

UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE

Département de Mathématiques

Année Universitaire 2015–16

L3 Maths, DMAT6ARA : Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Mardi 10 mai 2016 09h00.

Durée : 3 heures

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHS

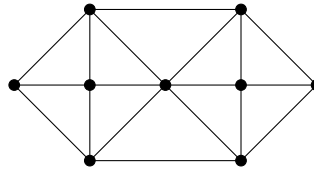
aucun document autorisé

usage de calculatrices interdit, tous les calculs se font à la main

chaque réponse devra être justifiée

Quelques petites questions pour commencer :

1. Soit $A = (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[x]$ et soit $f(x) = x^2 + 1 \in A$. Montrer que f est irréductible mais pas primitif. Montrer que $g(x) = x^2 + x + 2$ est primitive dans A .
2. Est-ce que le graphe suivant contient un chemin eulérien ? Si oui, le construire (vous inventez votre propre notation afin d'indiquer le chemin).



3. Soit C le code $\{(00000000), (11000111), (11111000), (00111111)\}$. Quelle est la distance minimale pour ce code ? Pour quel t est ce code t -correcteur ? On reçoit le vecteur $r = (11100011)$. Est-il corrigible pour ce code ? Si oui, le corriger.
4. Donner un graphe avec un polynôme chromatique égal à $(x - 2)(x - 1)^2x$.

Question sur les corps finis et les codes BCH :

5. Soit $p(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.
 - (a) Montrer que $p(x)$ est irréductible. Combien d'éléments y a-t-il dans le corps $K = \mathbb{F}_2[x]/(p(x))$? Calculer l'inverse multiplicatif de $x^2 + 1$ dans K .
 - (b) Montrer que $p(x)$ est primitif.
 - (c) Utiliser $p(x)$ pour construire le polynôme générateur d'un code BCH de distance construite $s = 4$ sur \mathbb{F}_2 . Quelle est la dimension de ce code et combien de mots est-ce qu'il contient ?

SUITE...

Question sur les codes correcteurs :

6. (a) Construire le $[7, 3]$ -code linéaire C avec matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la matrice de contrôle H pour C .

(c) Pour quel t est ce code t -correcteur ?

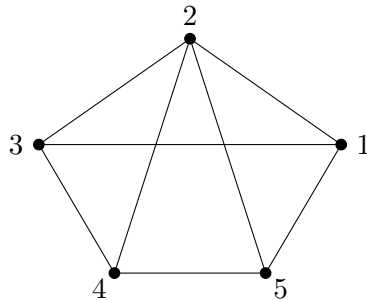
(d) Calculer les syndromes associés aux erreurs de poids $\leq t$.

(e) Parmi les vecteurs reçus $r_1 = (1100111)$, $r_2 = (1111110)$, $r_3 = (0111101)$, lesquels sont corrigibles par la méthode des syndromes ?

(On se rappelle qu'un $[n, k]$ -code linéaire correspond à un sous-espace de dimension k dans \mathbb{F}_2^n)

Question sur les graphes :

7. (a) Calculer la matrice d'adjacence du graphe suivant :



Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet 3 au sommet 5.

(b) On suppose donnée une coloration par les couleurs rouge et bleue des arêtes du graphe complet d'ordre 9 : $K_9 = (X, A)$. Soit $x \in X$ un sommet de K_9 et soit

$$B_x := \{y \in X : xy \text{ bleue}\}, \quad R_x := \{y \in X : xy \text{ rouge}\}.$$

Montrer que si le cardinal $|R_x| \geq 4$ alors le graphe contient soit un triangle rouge soit un K_4 bleu. Montrer que si le cardinal $|B_x| \geq 6$ alors le graphe contient soit un triangle rouge soit un K_4 bleu (on admet que le nombre de Ramsey $R(3, 3) = 6$). En déduire que quelque soit la coloration des arêtes de K_9 par les couleurs rouge et bleue, il existe toujours soit un triangle rouge, soit un K_4 bleu.