L2 Mathématiques — Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Examen session 1, (13/06/2019)

Aucun document n'est autorisé.

Question de cours:

(1) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Donner une condition necessaire pour que

$$\forall i \neq j \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{sur } \Omega.$$

(2) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, (a, b) un point critique de f.

(a) Ecrire le développement limité d'ordre deux de f au voisinage de (a, b).

(b) Donner les conditions sur la hessienne de f au point (a, b) pour que (a, b) soit un minimum relatif strict, un maximum relatif strict, un point selle.

Question 1:

Soit $A = \{(t, \sin \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2; t > 0\}$. Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ de A.

Question 2:

Trouver les extrema de la fonction

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2},$$

où $0 < a < b$.

Question 3:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = x & \text{si} & |x| > |y| \\ f(x,y) = y & \text{si} & |x| < |y| \\ f(x,y) = 0 & \text{si} & |x| = |y| \,. \end{array}$$

Étudier la continuité de f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

Question 4:

Montrer que les dérivées partielles de la fonction suivante existent en $(0,0)$ mais que les autres dérivées directionnelles n'existent pas:

$$f(x,y) = |xy|^{1/2}$$

Question 5:

Trouver le développement limité d'ordre deux au voisinage de $(0,0)$ de la fonction $f(x,y) = e^{x+y}$.

Question 6:

Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x,y) = xy - (1-x^2-y^2)^{1/2}$ dans le disque $x^2 + y^2 \leq 1$.