M1 Variable complexe – Feuille de TD 1 – Paul Baird

Notions de base, fonctions holomorphes

1. (les complexes) (i) Soit $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b > 0$. Montrer que $\left|\dfrac{a-b}{a-\overline{b}}\right| < 1$;
(ii) Pour des nombres complexes a, b, montrer que

$$|1-\overline{a}b|^2 - |a-b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2)\,.$$

en déduire que si $|a| < 1$ et $|b| < 1$ alors

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1.$$

(iii) Soit $f(x+\mathrm{i}y) = xy/(x^2+y^2)$ pour $x+\mathrm{i}y \neq 0$. Est-ce-que $f(z)$ présente une limite lorsque $z \to 0$?

2. (**C**–différentiabilité). Etudier la **C**-différentiabilité de la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par

$$f(x+\mathrm{i}y) = \begin{cases} \frac{xy(x+\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x+\mathrm{i}y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x+\mathrm{i}y = 0\,. \end{cases}$$

en $z = x+\mathrm{i}y = 0$.

3. (limite d'une fonction complexe) Soit $f(z) = z\sin(1/z)$ $(z \neq 0)$, $f(0) = 0$. Est-ce-que f est continue en $z = 0$? Est-ce-qu'elle est **C**-différentiable en $z = 0$?

4. Soit $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ la fonction

$$u(x+\mathrm{i}y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy\,.$$

Trouver une fonction $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que la fonction $f = u + \mathrm{i}v$ soit holomorphe. Exprîmer f en fonction de z.

5. Soit $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ la fonction

$$u(x+\mathrm{i}y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3\,.$$

Trouver une fonction $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que la fonction $f = u + \mathrm{i}v$ soit holomorphe. Exprîmer f en fonction de z.

6. (fonctions holomorphes). Soit U un ouvert connexe de **C** et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur U. Montrer que si $f(U) \subset \mathbf{R}$ alors f est constante. Montrer que si f prend ses valeurs dans une droite quelconque alors f est constante.

7. (les équations de Cauchy-Riemann). Montrer que les seules fonctions du type $f(x+\mathrm{i}y) = u(x) + \mathrm{i}v(y)$ qui sont **C** différentiable sont du type $f(z) = \lambda z + c$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $c \in \mathbf{C}$.

8. (séries) (i) Donner un exemple d'une série entière qui converge pour tout $z \in \mathbf{C}$, puis une qui ne converge que lorsque $z = 0$.
(ii) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z)$ pour tout $|z| < R$, où $R > 0$. Si $S(x)$ est réelle pour tout x réel avec $|x| < R$ montrer que chaque a_n réel. Si $S(z)$ est paire, montrer que $a_n = 0$ pour tout n impaire.
(iii) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ n'est pas uniformément convergente sur $D(0,1) := \{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$.
(iv) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que si $|z| < 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$$

converge absolument.

9. (séries) Soit $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour tout $r < R$ on a

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n \geq 0} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Montrer que si $R = \infty$ et si S est une fonction bornée dans **C**, alors S est forcément constante.

10. (les équations de Cauchy-Riemann). Ecrire la partie réelle et imaginaire de la fonction $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées et conclure que $\cosh z$ est holomorphe.