

Examen final, intégrale de Riemann et probabilités
Licence 2 de mathématiques, janvier 2016

Durée : 3 h. 7 exercices. Aucun document autorisé, pas d'appareil électronique.

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt \quad \int_0^1 t e^{-t^2} dt \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$$
$$\int_0^\pi \sin^2(t) dt \quad \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \quad \int_0^{\pi/4} \tan^2(t) dt$$

Exercice 2

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$\iint_D x \, dx \, dy, \quad \iint_D e^{x^2+y^2} \, dx \, dy, \quad \iint_D \sin(x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} \, dx \quad \int_0^1 \ln(x) \, dx \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^3 - 1} \, dx$$

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui sont des densités de probabilité ?

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad f_2(x) = x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = \sin(x) \mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(x)$$

Si tel est le cas, déterminer la fonction de répartition et calculez l'espérance et la variance correspondante.

Exercice 5

La durée de vie d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \frac{10}{x^2} \mathbf{1}_{[10,\infty[}(x)$$

- Calculer $P(X > 20)$.
- Que pouvez-vous dire de l'espérance de X ?
- Donner la fonction de répartition de X , tracer son graphique.
- Calculer la probabilité que parmi trois composants, au moins un fonctionne pendant au moins quinze heures.

Exercice 6

On jette deux fois une pièce bien équilibrée et on considère les événements :

- A : "Le premier jet donne Face"

- B : "Le deuxième jet donne Face"
- C : "Les deux jets donnent le même résultat"

A et B sont-ils indépendants ? A et C sont-ils indépendants ? B et C sont-ils indépendants ? A , B et C sont-ils indépendants ?

Exercice 7

Énoncer la formule de Bayes.

Dans la salle des profs d'un collège, 60% sont des femmes. Une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?