Arithmétique et applications - - - -.

Exercices : solutions (sélection)

1. f irréductible car $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 2 \mod 3$. sont tous non-nuls.

$A/(f(x))$ contient $3^2 = 9$ éléments. et son groupe multiplicatif 8 éléments : sont-ils engendrés par x ?

x	x
x^2	2
x^3	$2x$
x^4	$2x^2 = -2 = 1$ Non !

$g(0) = 2$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$ donc g irréductible
$(A/(g(x)))^*$ contient 8 éléments : on voit s'ils sont engendrés par x :

x	x
x^2	$-x-2 = 2x+1$
x^3	$2x^2+x = 2(2x+1)+x = 2x+2$
x^4	$2x^2+2x = 2(2x+1)+2x = 2$
x^5	$\cancel{x^2+3x = 2x+1+x}$ $2x$
x^6	$2x^2 = 2(2x+1) = x+2$
x^7	$x^2+2x = 2x+1+2x = x+1$
x^8	$x^2+x = 2x+1+x = 1$

On voit bien que x engendre $(A/(g(x)))^*$ et 8 par définition $g(x)$ est primitif.

2. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]/(f(x))$ contient $5^2 = 25$ éléments.
$f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 2$ donc f irréductible
le groupe multiplicatif contient 24 éléments : puisque l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, il suffit de vérifier que aucun de $x, x^2, \ldots, x^{12}$ n'est 1.

x, $x^2 = 4x+3$, $x^3 = 4x^2+3x = 4(4x+3)+3x = 4x+2$, $x^4 = 4x^2+2x = 4(4x+3)+2x = 3x+2$
$x^5 = 3x^2+2x = 3(4x+3)+2x = 4x+4$, $x^6 = 4x^2+4x = 4(4x+3)+4x = 2$
$x^7 = 2x$, $x^8 = 2x^2 = 2(4x+3) = 3x+1$, $x^9 = 3x^2+x = 3(4x+3)+x = 3x+4$
$x^{10} = 3x^2+4x = 3(4x+3)+4x = x+4$, $x^{11} = x^2+4 = 4x+3+4 = 4x+2$
$x^{12} = 4x^2+2x = 4(4x+3)+2x = 3x+2$.
donc $f(x)$ est bien primitif.

Dans $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})[x]$: $f(0) = 2$, $f(1) = 4$, $f(2) = 8$, $f(3) = 3$, $f(4) = 0$
f est donc réductible et pas primitif.

3.
$$x^5+x^4+x^3+x^2 = (x+0)(x^4+x^3+x+1) + x^3+x$$
$$x^4+x^3+x+1 = (x+1)(x^3+x) + \boxed{x^2+1}$$
$$x^3+x = x(x^2+1) + 0$$

d'où le $\boxed{\mathrm{pgcd}(a,b) = x^2+1}$ et
$$x^2+1 = (x^4+x^3+x+1) + (x+1)(x^3+x) = (x^4+x^3+x+1) + (x+1)\left[x^5+x^4+x^3+x^2 + x(x^4+x^3+x+1)\right]$$
$$= (x+1)(x^5+x^4+x^3+x^2) + (x^2+x+1)(x^4+x^3+x+1)$$
On prend $\boxed{u(x) = x+1}$ et $\boxed{v(x) = x^2+x+1}$

5. (a) Si x^2+1 réductible, il existerait un facteur linéaire et donc une racine dans $\mathbb{F}_p$, disons α.

Puis $\alpha^2 = -1$, et donc $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$, mais $\alpha^4 = 1$. C'est à dire, l'ordre de α dans $\mathbb{F}_p^*$ est 4.

Mais l'ordre de $\mathbb{F}_p^*$ est $p-1$, donc 4 divise $p-1$.

Ceci est impossible si $p = 3 \mod 4$.
Donc $p = 3 \mod 4 \Longrightarrow x^2+1$ irréductible sur $\mathbb{F}_p$.

