Géométrie algébrique

§4. Les variétés projectives

On définit l'espace projectif $\mathbb{K}P^n$ comme l'ensemble de sous-espace linéaires de dimension 1 de $\mathbb{K}^{n+1}$:

$$\mathbb{K}P^n = \{[a_0, a_1, \ldots, a_n] : (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ t.q. \ a_k = \lambda b_k \ \forall k$$

Les a_k $(k = 0, \ldots, n)$ s'appellent coordonnées homogènes pour $\mathbb{K}P^n$. Parfois on écrit $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$ au lieu de $[a_0, \ldots, a_n]$. L'inclusion $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}P^n$ donnée par $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto [1, a_1, \ldots, a_n]$ nous servira à comparer les variétés algébriques affines et projectives. On l'appelle *l'espace affine $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}P^n$*.

On veut définir les ensembles algébriques projectifs comme l'ensemble des zéros de polynômes, mais en générale un polynôme quelconque n'est pas bien défini comme fonction des coordonnées homogènes. On considère alors les polynômes f *homogènes*, dont tous ses monômes sont du même degré d. Ce qui équivaut à la condition:

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) \qquad \forall \ \lambda \, .$$

Il n'est pas évident comment caractériser les idéaux dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ qui définiront les ensembles algébriques. Alors chaque polynôme $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ se décompose en ses parties homogènes : $f = \sum_d f^{(d)}$ avec $f^{(d)}$ homogène de degré d pour tout d.

Lemme : *Soit $I \lhd \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un ensemble générateur de I qui consiste des polynômes homogènes ;*

(ii) *Pour chaque $f \in I$ on a $f^{(d)} \in I$ pour tout d.*

Un idéal qui vérifie ces conditions s'appelle un *idéal homogène*.

Preuve : Soit $I = (f_1, \ldots, f_m)$ avec chaque f_k homogène. Alors chaque $f \in I$ s'écrit sous la forme $f = \sum u_k f_k$ pour $u_k \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ (pas nécessairement homogène). Alors $f^{(d)} = \sum (u_k)^{(d - \deg f_k)} f_k \in I$.

Inversement, tout idéal est finiment engendré : $I = (f_1, \ldots, f_m)$. Par l'hypothèse (ii) on sait que $f_k^{(d)} \in I$ pour tout d. Il s'ensuit que I est engendré par les polynômes homogénes $f_k^{(d)}$. q.e.d.

On souligne le fait qu'il n'est pas vrai qu'un idéal homogène ne contient que des polynômes homogènes. Par contre un idéal homogène nous permet de bien définir un ensemble projectif corréspondant.

Soit $I \lhd \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ un idéal homogène (ou juste un ensemble de polynômes homogènes). Alors l'ensemble

$$V(I) := \{[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{K}P^n : f(a_0, \ldots, a_n) = 0 \;\forall\; f \in I\}\,,$$

s'appelle *l'ensemble algébrique défini par* I. Il est bien défini par le lemme ci-dessus. En effet $V(I)$ ne dépend que de l'ensemble générateur de I qui par le lemme peut être considéré comme constitué des polynômes homogènes.

Inversement, soit $X \subset \mathbb{K}P^n$ un sous-ensemble. Soit $I(X)$ l'idéal engendré par les polynômes homogènes f dans $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tels que $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $[a_0, \ldots, a_n] \in X$. Par sa construction $I(X)$ est un idéal homogène; on l'appelle l'idéal de X.

Exemple : Soit $L \subset \mathbb{K}^{n+1}$ un sous-ensemble linéaire de dimension $k+1$; il est donné par $n-k$ équations linéaires dans les coordonnées de $\mathbb{K}^{n+1}$. L'image par l'application quotiente : $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}P^n$ s'appelle *un sous-espace linéaire de* $\mathbb{K}P^n$ *de dimension* k. C'est le sous-espace de $\mathbb{K}P^n$ donné par les mêmes équations linéaires (homogène de degré 1). Il est isomorphe (dans un sens à définir) à $\mathbb{K}P^k$. Par exemple, la droite:

$$\{x_2 = x_3 = 0\} = \{[a_0, a_1, 0, 0] \in KP^3\} \subset \mathbb{K}P^3\,,$$

est isomorphe à $\mathbb{K}P^1$.

