

Variable complexe – Paul Baird

§3. Intégrale complexe

Chemins : Un chemin est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. Deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{C}$ sont équivalents s'il existe une fonction continue strictement croissante $\tau : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ telle que $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ pour tout $t \in [a_1, b_1]$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. Une courbe est une classe d'équivalence de chemins.

Réunion de deux chemins : Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ deux chemins tels que $\gamma(b) = \delta(c)$. Soit $\delta_1(t) = \delta(t + c - b)$, $b \leq t \leq b + d - c$. Alors δ_1 est équivalent à δ . En plus, la fonction qui est confondue avec γ sur $[a, b]$ et δ_1 sur $[b, b + d - c]$ est continue dans $[a, b + d - c]$ et détermine un chemin noté $\gamma \cup \delta$.

Chemin continuellement différentiable : Un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est dit continuellement différentiable, ou de classe C^1 , si $\gamma(t)$ admet une dérivée $\gamma'(t)$ qui est continue en chaque point $t \in [a, b]$. Si en plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ on dit que γ est régulière.

Un chemin γ est continuellement différentiable par morceaux si $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ avec chaque γ_j continuellement différentiable.

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin et soit $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. Soit

$$L(\gamma, S) := \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Par l'inégalité triangulaire, $L(\gamma, S') \geq L(\gamma, S)$ lorsque $S' \supseteq S$. On dit que γ est rectifiable si $\{L(\gamma, S) \mid S \text{ une subdivision de } [a, b]\}$ est majoré. La borne supérieure est la longueur de γ notée $|\gamma|$.

Exercices : (i) soit $\gamma(t) = tz + (1-t)w$, ($t \in [0, 1], z, w \in \mathbf{C}$). Montrer que $|\gamma| = |w - z|$.

(ii) Montrer que $|\gamma \cup \delta| = |\gamma| + |\delta|$.

Théorème : Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ continuellement différentiable régulière, alors

$$|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Preuve : Soit S une subdivision de $[a, b]$. Alors

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}),$$

²
donc

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque γ' est uniformément continue dans $[a, b]$, il existe $\delta > 0$ tel que $s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \Rightarrow |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$. Soit $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ tel que $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ pour chaque j . Posons $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$. Pour chaque j , il existe $p_j, q_j \in (t_{j-1}, t_j)$ tels que

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})(u'(p_j) + iv'(q_j))$$

(formule des accroissements finis). Soit $\psi(t) = u'(p_j) + iv'(q_j)$ pour $t_{j-1} \leq t < t_j$. Alors ψ est constante sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et

$$|\psi(t) - \gamma'(t)| = |u'(p_j) + iv'(q_j) - u'(t) - iv'(t)| \leq 2\varepsilon$$

pour tout t . Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (|\gamma'(t)| - |\psi(t)|) dt &\leq 2\varepsilon(b - a) \\ \Rightarrow |\gamma| \geq L(\psi, S) &= \int_a^b |\psi(t)| dt \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt - 2\varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

et $|\gamma| \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. □

Définition de l'intégrale : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin de classe C^1 et soit $f(z)$ une fonction complexe définie sur l'image de γ . On appelle *intégrale de f le long du chemin γ* la quantité

$$\int_{\gamma} f dz := \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt.$$

Remarque : Cette définition est invariante par changement de paramètre. En effet, si $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbf{C}$ est tel que $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$ où $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1]$ est strictement croissante de classe C^1 , alors $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$ par la formule de changement de variable dans un intégrale.

Exemple : Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ le cercle de rayon $r : \gamma(t) = re^{it}$ et soit $f(z) = 1/z$.

Alors

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Exercices : 1. Calculer $\int_{\gamma} z^m dz$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$ où $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ est le cercle $\gamma(t) = e^{it}$.

2. Soit $a, b \in \mathbf{C}$ et posons $\gamma(t) = tb + (1-t)a$ le segment droit joignant a à b . Calculer $\int_{\gamma} z^n dz$.

Propriétés de l'intégrale complexe : 1. Linéarité :

$$\int_{\gamma} (af + bg)dz = a \int_{\gamma} f dz + b \int_{\gamma} g dz \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

2. Additivité : Soient $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathbf{C}$ deux chemins C^1 tels que $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ et soit $\gamma_1 \cup \gamma_2$ leur réunion. Alors

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$$

3. Orientabilité : On désigne par γ^- le chemin obtenu à partir de $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ par le changement de variable $t \mapsto \alpha + \beta - t$, c'est à dire $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$. On dit que γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation. Soit f intégrable le long de γ ; alors

$$\int_{\gamma^-} f dz = - \int_{\gamma} f dz .$$

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin C^1 et écrivons $|d\gamma| = |\gamma'(t)|dt$. Alors la longueur $L(\gamma)$ de γ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |d\gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|dt .$$

Estimation de l'intégrale :