Si $p = 2$: $x^2+1 = (x+1)(x+1)$ est réductible
Si $p = 1 \mod 4$, alors $p-1$ est divisible par 4. Or, il existe un élément ~~de~~ α d'ordre 4. (si G cyclique d'ordre n, et $k \mid n$, il existe toujours un élément d'ordre k)

Donc $\alpha^4 = 1$ et $\alpha^2 = -1$ (les seules solutions ~~racines~~ de $x^2 = 1 \mod p$ sont $x = 1$ et $x = p-1 = -1$)

Il s'ensuit que α est racine de x^2+1 et x^2+1 est réductible

(b) Immédiate : si $p = 3 \mod 4$, alors x^2+1 est irréductible, et par la théorie du cours $\dfrac{\mathbb{F}_p[x]}{(x^2+1)}$ est un corps à p^2 éléments.

6(a) On voit qu'un code de Hadamard répond à la question (cours : §2, p4)

On prend $m = 4$: la longueur des mots est $4m-1 = 15$ et la distance minimale est $2m = 8$.
Le code $C \subset \mathbb{F}_2^{15}$ contient $4m = 16$ mots.

Matrice de Hadamard. $H_{24} =$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

Pour convertir cette matrice en un code, on enlève la 1ère ligne et colonne et on remplace -1 par 0 :

La matrice de la code est alors

$$A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$t < \frac{d}{2} = 4 \Rightarrow t = 3.$$

Ce code est 3-correcteur.

(b) Il s'agit d'un code de Reed-Muller avec $m = 2$, avec les vecteurs $(0,0,\dots,0)$ et $(1,1,\dots,1)$ ajoutés.

$$\begin{array}{c} A = \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ B \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$d = 4 \Rightarrow t = 1$

Ce code est 1-correcteur

<u>Remarque</u>: On peut toujours ajouter les vecteurs $(0,0,\dots,0)$ et $(1,1,\dots,1)$ à un code Reed-Muller afin de construire un code contenant $8m$ mots.

7. Le théorème 1 du chapitre §2, affirme que pour C un code t-correcteur dans $\mathbb{F}_2^{\,n}$. Alors nécessairement

$$|C| \left\{ \binom{n}{0} + \cdots \binom{n}{t} \right\} \leq 2^n$$

Dans ce cas $|C| = 2^2 = 4$, $n = 6$, $t = 2$.

Alors $2^6 = 64$, mais

$$4 \times \left\{ \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} \right\} = 4 \times \{1 + 6 + 15\} = 88$$

L'inégalité n'est pas parifaite et on ne peut pas construire un tel code

8. Code de Hamming $7 = 2^3 - 1$: $m = 3$.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a trouvé G dans les notes du cours: §2 page 7

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le code contient $2^4 = 16$ mots obtenus par combinaison linéaire des lignes de G

(a)

$$C = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ l_1 + l_2 \\ l_1 + l_3 \\ l_1 + l_4 \\ l_2 + l_3 \\ l_2 + l_4 \\ l_3 + l_4 \\ l_1 + l_2 + l_3 \\ l_1 + l_2 + l_4 \\ l_1 + l_3 + l_4 \\ l_2 + l_3 + l_4 \\ l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \\ \text{vecteur } 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \\ \\ \\ \\ - \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(b) Tout vecteur est corrigible dans ce code : il s'agit d'un code parfait.

$r_1 = (0011101)$ est corrigé en (0011001)

et $r_2 = (0100101)$ est corrigible en lui-même : ce vecteur fait partie du code.

(c)

	coset leader	syndrome
	0000000	000
	1000000	001
	0100000	010
	0010000	011
$e \rightarrow$	0001000	100
	0000100	101
	0000010	110
	0000001	111

il s'agit des colonnes de H.

syndrome $= He^t$

exemple: $H r_1^{\,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc on corrige r_1 avec $e = 0000100$

corrigé: $c = r_1 + e = (0011001)$

9. Voir corrigé du contrôle continu. pour ce type de question.

10 (a) $p(x) = x^3+x^2+1$ est primitif (de degré 3), d'où $n = 2^3-1 = 7$

Pour un code 2-correcteur, il faut construire un code de distance construite $s = 2t = 4$.

