Variable complexe – Paul Baird

§7. Fonctions elliptiques

Une fonction elliptique est une fonction méromorphe doublement périodique dans le plan. Ces fonctions sont importantes en géométrie algébrique et pour la résolution d'équations différentielles en physique.

La fonction $\sin z$ est entière périodique de période 2π : $\sin(z+2\pi) = \sin z$. Elle est la fonction reciproque de

$$\arcsin z = \int^z \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w$$

où on peut prendre comme contour d'intégration le segment droit joignant l'origine avec le point z, d'où l'intégrale est bien définie pour $|z| < 1$. On remarque que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\arcsin z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, et par suite, par le théorème de la dérivée de la fonction reciproque, on a que $w = \sin z$ est solution à l'équation

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 = 1 - w^2$$

avec conditions à l'origine $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$.

La première fonction elliptique de Jacobi s'appelle *sinus amplitudinus* et s'écrit $\mathrm{sn}\,(z,k)$ pour un paramètre complexe k. Lorsque $k = 0$, $\mathrm{sn}\,(z,0) = \sin z$ et habituellement (mais pas toujours $0 < k < 1$. La fonction $\mathrm{sn}\,(z,k)$ est par définition la fonction reciproque de

$$\int^z \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2w^2}}\,\mathrm{d}w\,.$$

lorsque cette intégrale est bien dḿnie, ce qui est le cas lorsque $|z| < 1$ quand on a $0 < k < 1$.

La fonction $w = \mathrm{sn}\,(z,k)$ est solution à l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^2 = (1-w^2)(1-k^2w^2)$$

avec condition à l'origine $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$.

<u>Exercice</u> : Montrer qu'une solution à l'équation de la pendule

$$\theta''(t) + \omega^2 \sin\theta = 0$$

est donnée par $\theta(t) = 2\arcsin(k\mathrm{sn}\,(\omega t, k))$ (on remarque que $\theta''(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\theta'(t))^2)$.

Il y a trois fonctions elliptiques de Jacobi : la 2ème est cosinus amplitudinus $\mathrm{cn}\,(z,k)$ définie comme la solution à (1) satisfaisant $w(0) = 1$ et $w'(0) = 0$. Puis on peut démontrer que $\mathrm{cn}^2 + \mathrm{sn}^2 = 1$. La 3ème fonction de Jacobi est $\mathrm{dn}(z,k)$ caractérisée par $\mathrm{dn}^2 + k^2\mathrm{sn}^2 = 1$. Plus tôt, en 1797, Gauss a définie la fonction sinus lemniscaticus $w = \mathrm{sl}(z)$ définie comme la fonction reciproque de

$$\int^z \frac{1}{\sqrt{1-w^4}}\,\mathrm{d}w = \int^z \frac{1}{\sqrt{(1-w^2)(1-\mathrm{i}^2w^2)}}\mathrm{d}w$$

On voit alors que $\mathrm{sl}(z) = \mathrm{sn}(z,\mathrm{i})$.

<u>Définition</u> : Une *fonction elliptique* est une fonction méromorphe doublement périodique dans le plan ; c'est à dire, il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ avec $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$, tels que

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \qquad \forall m, n \in \mathbf{Z}\,.$$

<u>Remarques</u> : 1. Si $f(z)$ est non-constante nécessairement elle doit présenter des pôles, sinon, elle serait une fonction entière bornée ce qui serait en contradiction avec le théorème de Liouville.
2. Le parallélogramme engendré par ω_1 et ω_2 s'appelle le *parallélogramme fondamental*, ou *domaine fondamental* associé à f.
3. Pour les fonctions elliptiques de Jacobi, on a ω_1 réel et ω_2 imaginaire.
4. Donnée une fonction elliptique, l'application $z \mapsto (f(z), f'(z))$ paramétrise une *courbe elliptique* dans $\mathbf{C}P^2$.

<u>Définition</u> Une *intégrale elliptique du 1ère type* est une intégrale de la forme

$$\int^z \frac{1}{\sqrt{(w-a)(w-b)(w-c)(w-d)}}\,\mathrm{d}w$$

pour des points distincts $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Lorsque $a \to \infty$, à une constante près, le terme $(w-a) = a(\frac{w}{a} - 1)$ devient constant et on remplace l'intégrale ci-dessus avec

$$\int^z \frac{1}{\sqrt{(w-b)(w-c)(w-d)}}\,\mathrm{d}w$$

Afin que l'intégrale le long du chemin soit bien définie, il faut couper le plan. Dans le premier cas on enlève des segements droits joignant disons a à b et c à d ; dans le 2eme cas on prend un segement droit joignant b à ∞ (n'importe quelle direction mais de telle sort qu'il ne coupe pas l'autre segement) et un segement droit joignant c à d. Il ne faut pas que les deux segement s'intersectent.

On prend deux copies du plan, chacun corréspondant à un choix de racine et puis on les colle le long des deux côtés de la coupure ce qui donne une surface homéomorphe à un tore (voir le cours pour un dessin). Ce tore est exactement le parallélogramme fondamentale associé à la fonction reciproque (elliptique) de l'intégrale elliptique, lorsqu'on identifie les côtés opposés.