Exemple : On considère les deux coniques dans $\mathbb{K}^2$:

$$X_1 = \{x_2 = {x_1}^2\} \quad \text{et} \quad X_2 = \{x_1 x_2 = 1\}\,.$$

On veut les compactifier à des ensembles algébriques de $\mathbb{K}P^2$. Il faut alors que les polynômes qui les déterminent soient homogènes. Pour achever l'homogénéité on utilise la coordonnée x_0 qui prend la valeur 1 sur l'espace affine $\mathbb{K}^2 \hookrightarrow \mathbb{K}P^2$. On définit

$$\widetilde{X}_1 = \{x_0 x_2 = {x_1}^2\} \quad \text{et} \quad \widetilde{X}_2 = \{x_1 x_2 = {x_0}^2\}\,,$$

dans $\mathbb{K}P^2$.

On appelle les points à l'infini les points où $x_0 = 0$. Si l'on considère $\widetilde{X}_1$. A l'infini, si on a $x_0 = 0$ on a $x_1 = 0$ aussi, donc, nécessairement $x_2 \neq 0$, car on ne peut pas avoir $x_0 = x_1 = x_2$ simultanément dans l'espace projectif. On a alors ajouté le seul point $[0, 0, 1]$ à l'infini.

On applique le même processus pour $\widetilde{X}_2$: puisque $x_0 = 0$, alors $x_1 x_2 = 0$ et on voit qu'il y a deux points : $[0, 1, 0]$ et $[0, 0, 1]$ à l'infini.

On remarque que $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ sont identiques à une permutation des coordonnées près. Ce sont des variétés isomorphes (toujours à définir). En fait il n'exite qu'une seule conique dans $\mathbb{K}^2$ à un isomorphisme près.

Comme pour le cas affine, on a les propriétés suivantes :

• Soient $I_1 \subset I_2$ idéaux homogènes dans $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, alors $V(I_2) \subset V(I_1)$;

• Soient $\{I_k\}$ une famille d'idéaux homogènes dans $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, alors $\cap_k V(I_k) = V(\cup_k I_k) \subset \mathbb{K}P^n$;

• Soient $I_1, I_2 \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ idéaux homogènes, alors $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) \subset \mathbb{K}P^n$.

Ce qui nous permet de définir la topologie de Zariski sur $\mathbb{K}P^n$ comme la topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques. Irréductibilité est un concept topologique d'où on définit les variétés algébriques dans $\mathbb{K}P^n$ comme les ensembles algb́riques irréductibles. Un ensemble algébrique dans $\mathbb{K}P^n$ est irréductible si et seulement si son idéal $I(X)$ est premier.

On veut comprendre la corréspondance entre les variétés affines dans $\mathbb{K}^{n+1}$ et les variétés projectives dans $\mathbb{K}P^n$ donnée par le même idéal homogène. Un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{K}^{n+1}$ s'appelle un *cône* s'il est non-vide et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$(a_0, \dots, a_n) \in X \quad \Rightarrow \quad (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \in X .$$

Soit $X \subset \mathbb{K}P^n$ un ensemble algébrique, alors le cône sur X est l'ensemble:

$$C(X) := \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} : [a_0, \dots, a_n] \in X\} \cup \{0\} .$$

En effet c'est un ensemble algébrique dans $\mathbb{K}^{n+1}$ qui est une réunion de droites passant par l'origine.

