Géométrie algébrique

Introduction – exemple de référence

La géométrie algébrique concerne l'étude des systèmes d'équations polynomiales en plusieurs variables ; notamment, on s'intéresse à la structure géométrique de l'ensemble des solutions. On verra un va-et-vient entre l'algèbre commutative (les anneaux, idéaux,....) et les variétés affines et projectives (des courbes, surfaces,..., pas forcément lisses).

Exemple 1 : On considère l'ensemble

$$R := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y^2 = x(x-1)\} \subset \mathbf{R}^2 .$$

Il s'agit de l'hyperbole:

$$y^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 . \tag{1}$$

Afin de trouver une représentation plus nette, on peut introduire des coordonnées homogènes en replaçant x et y par x/z et y/z ; on obtient l'équation:

$$y^2 - x^2 + xz = 0 . \tag{2}$$

Il s'agit d'une équation *homogène* : si l'on replace (x, y, z) par $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ $(\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ l'équation reste invariante. Si $z = 1$ on a l'équation (1). L'équation (2) est une équation définie dans le plan projectif $\mathbf{R}P^2$.

Le plan projectif est l'espace de toutes les droites passant par l'origine dans $\mathbf{R}^3$; en effet c'est l'espace quotient en identifiant (x, y, z) avec $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. On écrit les points de cet espace comme $[x, y, z]$ ou comme $[x : y : z]$ pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$; ce sont les *coordonées homogènes.* On peut aussi considérer cet espace comme le plan compactifié en ajoutant une droite à l'infini; il s'agit de la droite $[x, y, 0]$ (plutôt un cercle). On remarque que l'hyperbole défini par (1) converge asymptotiquement vers la réunion des deux droites $y = x$ et $y = -x$, ce qui corréspondent aux deux points $[1, 1, 0]$ et $[1, -1, 0]$ à l'infini. Dans $\mathbf{R}P^2$ l'ensemble des points vérifiant l'équation (2) est topologiquement un cercle.

Exemple 2 : On complexifie l'exemple 1 : on considère l'ensemble

$$C := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : y^2 = x(x-1)\} \subset \mathbf{C}^2 .$$

On peut poser : $y = \pm\sqrt{x(x-1)}$, d'où on a l'impression que l'ensemble des solutions s'identifie avec deux copies du plan complexe en identifiant les points 0 et 1 de chaque plan. Non !

Comme dans le cas réel, on va étudier l'équation homogène :

$$y^2 - x^2 + xz = 0\,, \tag{3}$$

dans l'espace projectif $\mathbf{C}P^2$ (même définition en remplaçant le corps des réels par les complexes). Récrire (3) comme :

$$-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 0\,.$$

Effectuer le changement de variables :

$$X = \mathrm{i}\left(x - \frac{z}{2}\right), \qquad Y = y, \qquad Z = \frac{z}{2}\,.$$

Il s'agit d'une transformation linéaire inversible. Dans la suite on appelera une telle tranformation une *tranformation projective.* Par rapport aux nouvelles coordonnées, l'équation (3) devient :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0\,.$$

On peut paramétrer explicitement la solution de cette équation dans $\mathbf{C}P^2$:

$$X = 1 - w^2, \qquad Y = \mathrm{i}(1 + w^2), \qquad Z = 2w\,,$$

où $w \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (le plan complexe compactifié).

Exercice: Vérifier cette dernière affirmation.

On voit alors que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est identifié avec le plan complexe compactifié; topologiquement cet espace correspond à la sphère de Riemann S^2.

Exercice : Revenir sur les étapes afin de paramétrer explicitement les solutions de l'équation $y^2 = x(x-1)$ dans $\mathbf{C}^2$.

Points à retenir : le problème de comprendre l'ensemble des solutions est devenu plus claire en introduisant l'espace projectif ; on a fait un changement de variables qui a simplifier l'équation – on rencontrera des situations où on a plusieurs équations à résoudre ; eventuellement on peut combiner ces équations afin de trouver un système plus simple à étudier ; il s'agit de trouver une base convenable pour l'idéal engendré par les équations.