On considère les quatre premières puissances de $a = \bar{x}$ ~~dans~~ a, a^2, a^3, a^4 :

Alors $p(a) = 0$; $p(a^2) = p(a)^2 = 0$, $p(a^4) = p(a)^4 = 0$

a^3 est racine de $f(x) = x^7-1$, et donc son polynôme minimal est un des facteurs de la décomposition :

$$x^7-1 = (x^3+x+1)(x^3+x^2+1)(x+1)$$

Alors dans $\mathbb{F}_2[x]/(p(x))$: $a^3 = a^2+1$

On voit que x^3+x+1 annule a^3 :

$$(a^2+1)^3 + a^2+1+1 = a^6+a^4+a^2+1+a^2$$
$$= (a^2+1)^2 + a^4 + \cancel{a^2}\ 1$$
$$= 0$$

Donc $g(x) = (x^3+x^2+1)(x^3+x+1)$
$= x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Le code $C = (g(x)) \triangleleft R = \mathbb{F}_2[x]/(f(x))$

Il s'agit d'un sous-espace de dimension 1 et c'est un $[7,1]$-code linéaire.

(b) On reprend la partie (a)

$s = 2t = 6$. $\qquad p(a^6) = (p(a^3))^2$

Donc le poly mini de a^6 est celui de a^3

Il reste à trouver le poly minimal de $a^5 = a+1$ dans $\frac{\mathbb{F}_2[x]}{(p(x))}$

Puisque $x+1$ ne s'annule pas $a+1$

le poly mini est soit x^3+x+1 soit x^3+x^2+1

Donc

$g(x)$ est comme pour la partie (a)

et il s'agit d'un $[7,1]$-code linéaire.

(c) $p(x) = x^4+x+1 \qquad n = 2^4-1 = 15$

On veut que $k = 7$: sous-espace de dimension 7.

$k = n - \deg g$, c'est à dire il nous faut un polynôme générateur $g(x)$ de degré 8

A noter que

$$x^{15}-1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

On commence avec a :

Alors $p(x)$ est minimal pour a, a^2, a^4

On cherche le polynôme minimal de a^3.

x^2+x+1 : $a^6+a^3+1 = a^2(a+1)+a^3+1 = a^2+1$ Non!

x^4+x^3+1 : $a^{12}+a^9+1 = (a+1)^3 + a(a+1)^2+1$
$= a^3+a^2+a+1+a^3+a+1 = a^2$ Non!

$x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^4+x^3+1)+(x^2+x) = a^2+a^6+a^3$
$= a^2+a^2(a+1)+a^3 = 0.$

~~Pour~~ ~~$g(x)$~~

On prend alors $t=2$, $s=4$ et

$g(x) = (x^4+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

C ~~est~~ s'agit d'un sous-espace de dimension 7 sur $\mathbb{F}_2$
donc, il y a 2^7 mots dans C

et puisque $t=2$, alors deux erreurs sont corrigibles.

11

t	s	deg g	Cardinal base	Nombre de mots
3	6	10	21	2^{21}
4	8	20	11	2^{11}
5	10	25	6	2^6
6	12	30	1	2.

$\deg p(x) = 5$ $\quad n = 2^5-1 = \cancel{3}31$

$s=6$: a, a^2, a^4 ont $M_1 = p(x)$ comme poly min

a^3, a^6 ont M_2 avec $\deg M_2 = 5$
(car $x+1$ ne s'annule ni a^3, a^6)

$\deg g = 10$

$s=8$: $\underset{M_1}{a}, \underset{M_1}{a^2}, \underset{M_2}{a^3}, \underset{M_1}{a^4}, \underset{M_3}{a^5}, \underset{M_2}{a^6}, \underset{M_4}{a^7}, \underset{M_1}{a^8}$ $\quad$ ~~deg~~ $g = M_1M_2M_3M_4$ $\quad \deg g = 20$

$s=10$: $\underset{M_1}{a}, \underset{M_1}{a^2}, \underset{M_2}{a^3}, \underset{M_1}{a^4}, \underset{M_3}{a^5}, \underset{M_2}{a^6}, \underset{M_4}{a^7}, \underset{M_1}{a^8}, \underset{M_5}{a^9}, \underset{M_3}{a^{10}}$ $\quad \deg g = 25$

$s=12$ $\quad$ $\underset{M_6}{a^{11}}, \underset{M_2}{a^{12}}$ $\quad \deg g = 30$

(sous l'hypothèse que les polynômes $M_1, \dots, M_6$ sont tous distincts !)

