8 (b) Puisque $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ est linéaire $DA(y) = A$

Alors $Af : U \to \mathbb{R}^p$ est une application composée avec dérivée $D(Af)(a) = DA(f(a)) \circ Df(a) = A\, Df(a)$

Si $n = p$ et $Df(a)$ est inversible, alors on prend $A = Df(a)^{-1}$

Il s'ensuit que $D(Df(a)^{-1} f)(a) = Df(a)^{-1} Df(a) = I$

(c) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = 2xy \cos t + x^2\, 2t$$
$$= 2 \sin t (t^2+1) \cos t + \sin^2 t \times 2t$$
$$= 2 \sin t \cos t (t^2+1) + 2t \sin^2 t$$

(d) $$DF = Dg \circ Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial x} ,\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)$$
$$= \left((2uv+1)3x^2 + u^2(6xy+3y^2),\ (2uv+1)3y^2 + u^2(3x^2+6xy) \right)$$
$$= \Big(\underbrace{\big(2(x^3+y^3)(3x^2y+3xy^2)+1\big)3x^2 + (x^3+y^3)^2(6xy+3y^2)}_{\frac{\partial F}{\partial x}},$$
$$\underbrace{3y^2\big(2(x^3+y^3)(3x^2y+3xy^2)+1\big) + (x^3+y^3)^2(3x^2+6xy)}_{\frac{\partial F}{\partial y}} \Big)$$

7(b) $(x_2, y_2) \mapsto g((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ comme partie (a) « $\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(x_1+tx_2, y_1+ty_2) - f(x_1,y_1)}{t}$

Mais en $(x_1, y_1) = 0$

$$g((0,0),(x_2,y_2)) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{t^3 x_2^3\, t y_2}{t^4 x_2^4 + t^2 y_2^2}$$
$$= \lim_{t\to 0,\, t\neq 0} \frac{t^2 x_2^3 y_2}{t^2 x_2^4 + y_2^2} = 0$$ qui est bien linéaire.

Mais si la dérivée existait $\equiv 0$ on aurait

$$Df(0)\begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} f \circ c(t) \Big|_{t=0}$$ pour une courbe $c(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $c(0) = (0,0)$

Soit $c(t) = (t, t^2)$: $f \circ c(t) = \frac{t^3 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{t^5}{2t^4} = \frac{t}{2}$

avec $(f\circ c)'(t) = \frac{1}{2} \neq 0$

Sinon $f(x_2,y_2) - f(0,0) = \underbrace{Df(0)}_{0} + o(\|(x_2,y_2)\|)$. Faux $\frac{\frac{x_2^3 y_2}{x_2^4+y_2^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \not\to 0$ si $y_2 = x_2^2 \to 0$

9 (b) $\|Df(x)\|_M = \max_{\|h\|=1} \|Df(x)(h)\|$

On veut maximiser $\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n\right|$ avec contrainte $h_1^2+\cdots+h_n^2=1$

Ecrivons $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Soit $F(h_1,\dots,h_n)$ la fonction $F(h_1,\dots,h_n) = |f_1h_1+\cdots+f_nh_n|$

Alors $\frac{\partial F}{\partial h_i} = \frac{f_i}{F}$. Soit $g(h_1,\dots,h_n) = h_1^2+\cdots+h_n^2-1$ la contrainte

$$DF = \lambda DG \iff \frac{1}{F}\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_i = \mu h_i$ pour une constante μ.

Mais $h_1^2+\cdots+h_n^2=1 \Rightarrow f_1^2+\cdots+f_n^2 = \mu^2$ et $\mu = \sqrt{f_1^2+\cdots+f_n^2}$
$= \|\text{grad} f\|$

D'autre part $F\left(\frac{f_1}{\mu},\dots,\frac{f_n}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}|f_1^2+\cdots+f_n^2| = \frac{\|\text{grad} f\|^2}{\|\text{grad} f\|}$
$= \text{grad} \|f\|$

(c) $g'(t) = Df((1-t)x+ty)~~*~~(y-x)$

On sait qu'il ~~existe~~ ~~$c=(1-t)x+ty$~~ t, $0<t<1$ avec
$g'(t) = g(1)-g(0) = f(y)-f(x)$

d'où $f(y)-f(x) = Df(c)(y-x)$ pour un point
$c=(1-t)x+ty$, $0<t<1$
c'est à dire $f(y)-f(x) = Df(c)\left(\frac{y-x}{\|y-x\|}\right)\|y-x\|$
norme 1

et $\|f(y)-f(x)\| \le \max_{c\in[x,y]} \|Df(c)\|_M \|y-x\|$

(d) $y=x+h$: $\|f(x+h)-f(x)\| \le \max_{c\in[x,x+h]} \|Df(c)\|_M \|h\|$

Dans la limite lorsque $h\to 0$, ~~$\max_{c\in[x,x+h]}\|Df(c)\|_M \to$~~ $\|Df(c)\|_M$

$f(x+h)-f(x) = Df(x)(h)+o(h)$
d'où
$\|f(x+h)-f(x)\| = \|Df(x)(h)+o(h)\|$

~~on a $\lim \left\|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\| \le \lim \max_{c\in[x,x+h]} \|Df(c)\|_M$~~ ~~$=\|\text{grad} f(c)\|$~~