On suppose maintenant qu'on veut résoudre le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2 - x^2 + x & = & 0 \\ x^2 + y^2 + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

On élimine y pour obtenir $x = \dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$. Puis pour chaque solution x il y a deux valeurs possibles pour y et donc il y a quatre solutions distinctes. En projectivisant, on obtient essentiellement la même chose:

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + xz &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \end{cases}$$

Puis $\dfrac{x}{z} = \dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$ et $\left(\dfrac{y}{z}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{z}\right)^2 + \dfrac{x}{z}$. Comme méthode alternative on peut considérer les deux polynômes comme polynômes en x avec coefficients dépendant de y et z. Le résultant de ces deux polynômes est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(y,z) &= \begin{vmatrix} 1 & -z & -y^2 & 0 \\ 0 & 1 & -z & -y^2 \\ 1 & 0 & y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2+z^2 \end{vmatrix} \\ &= 2y^4 + 3y^2z^2 + 2z^4 = z^4\left(2\left(\frac{y}{z}\right)^4 + 3\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2\right) \end{aligned}$$

L'annulation de ce déterminant correspond aux solutions des deux équations. Bien evidemment, il y en a quatre. C'est une conséquence du théorème de Bezout, qu'on verra dans la suite.

Si l'on modifie les équations :

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + x &= 0 \\ y^2 - x^2 + x + 1 &= 0 \end{cases}$$

il n'y a aucune solution dans le plan. Par contre en projectivisant :

$$\begin{cases} y^2 - x^2 + xz &= 0 \\ y^2 - x^2 + xz + z^2 &= 0 \end{cases}$$

on obtient les solutions $z = 0$ et $y^2 - x^2 = 0$, c'est à dire, les deux points $[1,1,0]$ et $[1,-1,0]$ dans l'espace projectif. En fait il y a toujours quatre solutions car chaqu'une de ces solutions est de multiplicité 2. A part des cas exceptionnels, deux courbes projectives dans $\mathbf{C}P^2$ de degré m et n réspectivement, presentent mn points d'intersection (en tenant compte de la multiplicité d'intersection). Autrement dit, les deux équations corresondantes ont mn solutions.

Exemple : On veut étudier l'ensemble des solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} w(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= 0 \\ w(3-x-y-z)^2 - (1-x)^2 - (1-y)^2 - (1-z)^2 &= 0 \\ w(3t-x-y-z)^2 - (t-x)^2 - (t-y)^2 - (t-z)^2 &= 0 \\ w(3x-1-t)^2 - x^2 - (x-1)^2 - (x-t)^2 &= 0 \\ w(3y-1-t)^2 - y^2 - (y-1)^2 - (y-t)^2 &= 0 \\ w(3z-1-t)^2 - z^2 - (z-1)^2 - (z-t)^2 &= 0 \end{cases}$$

Il s'agit de six équations dans les cinq inconnus : $\{x, y, z, t, w\}$. On peut imaginer que le système est sur-déterminé et donc il n'y aura peut être aucune solution. Il n'est pas évident comment étudier cet ensemble. Ces équations éngendrent un idéal dans l'anneau des polynômes dans les variables x, y, z, t, w. Il y a un algorithme pour trouver une base plus pratique (l'algorithme de Buchberger qui nous ramène à une base de Gröbner) ; on obtient la base (un nouveau système) :

$$\begin{cases} 81w^2 - 78w + 17 &= 0 \\ 8t^2 - 27w - 8t + 17 &= 0 \\ 108wx^2 - 72wtx - 72wx - 36x^2 + 36wt + 24tx - 15w + 24x - 12t + 5 &= 0 \\ 108wxy + 72wty + 72wtx - 36xy - 24ty - 90wy - 24tx - 90wx & \\ -72wt + 30y + 30x + 24t + 75w - 25 &= 0 \\ 108wy^2 - 72wty - 36y^2 + 24ty - 72wy + 36wt + 24y - 12t - 15w + 5 &= 0 \\ 3 - 2x - 9w - 2z - 2y + 6wx + 6wy + 6wz &= 0 \\ 8x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 9 - 27w &= 0 \end{cases}$$

On peut résoudre systématiquement ce système :

$$w = 1/3, \quad t = \text{racine}(Z^2 - Z + 1), \quad x = \text{racine}(Z^2 - (y+z)Z + z^2 + y^2 - yz),$$

(j'ai utilisé le logiciel MAPLE pour le faire !) On remarque que y, z sont arbitraires, donc l'ensemble des solutions est de dimension complexe 2 ; il s'agit d'une surface complexe. Ce fait n'est pas évident du système du départ.