Donné un idéal homogène I dans $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. On écrit $V_A(I)$ pour la variété affine corréspondant dans $\mathbb{K}^{n+1}$, et $V_P(I)$ pour la variété projective correspondante dans $\mathbb{K}P^n$. La preuve du lemme suivant est une conséquence des définitions.

Lemme

(i) Soit $I \subsetneq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un idéal homogène. Si $X = V_P(I) \subset \mathbb{K}P^n$, alors $C(X) = V_A(I) \subset \mathbb{K}^{n+1}$.

(ii) Reciproquement, si $X \subset \mathbb{K}P^n$ est un ensemble algébrique projectif et $I(X) \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ est son idéal corréspondant, alors $I(C(X)) = I(X)$.

Autrement dit, il y a une corréspondance entre les ensembles algébriques projectifs dans $\mathbb{K}P^n$ et les cônes affines dans $\mathbb{K}^{n+1}$, donnée par l'ensemble des zéros du même idéal homogène (différent de l'idéal (1)) soit dans $\mathbb{K}P^n$ soit dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

On note que l'idéal homogène $(x_0, \ldots, x_n)$ ne détermine aucun zéro dans $\mathbb{K}P^n$, même si cet idéal n'est pas égale à (1). Il faut en tenir compte pour bien exprîmer les corréspondances données par V et I.

Proposition (version projective du Nullstellensatz) On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement fermé.

(i) Si $X_1 \subset X_2$ sont ensembles algébriques dans $\mathbb{K}P^n$, alors $I(X_2) \subset I(X_1)$;

(ii) Pour un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{K}P^n$ on a $V_P(I(X)) = X$;

(iii) Pour tout idéal homogène $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tel que $V_P(I)$ est non-vide, on a $I(V_P(I)) = \sqrt{I}$;

(iv) Pour tout idéal homogène $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tel que $V_P(I)$ est vide, soit $I = (1)$ soit $\sqrt{I} = (x_0, \ldots, x_n)$.

Preuve : les démonstrations de (i) et (ii) sont identiques au cas affine. Pour (iii), on suppose que $X = V_P(I))$. Alors

$$I(V_P(I)) = I(X) = I(C(X)) = I(V_A(X)) = \sqrt{I}\,,$$

par le Nullstellensatz pour les variétés affines. Pour la partie (iv), si $V_P(I)$ est vide, soit $V_A(I)$ est vide soit il contient le seul point $\{0\}$. Ce qui nous ramène à la conclusion que $I = (1)$ ou $\sqrt{I} = (x_0, \ldots, x_0)$ (voir § 2, corollaire 0.7). q.e.d.

Applications entre variétés algébriques.

Un anneau commutatif unitaire est dit *intègre* s'il est différent de l'anneau nul et s'il est sans diviseur de zéro. Un exemple fondamental est donné par

$$A(X) := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(X)\,,$$

où X est un ensemble algébrique irréductible dans $\mathbb{K}^n$. En effet $I(X)$ est premier et par définition le quotient $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$ est intègre. L'anneau $A(X)$ s'appelle *l'anneau des coordonnées* sur X. On considère $A(X)$ comme l'anneau des fonctions polynomiales sur X:

deux polynomiales $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ déterminent la même fonction sur X si et seulement si $(f - g)(\vec{x}) = 0$ pour tout $\vec{x} \in X$ si et seulement si $(f - g) \in I(X)$.

Donné un anneau intègre R, on peut définir le corps des fractions comme l'ensemble des couples (f, g) avec $f, g \in R$, $g \neq 0$, modulo la relation d'équivalence :

$$(f, g) \sim (f', g') \quad \Leftrightarrow \quad fg' - gf' = 0\,.$$

On écrit $[f,g]_\sim$ comme f/g. Le corps des fractions de l'anneau des coordonées s'appelle *le corps des fractions (ou fonctions rationelles) sur* X ; on l'écrit $K(X)$.