$\Rightarrow \|Df(x)\| \le \|Df(x)\|$ — on atteint l'égalité

Elle confirme que $\|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)\|$ est $o(h)$

(e) $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\Rightarrow$ $\text{grad} f(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$

(1) $\iff |x_1x_2| \le$ ~~$\|\text{grad} f(x_1,x_2)\|$~~ $\max_{c\in[0,(x_1,x_2)]} \|\text{grad} f(c)\|\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$\Rightarrow |x_1x_2| \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2} = x_1^2+y_1^2$ (clairement vrai)

10 (a) $f_x = \frac{7}{3} y^2 (xy^2)^{4/3}$, $f_y = \frac{7}{3} 2xy \, (xy^2)^{4/3}$

$f_{xx} = \frac{7}{3}\frac{4}{3} y^4 (xy^2)^{1/3}$, $f_{xy} = \frac{7}{3} \times 2y \, (xy^2)^{4/3} + \frac{7}{3}\frac{4}{3} 2xy^3 (xy^2)^{1/3}$

$f_{yy} = \frac{14}{3} x \, (xy^2)^{4/3} + \frac{14}{3}\frac{4}{3} xy (xy^2)^{1/3}$

Toutes continues

$f_{xxx} = \frac{7}{3}\frac{4}{3}\frac{1}{3} y^6 (xy^2)^{-2/3}$ n'est pas continue lorsque $x \to 0$, $y \neq 0$

d'où la fonction est C^2 mais pas C^3

(b) ~~Seul point d'intérêt est $x = 0$.~~

En $x = 0$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 1$

En $x \neq 0$ $f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$

d'où f' n'est pas continue

12 (a) $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$; $\operatorname{grad} f \cdot v = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \end{pmatrix}$

$= -f_x f_y + f_y f_x = 0$

$\|\operatorname{grad} f\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$, $\|v\| = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}$

d'où $\|\operatorname{grad} f\| = \|v\|$

(b) Si $v = \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$ on aurait $g_x = -f_y$, $g_y = f_x$

$\Rightarrow$ $g_{xx} = -f_{xy}$, $g_{yy} = f_{yx}$

Puisque f de classe C^2, par le lemme de Schwarz $f_{xy} = f_{yx}$ et $g_{xx} + g_{yy} = 0$

Par symétrie, f aussi doit satisfaire $f_{xx} + f_{yy} = 0$

13 (a) $f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$

où $D^2 f(a)(h,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$

(b) On calcule les dérivées partielles à l'ordre 2

14 (a) $f(x,y) = x^3y - x^2y^2 - 2y$

$f_x = 3x^2y - 2xy^2 = 0$ (1)

$f_y = x^3 - 2x^2y - 2 = 0$ (2)

(1) soit $x=0$ soit $y=0$ soit $3x-2y=0$

~~si~~ $x=0$ contredit (2) ;

$y=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x^3 = 2 \Rightarrow x = 2^{1/3}$ (seule racine réelle)

$3x-2y=0 \Rightarrow x^3 - 3x^3 - 2 = 0 \Rightarrow -2x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

(seule racine réelle)

Deux points $\begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

$f_{xx} = 6xy - 2y^2$, $f_{xy} = 3x^2 - 4xy$, $f_{yy} = -2x^2$

Matrice Hessienne

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6xy - 2y^2 & 3x^2 - 4xy \\ 3x^2 - 4xy & -2x^2 \end{pmatrix}$$

point $\begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 0 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \times 2^{2/3} \\ 3 \times 2^{2/3} & -2 \times 2^{2/3} \end{pmatrix}$ déterminant < 0

$\Rightarrow$ pt. de selle

pt. $\begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 9 - \frac{9}{2} & 3 - 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

~~det~~ $\det = -9 - 9 < 0$ pt. de selle

(b) $f = x^4 + 3x^2y - y^3 - 2x$: $f_x = 4x^3 + 6xy - 2 = 0$ (1)

$f_y = 3x^2 - 3y^2 = 0$ (2)

(2) $\Rightarrow x = \pm y$

$x = y$ (1) $\Rightarrow 4x^3 + 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x+1)(2x^2 + x - 1)$

racines de $2x^2 + x - 1$ $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = -1$ et $\dfrac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$x = -y$ (1) $\Rightarrow 4x^3 - 6x^2 - 2 = 0$ Calculatrice : une seule racine réelle $\approx 1{,}68$

$\begin{pmatrix} 1{,}68 \\ -1{,}68 \end{pmatrix}$

$f_{xx} = 12x^2 + 6y$, $f_{xy} = 6x$, $f_{yy} = -6y$

$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 6y & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix}$, $H(f)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ $\det Hf\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$f(-1+h, -1+k) = (h-1)^4 + 3(h-1)^2(-1+k) + (k-1)^3 + 2(h-1)$

$= h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1 - 3(h^2 - 2h + 1)(k-1) + k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + 2h - 2$

$f(-1+h, -1+k) - f(-1,-1) = h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h - 3h^2k + 3h^2 + 6hk - 6h - 3k$

$\qquad + k^3 - 3k^2 + 3k + 2h$

$= h^4 - 4h^3 + 9h^2 - 8h - 3h^2k + 6hk + k^3 - 3k^2$

Signes différents, $k=0$, $h<0$ $f>0$ pour h assez petit

$k=0$, $h>0$ $f<0$

pt. de selle