Variable complexe – Paul Baird

§6. Le principe de l'argument et le théorème de Rouché

Résidu logarithmique : Soit f une fonction holomorphe et non-nulle dans un disque pointé $D(a,R)\setminus\{a\}$. On appelle *résidu logarithmique de f en a* le résidu de la dérivée logarithmique :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\ln f(z)$$

en a. On écrit $RL_a(f)$ pour le résidu logarithmique de f en a.

Soit a un zéro d'ordre m. Alors $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $g(a) \neq 0$ et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Puisque g'/g est holomorphe dans un voisinage de a et $g(a) \neq 0$, on voit que $RL_a(f) = m$. De la même manière, si a est un pôle d'ordre m, on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

et $RL_a(f) = -m$.

Notation : Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. On écrit $\mathrm{ord}_a(f)$ pour l'ordre de f au point a. Il s'agit du plus petit entier m pour lequel $a_m \neq 0$ et $a_n = 0$ $\forall n < m$ dans le développement en série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ dans un disque pointé $D(a,r)$ pour r asssez petit que $D(a,r)$ ne contient aucune autre singularité sauf eventuellement $z=a$. Autrement dit, si a est un pôle d'ordre m alors $\mathrm{ord}_a(f) = -m$; si a est un zéro d'ordre m alors $\mathrm{ord}_a(f) = +m$; si a est ni un zéro ni un pôle alors $\mathrm{ord}_a(f) = 0$.

Théorème 6.1 : Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ avec un ensemble fini de zéros et de pôles $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U avec $\gamma \sim 0$ qui ne'intersecte pas l'ensemble F. Alors

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\, \mathrm{ord}_{a_k}(f)$$

où $\mathrm{Ind}_\gamma z$ est l'indice de γ en z (Théorème 3.2).

Preuve : Soient $z_1, \ldots, z_s$ les zéros et $p_1, \ldots, p_t$ les pôles de f. La fonction f s'écrit alors comme

$$f(z) = (z-z_1)\cdots(z-z_s)(z-p_1)^{-1}\cdots(z-p_t)^{-1} g(z)$$

avec g holomorphe et non-nulle dans U. Le résultat est une conséquence du Théorème de Cauchy (Théorème 4.6) et du résidu logarithmique. □

Théorème 6.1' (version alternative) Soit f méromorphe dans un ouvert V et soit U un ouvert avec $\overline{U} \subset V$ dont son bord ∂U est continue n'intersect pas l'ensemble $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ des zéros et pôles de f. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$$

Exemple ; Soit

$$f(z) = \frac{(z-2)^2(z+\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})^3(z+1)}$$

et soit γ un chemin qui fait trois tours dans le sens retrograde autour de $z = 2$, un tour dans le sens direct autour de $z = \mathrm{i}$, un tour dans le sens direct autour de $z = -\mathrm{i}$ et un tour dans le sens direct autour de $z = -1$. Alors

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = -3 \times 2 + 1 - 3 - 1 = -9$$

Théorème 6.2 (généralisation) Soit f méromorphe dans un ouvert U avec ensemble de zéros et pôles $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Soit g holomorphe dans U et soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans U qui n'intersecte pas l'ensemble F avec $\gamma \sim 0$ dans U. Alors

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} g(a_k) \mathrm{Ind}_{\gamma}(a_k) \operatorname{ord}_{a_k}(f)$$

La preuve est identique à celle du théorème 6.1.

Corollaire 6.3 (formule de l'inverse) : Soit f holomorphe dans un ouvert $U \supset \overline{D(a, R)}$ et soit f injective dans $D(a, R)$. Soient $\Omega = f(D(a, R))$ et γ le cercle $|z - a| = R$. Alors $f^{-1}(w)$ est définie par la formule

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} \mathrm{d}z$$

pour chaque $w \in \Omega$.

Preuve : Soit $w = f(\xi) \in \Omega$; alors $f(z) - w$ présente un zéro et un seul $(z = \xi)$ dans $D(a, R)$. On pose $g(z) = z$ et on remplace $f(z)$ par $f(z) - w$ dans le théorème 6.2 :

$$\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} \mathrm{d}z \,.$$

□

Théorème 6.4 (Rouché) Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, soit f et g deux fonctions méromorphes sur U avec un ensemble fini de zéros et de pôles. Soit γ un chemin fermé simple (injectif) à image dans $U \setminus F$ formant le bord d'un compact K. Si pour tout $z \in \gamma$ on a

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

alors $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(g)$ où $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble de zéros et pôles de f et de g contenus dans K.

Preuve : Par hypothèse

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1$$

sur γ. Soit $\lambda(z) = f(z)/g(z)$. Si λ est réelle et positive alors l'inégalité devient $\lambda+1 < \lambda+1$, absurde, donc la fonction méromorphe f/g applique γ dans $\Omega = \mathbf{C}\setminus[0,\infty[$.