Cas des variétés projectives. Soit $X \subset \mathbf{C}P^n$ un ensemble algébrique projective irréductible et soit $I(X)$ son idéal homogène. L'anneau

$$S(X) := \mathbf{C}[x_0,\ldots,x_n]/I(X)\,,$$

s'appelle *l'anneau des coordonnées homogènes sur* X. Cette fois ci les éléments de $S(X)$ ne déterminent pas les fonctions rationnelles sur X, car les coordonnées homogénes ne sont que déterminées à un multiple scalaire près. Il faut alors prendre le quotient de deux polynômes homogènes du même degré:

Définition : Soit

$$S(X)^{(d)} := \{f^{(d)} : f \in S(X)\}$$

la partie de degré d de $S(X)$. Il est bien défini car $f \in I(X) \Rightarrow f^{(d)} = 0$: I homogène entraîne $f^{(d)} \in I$ pour chaque $f \in I$. On définit le corps des fonctions rationelles sur X par

$$K(X) := \{f/g : f,g \in S(X)^{(d)} \text{ pour un } d, \text{ et } g \neq 0\}\,.$$

Applications polynomiales : On voudrait classifier à isomorphisme près les ensemble algébriques irréductibles. On verra dans la suite qu'on est amené a définir une équivalence *birationnelle* entre variétés.

On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement fermé. Soit $X \subset \mathbb{K}^n$ un ensemble algébrique irréductible et soit $A(X)$ son anneau des coordonnées. Pour $U \subset X$ un ouvert par rapport à la topologie de Zariski. On définit $\mathcal{O}_X(U) := \{f/g : f,g \in A(X), g(x) \neq 0\, \forall x \in U\}$. Il s'agit de l'ensemble des fonctions régulières sur U.

Proposition : Soit $U = X_f = X \setminus \{f = 0\}$. Alors $\mathcal{O}(X_f) = \{g/f^r : g \in A(X)\}$. En particulier, $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$: toute fonction régulière sur X est polynomiale.

Soient $X \subset \mathbb{K}^m$ et $Y \subset \mathbb{K}^n$ deux ensembles algébrique affines avec X irréductible. Une application $\varphi : X \to Y$ est *régulière* s'il existe polynômes $g_1,\ldots,g_n \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_m]$ tels que $\varphi(a_1,\ldots,a_m) = (g_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,g_n(a_1,\ldots,a_m))$ pour tout $(a_1,\ldots,a_m) \in X$.

Toute application régulière $\varphi : X \to Y$ induit un homomorphisme $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$ défini par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Proposition : Soient $X \subset \mathbb{K}^m$ et $Y \subset \mathbb{K}^n$ deux ensembles algébriques affines irréductibles. Il y a une correspondance bijective entre les applications régulières (polynomiales) $\varphi : X \to Y$ et les homomorphismes $\varphi^* : A(X) \to A(Y)$.

Preuve : Dans la preuve on écrit $\overline{f}$ pour la classe de $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ dans $A(Y)$. Soit $\alpha : A(Y) \to A(X)$ un homomorphisme. Soit $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ tel que $\alpha(\overline{x_i}) = \overline{g_i}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors $\varphi = (g_1, \ldots, g_n)$ est une application polynomiale de $\mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ qui détérmine alors $\varphi^* : A(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to A(\mathbb{K}^m) = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$. On voit que $\varphi^*(I(Y)) \subset I(X)$, d'où $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$ et φ détérmine une application polynomiale de X dans Y. On vérifie également que $\varphi^* = \alpha$. q.e.d.

Une application polynomiale $\varphi : X \to Y$ est un *isomorphisme* s'il existe une application régulière $\psi : Y \to X$ telle que $\psi \circ \varphi = Id_X$ et $\varphi \circ \psi = Id_Y$. La proposition ci-dessus montre que deux variétés affines sont isomorphes si et seulement si les anneaux de coordonnées $A(X)$ et $A(Y)$ sont isomorphes sur $\mathbb{K}$.