Théorème 3.1 : Pour toute fonction f intégrable le long d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^1 on a

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |d\gamma|$$

En particulier, si $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \gamma([\alpha, \beta])$ alors

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq ML(\gamma) .$$

Preuve : Soit $J = \int_{\gamma} f dz$ et écrire $J = |J|e^{i\theta}$ pour un nombre θ . Alors

$$|J| = \int_{\gamma} e^{-i\theta} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Puisque la partie droite est un nombre réel, on a

$$|J| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \{ e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f| |d\gamma| .$$

□

L'indice d'un chemin : On dit qu'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ est fermé si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Théorème 3.2 : Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux et soit Ω le complément de son image dans \mathbf{C} . Soit

$$Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \quad (z \in \Omega)$$

Alors Ind_{γ} est une fonction à valeurs entières sur Ω qui est constante sur chaque composante connexe de Ω est qui est nulle sur la composante non-bornée de Ω .

Preuve : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$ un chemin fermé et soit $z \in \Omega$:

$$(1) \quad Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$$

Alors $\zeta/2\pi i$ est un entier si et seulement si $e^{\zeta} = 1$. Il faut démontrer que $\varphi(b) = 1$ où

$$\varphi(s) = \exp \left\{ \int_{\alpha}^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \right\} \quad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

Mais

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$$

en tout point sauf en un nombre fini S où γ n'est pas C^1 . Il s'ensuit que $\varphi/(\gamma-z)$ est une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ dont la dérivée s'annule dans $[\alpha, \beta] \setminus S$, ce qui entraîne que $\varphi/(\gamma-z)$ est constante sur $[\alpha, \beta]$. Puisque $\varphi(a) = 1$ alors

$$\varphi(s) = \frac{\gamma(s)-z}{\gamma(a)-z} \quad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

Mais γ fermé $\Rightarrow \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ et donc $\varphi(\beta) = 1$ et $Ind_{\gamma}(z)$ est un entier. Puisque Ind_{γ} est continue sur chaque composante de Ω , elle est constante sur chaque composante. Enfin (1) implique que $|Ind_{\gamma}(z)| < 1$ pour z suffisamment grand et par suite Ind_{γ} est zéro sur la composante non-bornée de Ω . \square

Théorème de Taylor-Lagrange pour une fonction holomorphe : On se rappelle de la règle de Leibnitz :

Théorème 3.3 : Soit $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction continue et définissons $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ par

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds.$$

Alors g est continue. En plus, si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe et est continue sur $[a, b] \times [c, d]$ alors g est continuellement différentiable et

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds$$

Lemme 3.4 :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds = 2\pi$$

pour tout z avec $|z| < 1$.

Preuve : C'est une conséquence du Théorème 3.2 et l'exemple : $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ où γ est le cercle unité. \square

Théorème 3.5 : Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe sur un ouvert U et supposons que l'adhérence $\overline{D(a, r)} \subset U$ ($D(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$). Soit $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour tout z tel que $|z-a| < r$.

En particulière on en déduit le théorème de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

(la valeur de f en a égale à sa moyenne arithmétique le long des cercles assez petits centrés en a).

Preuve : En définissant $U_1 = \{\frac{1}{r}(z-a) : z \in U\}$ et en remplaçant $f(z)$ par $g(z) = f(a + rz)$, on peut supposer que $a = 0$ et $r = 1$, c'est à dire que $\overline{B(0,1)} \subset U$.

Soit z fixé avec $|z| < 1$. Il faut démontrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} ds$$

c'est à dire que

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z) \right) ds.$$

On applique la règle de Leibnitz (Théorème 3.3) en posant

$$\varphi(s, t) = \frac{f((z + t(e^{is} - z))e^{is}}{e^{is} - z} - f(z)$$

pour $0 \leq t \leq 1$ et $0 \leq s \leq 2\pi$. Puisque $|z + t(e^{is} - z)| = |z(1-t) + te^{is}| \leq 1$, φ est bien définie et continument différentiable, d'où la dérivée de $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t) ds$ est continue.

Le résultat s'ensuivra si on peut démontrer que $g(1) = 0$. On montre que $g(0) = 0$ est que g est constante. En effet

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, 0) ds = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds - 2\pi f(z) = 0$$

par le Lemme 3.4.

