L2 Mathématiques PMRC, Analyse dans $\mathbf{R}^n$

Devoir préparatoire No. 1, Oct 2019

Normes, ensembles fermés, compacts, applications différentiables

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

1. (a) Montrer que la fonction $N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ donnée par

$$N(x) = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

est une norme sur $\mathbf{R}^n$, où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées canoniques.
(b) Montrer que N est équivalente à la norme euclidienne.

On considère $\mathbf{R}^n$ muni d'une norme quelconque $||\cdot||$. Soient $a, b \in \mathbf{R}^n$ et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $t \to ||ta + b||$ $(a \neq 0)$.

(c) Montrer que $f(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $\pm\infty$.
(d) Montrer que f atteint sa borne inférieure m en un point au moins t_0 de $\mathbf{R}$.
(e) Montrer par un exemple que ce point t_0 n'est pas nécessairement unique (on pourra prendre la norme de la partie (a) définie sur $\mathbf{R}^2$ et pour a, b les points $(0, 1)$ et $1, 0)$). Est-il unique si $||\cdot||$ est la norme euclidienne ?

2. Pour l'ensemble A donné, dire s'il est ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, compact; indiquer les points isolés et les points d'adhérence.
(a) $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{1\} \subset \mathbf{R}$.
(b) $A = \cup_{r \in \mathbf{Q}} [(0, 0), (\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)] \subset \mathbf{R}^2$ où $[x, y] = \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ désigne le segment droit joignant deux points $x, y \in \mathbf{R}^n$.

3. On considère $\mathbf{R}^n$ muni de sa norme euclidienne $||\cdot||$. Montrer que l'application $x \to ||x||$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ est dérivable en chaque point $x \neq 0$ avec dérivée l'application linéaire

$$h \to \frac{h \cdot x}{||x||} \qquad (h \in \mathbf{R}^n)$$

où $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs. Montrer qu'elle n'est pas dérivable en $x = 0$.

FIN