Un changement de coordonnées dans $\mathbb{K}^n$ est une application polynomiale bijective $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ de degré 1. Les affirmations ci-dessus restent vraies pour les ensembles algb́riques projectifs si on remplace "polynôme" par "polynômes homogène".

Exemple : Soit $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^2$ l'application $\varphi[s,t] = [s^2, st, t^2]$. Soit $X = \varphi(\mathbf{C}P^1)$. On montre que X est une variété projective avec idéal $I = (xz - y^2)$. Clairement $\varphi(\mathbf{C}P^1) \subset V(I)$. Reciproquement, soit $\vec{x} = [x, y, z] \in V(I)$. Puisque $xz - y^2 = 0$ il s'ensuit que soit $x \neq 0$ soit $z \neq 0$; sans perdre la généralité on suppose que $x \neq 0$. Puis $[x, y]$ est un point qui est appliqué en $[x^2, xy, y^2] = [x^2, xy, xz] = [x, y, z]$, qui démontre l'affirmation. Il s'ensuit que $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to X$ est une application régulière entre ensembles algébriques projectifs.

Soit X un ensemble algébrique irréductible et Y un ensemble algébrique quelconque. Une *application rationnelle* $\varphi : X \to Y$ est une classe d'équivalence de couples (U, γ) telle que $U \subset X$ est un ouvert dense dans la topologie de Zariski et $\gamma : U \to Y$ est régulière avec $(U, \gamma) \sim (V, \eta)$ ssi $\gamma|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}$. Concrètement, une application rationnelle s'exprîme en coordonnées en termes des fonctions rationnelles. L'application φ est *birationnelle* ssi il existe une application rationnelle $\psi : Y \to X$ qui est la reciproque dans le sens ci-dessus (sur un ouvert dense). Une application birationnelle détermine un isomorphisme d'un ouvert non-vide de X sur un ouvert non-vide de Y. Dans le cadre projective, on peut multiplier les fonctions rationnelles par le ppcm de leurs dénominateurs afin de rendre toute application rationnelle en une application polynomiale.

L'application $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to X$ dans l'exemple ci-dessus est birationnelle : l'application reciproque $\varphi^{-1} : X \to \mathbf{C}P^1$ est donnée par

$$\varphi^{-1}[x,y,z] = [x,y] \text{ sur } X \setminus \{x=y=0\} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}[x,y,z] = [y,z] \text{ sur } X \setminus \{y=z=0\}\,.$$

On note qu'au moins un des points $[x,y]$, $[x,z]$ est bien défini, et s'ils sont tous les deux définis alors ils sont égaux car $xz = y^2$. Mais il suffit de connaître l'une de ces deux reciproques afin d'affirmer que l'application est birationnelle.

Une variété est dite rationnelle si elle est birationnelle à un espace affine, par exemple, le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une courbe rationnelle car les formules $x = 2t/(1+t^2)$, $y = (1-t^2)/(1+t^2)$ déterminent une application rationnelle de la droite affine dans le cercle (avec reciproque $(x,y) \mapsto (1-y)/x$).

Théorème: Il y a une corréspondance entre les applications rationnelles $\varphi : X \to Y$ est les homorphismes de corps $\widetilde{\varphi} : K(X) \to K(Y)$.

Preuve: Comme pour la proposition ci-dessus.

