M1 Variable complexe écrit - DMAP8VCO

Mercredi 11 mai 2016, 13h30–16h30 (3h)

Polycopie du cours seul document autorisé.

Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. Calculer

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{\pi \mathrm{i} - 2z} \mathrm{d}z \,,$$

où $C(0,2)$ est le cercle de rayon 2 centré en 0 parcouru dans le sens direct.

(2 points)

II. Montrer que exactement trois racines du polynôme

$$z^4 + 12z + 1$$

se trouvent dans la coronne $2 < |z| < 3$. (3 points)

III. Soit $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ la fonction

$$u(x + \mathrm{i}y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy \,.$$

Trouver une fonction $v : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ telle que la fonction $f = u + \mathrm{i}v$ soit holomorphe. Exprîmer f en fonction de z. (3 points)

IV. (a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ définie dans le plan coupé $U := \mathbf{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C} : y = 0, x \leq 0\}$ vérifiant $f(z)^4 = z$ pour tout $z \in U$ et $f(1) = 1$. Quelle est l'image de cette fonction ?

(b) Trouver une bijection holomorphe de U dans le quadrant : $V := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

(c) Montrer que la fonction $g(z) := \ln_0(-z^4)$ est bien définie et holomorphe dans V. Quelle est l'image par g de la courbe $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $0 < t < \pi/2$.

(5 points)

SUITE...

V. On suppose que f est holomorphe dans un ouvert simplement connexe U sauf en un nombre fini de pôles. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin continu fermé. On suppose que $\{z \in U : ord(f,z) \neq 0\}$ est un ensemble fini $\{z_1, \ldots, z_n\}$ disjoint de $\gamma([0,1])$. On écrit

$$ZP(f,\gamma) := \sum_{j=1}^{n} ord(f,z_j) ind(\gamma, z_j)$$

où $ind(\gamma, z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

Soit g une fonction holomorphe dans U sauf en un nombre fini de pôles disjoints de $\gamma([0,1])$. On suppose que pour tout $z \in \gamma([0,1])$ on a $|g(z)| < |f(z)|$.

(a) Montrer que $\inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \gamma([0,1])\} = \delta > 0$.

Pour chaque t vérifiant $0 \leq t \leq 1$, soit

$$E(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} \mathrm{d}z$$

(b) Montrer que $f(z) + tg(z)$ ne présente aucun zéro ou pôle dans $\gamma([0,1])$ et que par suite $E(t)$ est bien définie et prend ses valeurs dans les entiers.

(c) Montrer que pour $0 \leq t < u \leq 1$ et $z \in \gamma([0,1])$, on a

$$\left| \frac{(f' + ug')(z)}{(f + ug)(z)} - \frac{(f' + tg')(z)}{(f + tg)(z)} \right| \leq \frac{u-t}{\delta^2} |(f'g - fg')(z)|$$

et par suite que $|E(u) - E(t)| \leq k(u-t)$ pour une constante k indépendante de t et u.

(d) En déduire que $E(1) = E(0)$ et que $ZP(f+g,\gamma) = ZP(f,\gamma)$.

(e) Calculer $\int_\gamma (f'(z)/f(z)) \mathrm{d}z$ où $f(z) = (z-1)^3(z+4)(z+i)^{-2}$ et γ est le cercle de rayon 2 centré en $z = 0$ parcouru dans le sens direct.

(7 points)

Rappel : Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ le developpement de Laurent d'une fonction f dans un disque pointé $D(a,r) \setminus \{a\}$ (r assez petit). Alors $ord(f,a)$ est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_N = 0$ pour tout $N < n$.

FIN