Feuille 3, Exercice VII Intégrale de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

1. $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$

2. Pour $0 \leq x \leq \pi/2$, on a $0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$
$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, c'est à dire $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, d'où elle converge

3. Intégration par parties : $u = \sin^{n-1}x$, $v' = \sin x$
$u' = (n-1)\sin^{n-2}x \cdot \cos x$, $v = -\cos x$

$n \geq 2$ $\quad I_n = -\cos x \sin^{n-1}x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}(n-1)\cos^2 x \sin^{n-2}x\,dx = 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$

$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$

4. Soit $a_n = (n+1)I_n I_{n+1}$, $n \geq 0$
Alors $a_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \times \frac{(n+1)}{n+2} I_n = (n+1)I_n I_{n+1} = a_n$
Donc la suite est constante, égale à $a_0 = I_1 I_0 = \pi/2$

5. $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. En effet, quelque soit δ ; $0 \leq \delta < 1$
et quelque soit $\varepsilon > 0$, $\exists N$ t.q. $n \geq N \Rightarrow \sin^n x < \varepsilon$ $\forall x \in [0, \delta]$

Alors pour $n \geq N$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\delta} \sin^n x\,dx + \int_{\delta}^{1} \sin^n x\,dx$

$\leq \varepsilon\delta + 1 - \delta \to \varepsilon$ lorsque $\delta \to 1$

Mais puisqu'on peut choisir ε arbitrairement petit, on conclut que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$: Soit $a_n = \frac{I_n}{I_{n+1}} \geq 1$ (car $0 < I_{n+1} \leq I_n$)

Alors $a_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = \frac{I_{n+1}}{\frac{n+1}{n+2} I_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}$ (*)

On remarque que (a_n) est ~~une suite décroissante minorée par 1,~~
~~donc convergente. En effet~~
~~$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} < a_n^2$ (par (*)), ce qui est vrai par~~
~~récurrence : vrai pour $n = 0$ $\left(2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$~~

Alors, par l'arithmétique des limites.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} \quad \text{(bien défini car } a_n \geq 1\text{)}$$

$$\Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \pm 1$$

Mais la negative est impossible car $a_n \geq 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n I_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}\, I_{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt{n+1}\, I_n I_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) I_n I_{n+1} \times \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(n+1) I_n I_{n+1}}_{\text{constante} = \pi/2} \times \underbrace{\lim \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{n+1}}_{1}$$

$$= \pi/2$$

6. $I_0 = \pi/2$, $I_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, $I_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, $I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, ...

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\,\pi/2 = \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} \times \frac{1}{2n(2n-2)\cdots 2}\,\pi/2$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\, n!\, 2^{n-1}\cdot 2^n}\,\pi/2$$

$$I_{2m+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times 2m}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2m+1)} = \frac{2^m m!\cdot 2^m m!}{(2m+1)!} = \frac{(2^m m!)^2}{(2m+1)!}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!\, n!}\cdot\pi/2 \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \to 1 \text{ lorsque } n\to\infty$$

(partie précédente)

d'où $\dfrac{2^{4n}(n!)^3(n-1)!}{(2n-1)!\,(2n+1)!} \to \pi$ lorsque $n\to\infty$