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dont leur image par π est $p_0, \ldots, p_n$ et q respectivement. Alors $u_0, \ldots, u_n$ est une base de $\mathbf{C}^{n+1}$ donc il existe une transformation linéaire $\widetilde{\varphi}$ de $\mathbf{C}^{n+1}$ qui applique $u_0, \ldots, u_n$ dans la bases canonique $e_1 m \ldots, e_n$. De plus la condition sur les points $p_0, \ldots, p_n$ et q entraîne que

$$\widetilde{\varphi}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

avec chaque λ_j non-nul. On prend alors la composée de $\widetilde{\varphi}$ avec la transformation linéaire définie par la matrice $diag\{1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n\}$; ce qui détermine une transformation projective qui applique p_j en

$$[0, \ldots, 0, \frac{1}{\lambda_j}, 0 \ldots, 0] = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]\,,$$

et q en $[1, 1, \ldots, 1]$. L'unicité est facile à vérifier. q.e.d.

Corollaire : Par rapport à la topologie quotient, l'espace $\mathbf{C}P^n$ est Hausdorff.
Preuve : On se rappelle qu'on a les homeomorphismes $f_j : U_j \subset \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}^n$ données par

$$f_0([x_0, \ldots, x_n] = (\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}), \quad f_1([x_0, \ldots, x_n]) = (\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}), \ldots$$

où $U_j = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbf{C}P^n : x_j \neq 0\}$. On doit montrer que si p et q sont points distincts de $\mathbf{C}P^n$ alors ils ont des voisinages disjoints. Si p et q appartiennent à un des U_j alors c'est bien le cas par le fait que $\mathbf{C}^n$ est Hausdorff. En particulier c'est le cas pour $p = [1, 0, \ldots, 0]$ et $q = [1, 1, \ldots 1]$ qui appartiennent à U_1.

Plus généralement, on peut trouver des points $p_0, \ldots, p_n$ tels que $p_0 = p$ et aucun sous-ensemble de $n+1$ des $n+2$ points $p_0, \ldots, p_n, q$ sont dans un hyperplan. Par le lemme il existe une transformation projective φ qui applique p dans $[1, 0, \ldots, 0]$ et q dans $[1, 1, \ldots, 1]$. Puisque φ est bijective et continue, le resultat se decoule. q.e.d.

Soit $P(x, y, z)$ un polynôme homogène non-constant avec coefficients complexes. On suppose que P n'a pas de facteurs multiples. Alors la *courbe projective déterminée par* P est l'ensemble algébrique

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbf{C}P^2 : P(x, y, z) = 0\}\,.$$

Son *degré* est le degré de P. La courbe s'appelle *irréductible* si P est irréductible. Une courbe irréductible D définie par un polynôme homogène Q est une *composante* de C si Q divise P.

Un point $[a, b, c] \in C$ est dit *singulier* si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0\,.$$

On écrit l'ensemble de points singulier comme $sing(C)$; si $sin(C) = \emptyset$ on dit que C est *non-singulière*.

Exemple : La courbe définie par $x^2 + y^2 = z^2$ est non-singulière ; la courbe définie par $y^2 z = x^3$ présente un point singulier en $[0, 0, 1]$.

Une courbe projective définie par une équation homogène linéaire $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ (au moins un des α, β, γ non nul) s'appelle une *droite projective.*

La *droite tangente* à la courbe projective C est la droite :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c)x + \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c)y + \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c)z = 0\,.$$

Puisque un sous-ensemble d'un espace Hausdorff est Hausdorff, par le corollaire ci-dessus, une courbe projective est compacte et Hausdorff (par rapport à la topologie quotient).

On identifie $\mathbf{C}^2$ avec l'ouvert $U = \{[x, y, z] \in \mathbf{C}P^2 : z \neq 0\}$ par l'homeomorphisme $f : U \to \mathbf{C}^2$ définie par

$$f([x, y, z]) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\,,$$

avec application reciproque $(x, y) \to [x, y, 1]$. Le complément $\mathbf{C}P^2 \setminus U$ est la droite projective définie par $z = 0$, qu'on identifie avec $\mathbf{C}P^1$ par l'application $[x, y, 0] \to [x, y]$ (la droite à l'infini).