Exemple: $\mathbf{C}P^2$ est birationelle à $X := \{[w,x,y,z] \in \mathbf{C}P^3 : xy - wz = 0\}$; ces variétés ne sont pas isomorphes. En effet, deux droites dans $\mathbf{C}P^2$ interesectent, mais les droites dans X définies par $w = x = 0$ et $y = z = 0$ n'interesectent pas car un tel point aurait toutes ses coordonnées zéro. Afin de calculer le corps des fractions, on passe a un sous-ensemble affine (ce qui ne modifie pas le corps car une application rationnelle ne dépend que sur son comportment sur un ouvert) sur lequel $w \neq 0$; dans l'espace projectif on prend $w = 1$ et l'on l'identifie avec un sous-ensemble de l'espace affine des xyz. L'anneau des coorodonnées sur X est

$$A(X) = \mathbf{C}[x,y,z]/(xy - z) \cong \mathbf{C}[x,y]$$

par l'application $p(x,y,z) \mapsto p(x,y,xy)$. Le corps des fractions est donc $\mathbf{C}(x,y)$, isomorphe à celui de $\mathbf{C}P^2$. On note que ce n'était pas nécessaire d'expliciter l'application rationnelle : soit $p = [0,0,0,1] \in Q$ et soit $\pi : Q \setminus \{p\} \to \mathbf{C}P^2$ l'application $\pi[w,x,y,z] = [w,x,y]$. Alors π est rationnelle. On peut définir l'application reciproque : $\pi^{-1}[w,x,y] = [w^2, wx, wy, xy]$.

Le plongement de Sègre (voir ci-dessous) : $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^3$, donné par

$$([x_0,x_1],[y_0,y_1]) \mapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1, y_0, x_1, y_1]$$

montre que Q est ohméomorphe à $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$.

Exemple : On considère $\mathbf{C}P^m$ avec coordonnées $[x_0, \ldots, x_m]$ et $\mathbf{C}P^n$ avec coordonnées $[y_0, \ldots, y_n]$. Soit $\mathbf{C}P^N = \mathbf{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ l'espace projectif avec coordonnées z_{ij} , $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$. Soit $\varphi : \mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^N$ donnée par $z_{ij} = x_i y_j$. Alors l'image $X = \varphi(\mathbf{C}P^m \times \mathbf{C}P^n)$ est une variété projective dans $\mathbf{C}P^N$ avec idéal engendré par les polynômes homogènes $z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}$ pour tout $0 \leq i, k \leq m$ et $0 \leq j, l \leq n$. Il s'agit d'un isomorphisme qui s'appelle le plongement de Segre.

Comme cas particulier on considère l'application $\varphi : \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^3$ donnée par

$$\varphi([x_0, x_1], [y_0, y_1]) = [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1] \, .$$

Il s'agit d'un isomorphisme dans la surface quadratique:

$$X = \{[z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}] : z_{00}z_{11} = z_{10}z_{01}\} \subset \mathbf{C}P^3 \, .$$

En fait les droites $\mathbf{C}P^1 \times [y_0, y_1]$ et $[x_0, x_1] \times \mathbf{C}P^1$ sont appliquées sur deux familles de droites dans la surface X : X est doublement règlées.

Exercices : 1. Soit $\varphi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ une application polynomiale et soit $X \subset \mathbb{K}^n$ algébrique. Si $\varphi^{-1}(X)$ est irréductible et $X \subset \text{image}(\varphi)$, montrer que X est irréductible.

2. (i) Montrer que $\{(t, t^2, t^3) \subset \mathbf{C}^3 : t \in \mathbf{C}\}$ est une variété affine ; (ii) Montrer que $X = V(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbf{C}^3$ est une variété affine (indication : $y^3 - x^4, z^3 - x^5, z^4 - y^5 \in I(X)$; trouver une application polynomiale de $\mathbf{C}$ dans X).

3. (i) Soit $\varphi : \mathbf{C} \to X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbf{C}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$. Montrer que φ est une application polynomiale bijective qui n'est pas un isomoprhisme (indication : $\widetilde{\varphi}(A(X)) = \mathbf{C}[t^2, t^3] \subset \mathbf{C}[t] = A(\mathbf{C})$) ;
(ii) Soit $\varphi : \mathbf{C} \to X = V(y^2 - x^2(x+1))$ définie par $\varphi(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$; montrer que φ est bijective sauf pour $\varphi(\pm 1) = (0, 0)$.