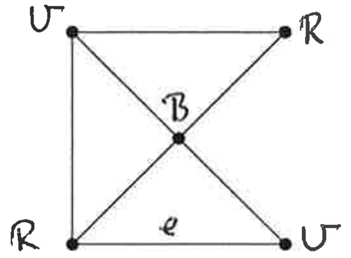
Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Contrôle No. 3, 30 mars 2017, graphes

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

NOM :

1. Calculer le polynôme chromatique du graphe suivant. Combien de colorations y a-t-il avec 2 couleurs, avec 3 couleurs ? Si une telle coloration existe, donner un exemple. Pour information, le polynôme chromatique du graphe cyclique C_n d'ordre n est $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$; celui d'un arbre quelconque d'ordre n est $k(k-1)^{n-1}$.



R = rouge
B = bleue
V = verte

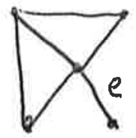
$$P(G) = P(G \setminus e) - P(G/e)$$

||| On remarque les trois apparances de G_1

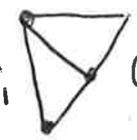
Soit $Q(k)$ son polynôme chromatique

$Q(k) = k(k-1)(k-2)^2$

$kQ - Q$



G_1



Q

$$\boxed{\begin{aligned} P(G) &= (k-1)Q - Q \\ &= (k-2)Q = k(k-1)(k-2)^3 \end{aligned}}$$

G_1

kQ

G_1

$\rightarrow Q(k) = (k-1)^4 + (k-1) - k(k-1)^2$

$= (k-1)[(k-1)^3 + 1 - k(k-1)]$

$= (k-1)(k^3 - 4k^2 + 4k)$

$= k(k-1)(k-2)^2$

arbre d'ordre 3:
$k(k-1)^2$

graphe cyclique d'ordre 4:
$(k-1)^4 + (k-1)$

vérifications:

$\deg P(G) = 5 = |X|$

$P(G) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$

Signe alternée des coeffts.

arêtes $= |-7| = 7$

k est facteur

Soit $P(k) = P(G)(k)$

$P(2) = 0 \Rightarrow$ aucune coloration avec 2 couleurs

$P(3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$ colorations avec 3 couleurs.

exemple - voir ci-dessus.

SUITE...

2. Parmi les suites de degrés suivantes, lesquelles sont graphiques ?

(411110)

(54321100)

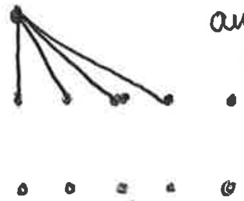
(54321111)

Dans le cas où la suite est graphique, construire un graphe simple avec la même suite de degrés ; et, si c'est possible, construire un graphe simple <u>connexe</u> avec la même suite de degrés.

a) 411110

↓

00000 bien graphique avec graphe discret



aucun graphe connexe possible en effet

$8 = \sum d_i < 2(n-1) = 10$

b) 54321100

↓

3210000

↓

10(-1)000 pas graphique.

c) 54321111

↓

3210011

↓

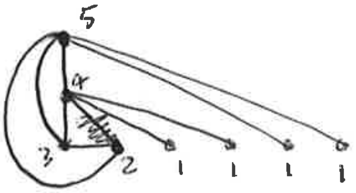
3211100

↓

100100

↓

110000 graphique



le graphe est connexe.