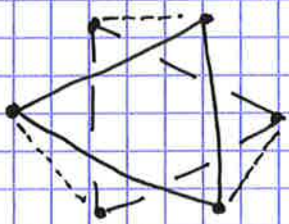
12. (a) $\sum_i d_i = 2|A|$ où d_i est le degré du sommet i et $|A|$ est le nombre d'arêtes.
En particulier $\sum_i d_i$ est paire et nécessairement, il faut un nombre pair de sommets de degré impair

(b) Non: si on représente chaque ordi par le sommet d'un graphe simple, et on connecte deux sommets si les deux ordis sont reliés: alors chaque sommet aurait degré 3, avec 15 sommets. on aurait

$$\sum_{i=1}^{15} d_i = \sum_{i=1}^{15} 3 = 45 \quad \text{impair}$$

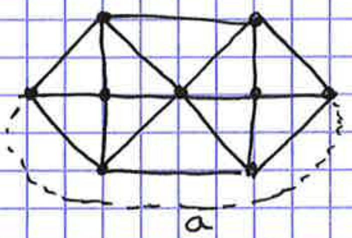
– Il faut que la somme des degrés soit paire.

(c)



On prend deux triangles et on connecte des sommets correspondants.

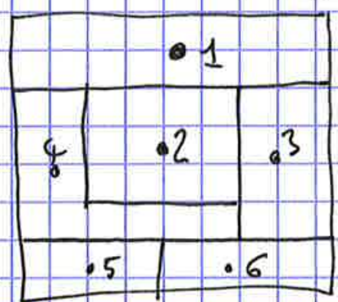
13.

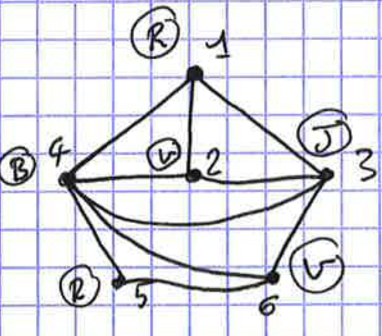


Oui. Il y a exactement deux sommets de degré impair donc ce graphe admet un chemin eulérien

Par le construire, on connecte les deux sommets de degré impair – maintenant on tous les sommets sont de degré pair: on construit un cycle eulérien, puis on enlève l'arête a qu'on a ~~ajouté~~. ajouté.

14.





Il faut 4 couleurs: en effet, il faut trois pour le triangle 1 2 4, ce qui oblige un autre couleur pour sommet 3. (quatre est suffisant par le théorème des quatre couleurs)

Polynôme chromatique: laborieux! voir corrigé du contrôle pour un exemple.

15.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

Il s'agit d'une matrice symétrique. On remarque que la somme de chaque ligne ou colonne est le degré du sommet correspondant.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il faut calculer A^4 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \bullet & & \\ & & & & \\ \bullet & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

On n'a que besoin du coeff dans la ligne 1 et colonne 3 : il s'agit de $2+1+2+2+2 = 9$.

Il existe alors 9 chemins de longueur 4 allant de 1 à 3.