Groupe modulaire : Le groupe modulaire est le groupe $PSL(2,\mathbf{Z})$ de 2×2-matrices à coefficients entiers de déterminant 1 avec les matrices A et $-A$ identifiées. Soit ω_1 et ω_2 les périodes d'une fonction elliptique $f(z)$ et soit

$$\begin{aligned} \omega_1' &= a\omega_1 + b\omega_2 \\ \omega_2' &= c\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbf{Z})$$

On voit que les nouvelles périodes sont périodes de $f(z)$, et reciproquement. En fait pour la reciproque, il faut que l'aire du parallélogramme fondamentale définie par les nouvelles périodes soit égale à l'aire du parallélogramme définie par les anciennes périodes. Mais l'aire d'un parallélogramme avec côtés définis par z_1 et z_2 est donnée par $|\mathrm{Im}\,(z_1\overline{z_2})|$ et

$$\mathrm{Im}\,(\omega_1'\overline{\omega_2'}) = (ad-bc)\mathrm{Im}\,(\omega_1\overline{\omega_2'}) = \mathrm{Im}\,(\omega_1\overline{\omega_2'})$$

Il s'ensuit que pour une fonction elliptique son réseau de périodes n'est que défini à l'action d'un élément de $PSL(2,\mathbf{Z})$ près.

Exercice : Indiquer dans un dessin le nouveau réseau de périodes lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 7.1. La somme des résidus d'une fonction elliptique dans son parallèlleogramme fondamental s'annulle (si un pôle se trouve sur la frontière on déplace le parallèlogramme).

Preuve : Soit P un parallélogramme fondamental. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{z\in P} \mathrm{res}_z(f) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0+\omega_1}^{z_0+\omega_1+\omega_2} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &\qquad \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0+\omega_1+\omega_2}^{z_0+\omega_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0+\omega_2}^{z_0} f(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Alors, on remplace z par $z+\omega_1$ dans la 2ème intégrale et par $z+\omega_1$ dans la 3ème intégrale ; on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{z\in P} \mathrm{res}_z(f) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0}^{z_0+\omega_1} (f(z) - f(z+\omega_2))\,\mathrm{d}z \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{z_0}^{z_0+\omega_2} (f(z) - f(z+\omega_1))\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

qui s'annulle à cause de la périodicité de f. $\square$

Théorème 7.2. Soit $f(z)$ une fonction elliptique et soit $z_0 \in \mathbf{C}$. Alors le nombre de zéros de $f - z_0$ dans son parallélogramme fondamental est égal au nombre de pôles de f (chacun enuméré avec sa multiplicité).

Preuve On applique le théorème de Rouché. Soit $g(z) = f(z) - z_0$. Alors $g(z)$ est elliptique avec les mêmes p'eriodes de f ; de même pour $g'(z) = f'(z)$. Il s'ensuit que $\frac{f'(z)}{f(z) - z_0}$ est elliptique est par le théorème précédant, la somme de ces résidus dans son parallélogramme fondamental P s'annulle : $\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} \mathrm{d}z = 0$. Or le théorème de Rouché implique que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} \mathrm{d}z = ZP_{\partial P}(g)$$

la partie droite étant notation pour la différence entre le nombre de zéros et le nombre de pôles de g. □

La fonction $\wp$ de Weierstrass. Il y plusieurs façons de définir cette fonction :

1. Elle est définie par l'équation :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\wp}{\mathrm{d}z}\right)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

pour des constantes complexes g_2 et g_3.

2. Elle se développe en série de Laurent autour de l'origine en puissances paires comme

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n}$$

où les coefficients sont déterminés par la relation de récurrence

$$b_1 = \frac{g_2}{20}, \qquad b_2 = \frac{g_3}{28}, \qquad b_n = \frac{3}{(2n+3)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{n-k-1} \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

3. Elle est donnée par la somme infinie en éléments simples :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

où la somme est prise sur toutes les périodes $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ non-nulles (dans un ordre quelconque). En particulier, cette dernière expression détermine les constantes g_2 et g_3 en termes des périodes ω_1 et ω_2.

Propriétés : Il s'agit d'une fonction paire $\wp(z) = \wp(-z)$ avec un pôle double en $z = 0$. Il s'agit du seul pôle dans le parallélogramme fondamental. IL s'ensuit que la fonction de Weierstrass prend toute valeur complexe exacetement deux fois dans son parallélogramme fondamental.

Le corps des fonctions elliptiques : Pour des périodes donnés ω_1, ω_2 ($\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$), les fonctions elliptiques avec ω_1 et ω_2 comme périodes est un corps.

Théorème 7.3. Chaque fonction elliptique $E(z)$ a une expression unique

$$E(z) = S(u) + vT(u), \qquad u = \wp(z), \quad v = \wp'(z)\,,$$

où $S(u)$ et $T(u)$ sont des fonctions rationnelles de u à coefficients constants. Inversement, toute expression $S(\wp) + \wp' T(\wp)$ est elliptique.

On explore certaines des propriétés enoncées ci-dessus dans la feuille d'exercices no. 7.

Référence : C. L. Siegel, Topics in Complex Function Theory Vol. 1, Wiley 1969.