Donnée une courbe projective C définie par $P(x, y, z)$ homogène de degré d, l'intersection $\widetilde{C} = U \cap C$ est la courbe affine dans $\mathbf{C}^2$ définie par le polynôme

$$P(x, y, 1)\,.$$

C'est aussi un polynôme de degré d si z n'est pas un facteur de P, c'est à dire si C ne contient pas la droite à l'infinie $z = 0$.

Reciproquement, si

$$Q(x, y) = \sum_{r+s \leq d} a_{rs} x^r y^s\,,$$

est un polynôme de degré d en deux variable x et y, alors la courbe affine $\widetilde{C}$ définie par Q est l'intersection avec U de la courbe projective C définie par le polynôme homogène

$$P(x, y, z) = z^d Q(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = \sum_{r+s \leq d} a_{rs} x^r y^s z^{d-r-s}\,.$$

L'intersection de cette courbe avec la droite à l'infini est l'ensemble

$$\{[x, y, 0] \in \mathbf{C}P^2 : \sum_{0 \leq r \leq d} a_{r,d-r} x^r y^{d-r} = 0\}\,.$$

Il s'agit d'un polynôme homogène qui se factorise comme produit de facteurs linéaires:

$$\prod_{1 \leq j \leq d} (\alpha_j x + \beta_j y)\,.$$

Les droites $\alpha_j x + \beta_j y = 0$ sont les *asymptotes* de la courbe $\widetilde{C}$ définie par Q dans $\mathbf{C}^2$. Dans $\mathbf{C}P^1 = \mathbf{C}P^2 \setminus U$ ces courbes corréspondent aux points $[-\beta_j, \alpha_j]$; ce sont exactement les points de $C \setminus \widetilde{C}$.

Si C est non-singulier, il en est de même pour $\widetilde{C}$ mais la reciproque n'est pas nécessairement vraie car C peut avoir des points singuliers à l'infini.

Lemme : Soit $[a,b,c]$ un point de C une courbe projective définie par $P(x,y,z) = 0$. Si $c \neq 0$ alors $[a,b,c]$ est non-singulier si et seulement si $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ est non-singulier dans la courbe affine $\widetilde{C} = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : P(x,y,1) = 0\}$. De plus, si D est la droite projective tangente à C en $[a,b,c]$, alors $D \cap U$ s'identifie avec la droite tangente à $\widetilde{C}$ en $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ (sous l'identification $U = \{[x,y,z] \in \mathbf{C}P^2 : z \neq 0\} \cong \mathbf{C}^2$).

Preuve : Pour démontrer ce resultat on applique la relation d'Euler: soit $R(x,y,z)$ homogène de degré m alors

$$x\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = mR(x,y,z)\,,$$

qui se démontre en prenant la dérivée de $R(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^m R(x,y,z)$ en $\lambda = 1$.

On laisse la première partie comme exercice. Pour la deuxième partie, l'intersection avec U de la droite tangente projective :

$$x\frac{\partial P}{\partial x}(a,b,c) + y\frac{\partial P}{\partial y}(a,b,c) + z\frac{\partial P}{\partial z}(a,b,c) = 0$$

est la droite dans $\mathbf{C}^2$ définie par

$$x\frac{\partial P}{\partial x}(a,b,c) + y\frac{\partial P}{\partial y}(a,b,c) + \frac{\partial P}{\partial z}(a,b,c) = 0$$

En appliquant la relation d'Euler aux dérivées partielles (aussi homogènes) on en déduit que c'est exactement la droite

$$\left(x - \frac{a}{c}\right)\frac{\partial P}{\partial x}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1) + \left(y - \frac{b}{c}\right)\frac{\partial P}{\partial y}(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1) = 0\,,$$

qui est la droite tangente à $\widetilde{C}$ en $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$. q.e.d.

Exercice : Montrer que la droite projective dans $\mathbf{C}P^2$ passant par les points $[0,1,1]$ et $[t,0,1]$ intersecte la courbe projective définie par $x^2 + y^2 = z^2$ dans les deux points $[0,1,1]$ et $[2t, t^2-1, t^2+1]$. Montrer qu'il existe une bijection de la droite projective définie par $y = 0$ en C donnée par

$$[t,0,1] \mapsto [2t, t^2-1, t^2+1]\,,$$

et

$$[1,0,0] \mapsto [0,1,1]\,.$$