Soit ℓ une détermination de logarithme dans Ω ; alors $\ell(f(z)/g(z))$ est bien définie et détermine une primitive pour $(f/g)'/(f/g)$ dans un voisinage de γ. Il s'ensuit que

$$0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma (f/g)'/(f/g)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(g)$$

□

Exemple : Soient $f(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2$ et $g = 5z^3$. Soit γ le cercle $|z| = 1$. Alors sur γ

$$|f(z) + g(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4$$

D'autre part $|g(z)| = 5$ sur γ et les hypothèses du théorème de Rouché sont satisfaites. Il s'ensuit que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(g)$ (pas de pôles). Par ailleurs, g a un zéro tripe à l'origine ce qui nous indique que f admet trois zéros dans le disque ouvert $D(0, 1)$.

Exemple (théorème fondamental d'algèbre) : Soit

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

alors

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \to 1 \quad \text{lorsque} \quad z \to \infty$$

Donc il existe $R > 0$ tel que $|z| \geq R$ entraîne

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

En particulier

$$\left|\frac{p(z)}{z^n} - 1\right| < 1$$

pour $|z| = R$, c'est à dire $|p(z) - z^n| < |z|^n$ pour $|z| = R$. Le théorème de Rouché affirme alors que le nombre de zéros de p dans le disque et le nombre de zéros de z^n dans le disque, c'est à dire il y a n zéros de $p(z)$ dans la disque $D(0, R)$. □

Remarque importante : Clairement les zéros et les pôles de g et $-g$ coincident, donc dans les hypthèses du Théorème de Rouché on peut remplacer g par $-g$ et écrire

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

Si maintenant on remplace g par $f + g$, on conclut que si

$$|g(z)| < |f(z)| + |f(z) + g(z)| \Leftrightarrow |g(z)| - |f(z)| < |f(z) + g(z)|$$

pour tout $z \in \gamma$, alors $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f+g)$ où $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble de zéros et pôles de f et de $f+g$ contenus dans K (les autres hypothèses restent inchangées). On remarque alors que si $|g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \gamma$, alors $|g(z)| - |f(z)| < 0 \leq |f(z) + g(z)|$ et donc l'hypothèse est satisfaite. On peut alors affirmer :

Corollaire 6.5 : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, soit f et g deux fonctions méromorphes sur U avec un ensemble fini F de zéros et de pôles. Soit γ un chemin fermé simple (injectif) à image dans $U \setminus F$ formant le bord d'un compact K. Si pour tout $z \in \gamma$ (c'est à dire dans l'image de γ) on a

$$|g(z)| < |f(z)|$$

alors $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ord}_{a_k}(f+g)$ où $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble de zéros et pôles de f et de $f+g$ contenus dans K.

Application : Soit $p(z) = a_n z^n + q(z)$ un polynôme de degré n avec $\deg q(z) < n$. On peut alors comparer les zéros de z^n et $p(z)$ car pour $|z|$ assez grand on a $|q(z)| < |a_n z^n|$.

Exercice : Montrer que le polynôme $z^4 + 26z + 2$ présente exactement trois zéros dans la coronne $5/2 < |z| < 3$.

Théorème 6.6 : Soit $f(z)$ holomorphe non-constante dans un voisinage de z_0 et soit $f(z_0) = a_0$. Soit n l'ordre du zéro de $f(z) - a_0$ en z_0 (donc $n \geq 1$ et si en plus $f'(z_0) = 0$ on a $n \geq 2$). Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall a \in D(a_0, \delta) \setminus \{a_0\}$ il existe n points distincts $z_1, \ldots, z_n \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ avec $f(z_j) = a$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Preuve : Le théorème d'unicité (théorème 3.13) implique que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, si $0 < |z - z_0| < 2\varepsilon$ on a que $f(z)$ est définie et (i) $f(z) \neq a_0$; (ii) $f'(z) \neq 0$ (sinon f est constante). Puisque $\{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$ est compacte

$$\inf\{|f(z) - a_0| : |z - z_0| = \varepsilon\} = \delta > 0\,.$$

Soit $a \in D(a_0, \delta) \setminus \{a_0\}$. Alors $|a_0 - a| < |f(z) - a_0|$ lorsque $|z - z_0| = \varepsilon$ d'où pour $|z - z_0| = \varepsilon$,

$$|f(z) - a - f(z) + a_0| = |a_0 - a| < |f(z) - a_0| \leq |f(z) - a| + |f(z) - a_0|$$

Par le théorème de Rouché, $f(z) - a$ et $f(z) - a_0$ possèdent le même nombre de zéros dans $D(z_0, \varepsilon)$, c'est à dire n. Puisque f' est non-nulle dans $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, les zéros de $f(z) - a$ sont tous simples et donc distincts. $\square$

<u>Corollaire 6.6</u> : Soit $f(z)$ holomorphe et injective alors $f'(z)$ est non-nulle. $\square$