16. $d_1, d_2, \ldots, d_n$ Réponse : <u>oui</u>

$\downarrow$

$d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$

$(7, 7, 5, 3, 3, 3, 2, 2)$

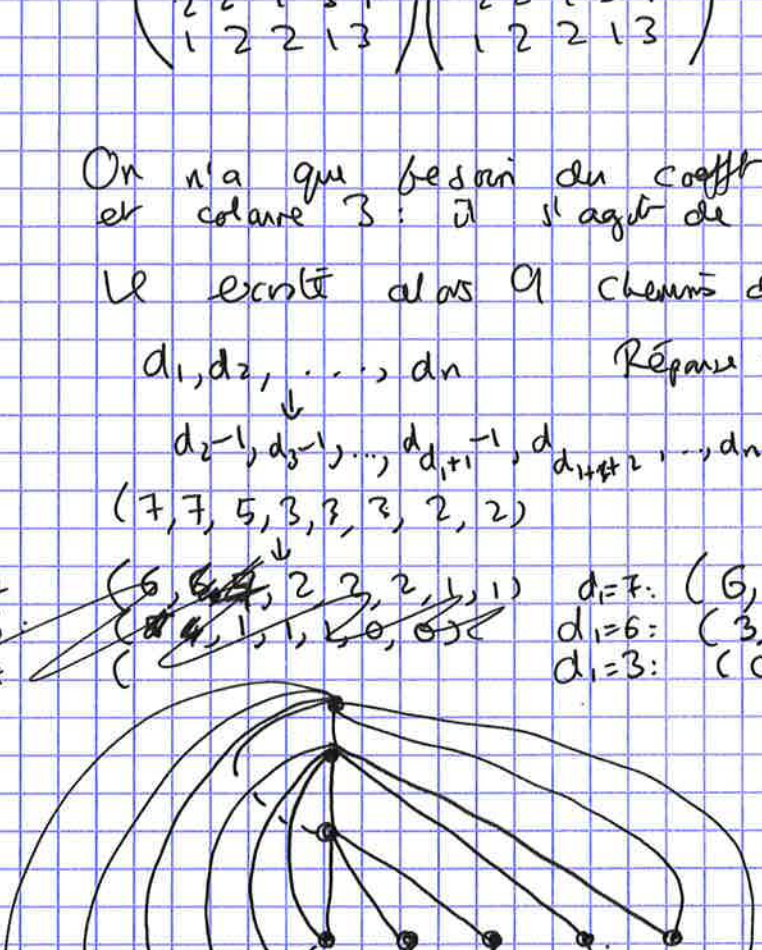
$\downarrow$

~~$d_1=7$ (6, 5, 4, 2, 2, 2, 1, 1)~~
~~$d_1=6$ (4, 1, 1, 1, 0, 0)~~
~~$d_1=4$ (~~

$d_1=7$: $(6, 4, 2, 2, 2, 1, 1)$

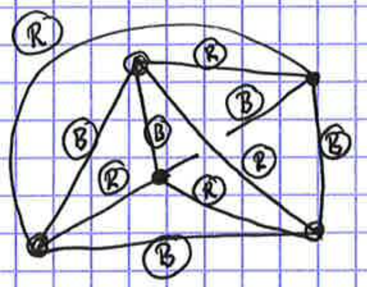
$d_1=6$: $(3, 1, 1, 1, 0, 0)$

$d_1=3$: $(0, 0, 0, 0, 0)$.



$\uparrow$ On remonte en ajoutant un sommet à chaque étape

17. (a)



K_5

(b) K_6 : On note les sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6.

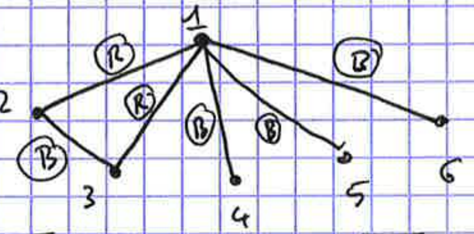
Soit $\overline{12}$ rouge et $\overline{13}$ rouge (sans perdre la généralité)

$\Rightarrow \overline{23}$ bleue

Soit $\overline{14}$ rouge $\Rightarrow \overline{24}$ et $\overline{34}$ bleue puis le triangle $\overline{234}$ bleue.

donc $\overline{14}$ bleue ; de même $\overline{15}$ et $\overline{16}$ sont bleues.

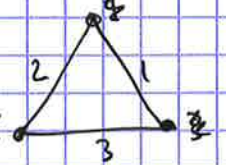
(si $\overline{15}$ rouge $\Rightarrow \overline{25}, \overline{35}$ bleues et $\overline{235}$ bleue)



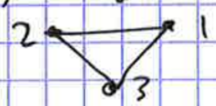
$\Rightarrow \overline{45}$ et $\overline{56}$ et $\overline{46}$ rouges $\Rightarrow \overline{456}$ rouge

Donc impossible.

