M1 Variable complexe – Feuille de TD 2 – Paul Baird

§2. Fonctions holomorphes

1. (les équations de Cauchy-Riemann). Soit $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ et $g : V \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ deux fonctions holomorphes telles que $V \subset f(U)$. Montrer que $g \circ f$ est holomorphe. Montrer que si $f : U \subset \mathbf{C} \to V \subset \mathbf{C}$ est un difféomorphisme holomorphe alors son reciproque $f^{-1} : V \to U$ est holomorphe.

2. (les équations de Cauchy-Riemann). Ecrire la partie réelle et imaginaire de la fonction $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées et conclure que $\cosh z$ est holomorphe.

3. (les équations de Cauchy-Riemann). Montrer que les seules fonctions du type $f(x + \mathrm{i}y) = u(x) + \mathrm{i}v(y)$ qui sont $\mathbf{C}$ différentiable sont du type $f(z) = \lambda z + c$ où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $c \in \mathbf{C}$.

4. (fonctions complexes) Trouver les zéros des fonctions suivantes :

$$1 + e^z, \quad \sinh z, \quad \cosh z, \quad \frac{1}{e} - e^z, \quad 1 + \mathrm{i} - e^z\,.$$

5. (limite d'une fonction complexe) Soit $f(z) = z\sin(1/z)$ $(z \neq 0)$, $f(0) = 0$. Est-ce-que f est continue en $z = 0$?

6. (ln et exp) Pour tout $z \in \mathbf{C}$, montrer que $n \ln_0(1 + z/n)$ est définie pour tout n assez grand et tend vers z lorsque $n \to \infty$. En déduire que $(1 + z/n)^n \to e^z$ lorsque $n \to \infty$.

7. (fonction tangente) Montrer que la fonction $\tan z = \sin z / \cos z$ détermine une fonction bijective

$$\left\{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}\,.$$

8. (la fonction argument) Soit f une fonction continue à valeurs réelles définie sur $\{z : |z| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point z tel que $f(-z) = f(z)$. En déduire que l'argument n'est pas continue dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

9. (la fonction logarithme) Trouver le domaine et image de la fonction

$$z \mapsto \ln_0\left(-\mathrm{i}\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Calculer sa partie réelle et imaginaire et montrer qu'elle est holomorphe.

10. (la fonction n-ième racine). Soit $f(z) = z^{1/n}$ pour un entier $n > 1$. Par analogie avec la définition de la fonction logarithme, montrer comment définir cette fonction dans un plan privé d'un demi-axe à partir de la fonction reciproque.

11. ($\mathbf{C}$–différentiabilité). Etudier la $\mathbf{C}$-différentiabilité de la fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par

$$f(x + \mathrm{i}y) = \begin{cases} \frac{xy(x+\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x + \mathrm{i}y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x + \mathrm{i}y = 0\,. \end{cases}$$

en $z = x + \mathrm{i}y = 0$.

12. (fonctions holomorphes). Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe sur U. Montrer que si $f(U) \subset \mathbf{R}$ alors f est constante. Montrer que si f prend ses valeurs dans une droite quelconque alors f est constante.

13. (applications conformes). Soit $F = (u, v) : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (U ouvert) une application $\mathbf{R}$-différentiable avec dérivées partielles continues.

(a) Soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs canoniques ; donc $F_* e_1 = (u_x, v_x)$ etc. Montrer que F_* conserve les angles entre vecteurs si et seulement si

(i) $F_* e_1 \cdot F_* e_2 = 0$; et

(ii) $||F_* e_1|| = ||F_* e_2||$ en chaque point.

(b) Montrer que $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est conforme si et seulement si soit $\partial f/\partial z \neq 0$ soit $\partial f/\partial \bar{z} \neq 0$ en chaque point et f est holomorphe ou anti-holomorphe.

14. (fonction exponentielle). Est-ce-que $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ existe ?

15. (fonction logarithme). Montrer que dans le disque $|z| < 1$, on a

$$\ln_0(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\,.$$