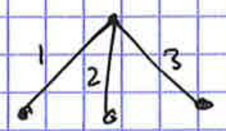
18. K_3

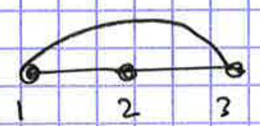


$L(K_3) = K_3$



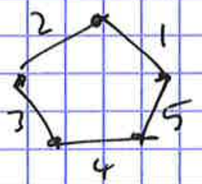
$K_{1,3}$

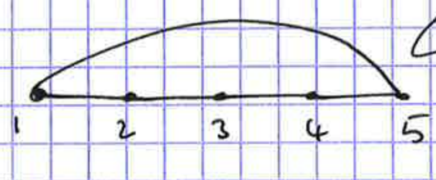




$L(K_{1,3}) = K_3$

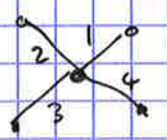
C_5

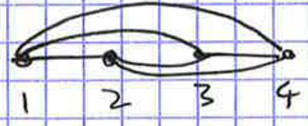




$L(C_5) = C_5$

E_5

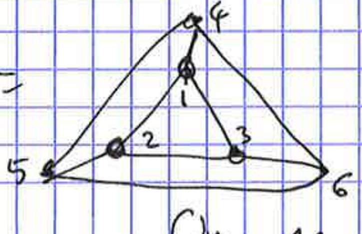


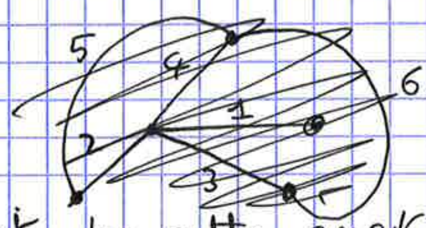


$L(E_5) = K_4$.

etc.

$L(G) =$

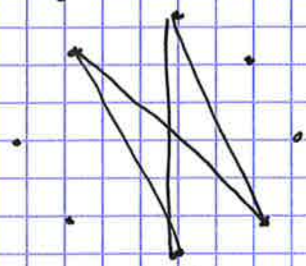




?

On ne poursuit plus cette question !

19. Le graphe indiqué ne contient aucun triangle : le plus court cycle est de longueur 4 :



D'autre part, son complément contient des triangles, mais aucun sous-graphe complet d'ordre 4.

Il suffit alors de colorier les arêtes du graphe donné en rouge, et son complément en bleu. Cette coloration ne contient aucun sous-graphe complet d'ordre 3 rouge, ni un sous-graphe complet bleu d'ordre 4.

On voit alors que $R(3,4) > 8$.

On sait que $R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$.
Donc $R(3,4) = 9$ ou 10.

~~On suppose qu'il existe~~

Soit ~~K_9~~ donnée une coloration de K_9 avec aucun triangle rouge et aucun K_4 bleu et soit x un sommet de K_9

Soit $B_x = \{ y \mid xy \text{ bleue} \}$, $R_x = \{ y : xy \text{ rouge} \}$

(*) Si $|B_x| \geq 6$ alors le graphe contient soit un triangle rouge soit un K_4 bleu

Car B_x est un graphe avec au moins 6 points et avec chaque arête coloriée soit rouge soit bleue — puisque $R(3,3) = 6$, il contient soit un triangle rouge soit un triangle bleu.
Si il contient un triangle rouge (*) est vraie.
S'il contient un triangle bleue, ces trois points et x déterminent un K_4 bleu.

Si $|R_x| \geq 4$ alors le graphe contient un triangle rouge ou un K_4 bleu ($R(2,4) = 4$)

— même type de démonstration.

Il s'ensuit qu'il n'y a qu'un maximum de 5 arêtes bleues ~~sort~~ incidentes avec x et au plus 3 arête rouge incidente avec x. Mais degré $x = 8$, donc chaque sommet a exactement 3 arêtes rouge et 5 arêtes bleue incidentes.
Ce qui entraîne qu'il y a $\frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2}$ arêtes bleues ~~Mais~~ car chaque arête est numérotée deux fois ~~correspondante~~ — une fois de chaque sommet. Mais ~~car~~ on ne peut pas avoir $\frac{45}{2} = 22{,}5$ arêtes bleues !! Contradiction.