En plus, la règle de Leibnitz entraine que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds$$

⁶ où $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{is} f'(z+t(e^{is}-z))$. D'autre part, pour $0 < t \leq 1$ on a $\Phi(s) := -if(z+t(e^{is}-z))/t$ vérifie $\Phi'(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Donc

$$g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0.$$

Puisque $g'(t)$ est continue on a $g' \equiv 0$ et g est constante. \square

Comment appliquer ce résultat afin de trouver une série entière ? On applique la série géométrique : pour $|z-a| < r$ et $|w-a| = r$ on a

$$\frac{1}{w-z} = \left(\frac{1}{w-a} \right) \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n.$$

Ensuite, on multiplie les deux parties par $f(w)/2\pi i$ et on prend l'intégrale le long du cercle $\gamma : |z-a| = r$. Par le théorème 3.5, la partie gauche est $f(z)$ et si on est assuré de la convergence uniforme, la partie droite serait

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

La convergence uniforme est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3.6 : Soit f holomorphe dans $D(a, R)$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout z tel que $|z-a| < R$, où

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Preuve : Soit $0 < r < R$, d'où $\overline{D(a, r)} \subset D(a, R)$. Soit $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. D'après Théorème 3.5,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour tout z tel que $|z-a| < r$. Puisque $|z-a| < r$ et $|w-a| = r$

$$\frac{|f(w)| |z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n$$

où $M = \max\{|f(w)| : |w-a| = r\}$. Puisque $\frac{|z-a|}{r} < 1$, la critère de Weierstrass §Théorème 3, entraîne la convergence uniforme de la série $\sum f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$ pour tout $|w-a| = r$. On en déduit le résultat des calculs précédants. \square

Corollaire 3.7 : Soit $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, alors f est infiniment différentiable.

Corollaire 3.8 : Soit $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\overline{D(a, r)} \subset U$, alors

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

où $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Corollaire 3.9 (inégalité de Cauchy) : Soit f holomorphe dans $D(a, R)$ et supposons que $|f(z)| \leq M$ pour tout z dans $D(a, R)$, alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Théorème 3.10 (Théorème de Liouville) : Une fonction holomorphe entière (holomorphe sur tout \mathbf{C}) et bornée est toujours constante.

Preuve : Soit $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Par le corollaire précédant

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

pour tout R et donc $f'(z) \equiv 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, d'où f est constante. \square

Théorème 3.11 (Théorème fondamental d'algèbre) : Soit $p(z)$ un polynôme non-constant, alors il existe un nombre complexe a tel que $p(a) = 0$.

Preuve : Supposons au contraire que $p(z) \neq 0$ pour tout z et soit $f(z) = 1/p(z)$. Puisque $f(z)$ est bornée et entière, par le Théorème de Liouville, elle est constante, une contradiction. \square

Soit $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe et soit $a \in U$ un point tel que $f(a) = 0$, alors on dit que a est un zéro de f de multiplicité $m \geq 1$ s'il existe une fonction holomorphe $g : U \rightarrow \mathbf{C}$ tel que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ avec $g(a) \neq 0$.

Corollaire 3.12 : Soit $p(z)$ un polynôme de degré n , alors

$$p(z) = c(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_m)^{k_m}$$

où c est constante et $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Preuve : On applique le Théorème 3.11 et la récurrence. \square

Théorème 3.13 : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \equiv 0$;
- (ii) il existe $a \in U$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$;
- (iii) $\{z \in U : f(z) = 0\}$ présente un point d'accumulation dans U .

Preuve : C'est évident que (i) \Rightarrow (ii) et (iii).

(iii) \Rightarrow (ii) : Soit $a \in U$ un point d'accumulation de $Z := \{z \in U : f(z) = 0\}$ et supposons que $R > 0$ est tel que $D(a, R) \subset U$. Alors $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-a)^k$ pour $|z-a| < R$. (ii) est une conséquence de l'unicité des séries entières : Théorème 5 de §1.

(ii) \Rightarrow (i) : Soit $A = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \geq 0\}$. Par hypothèse $A \neq \emptyset$. On montre que A est à la fois ouvert et fermé dans U .

Soit $z \in \overline{A} \cap U$ et soit (z_k) une suite dans A telle que $z = \lim z_k$. Puisque chaque $f^{(n)}$ est continue on voit que $f^{(n)}(z) = \lim f^{(n)}(z_k) = 0$, donc $z \in A$ et $A \cap U = \overline{A} \cap U$. D'autre part soit $a \in A$ et soit $R > 0$ tel que $D(a, R) \subset U$. Alors $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ pour $|z-a| < R$ où $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Donc $f(z) = 0$ pour tout z dans $D(a, R)$ et $D(a, R) \subset A$ et par suite A est ouvert. \square

Théorème 3.14 (Principe du maximum) : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle qu'il existe un point $a \in U$ tel que $|f(a)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in U$. Alors f est constante.

Preuve : Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(a, r)} \subset U$ et soit $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Théorème 3.5 entraîne que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Puisque $|f(a + re^{it})| \leq |f(a)|$ pour tout t , il s'ensuit que

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \leq |f(a)|$$

Donc

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + re^{it})|) dt$$

et $|f(a)| = |f(a + re^{it})|$. Puisque r est quelconque, on voit que pour $D(a, R) \subset U$, on a $f(D(a, R)) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| = |\alpha|\}$ où $\alpha = f(a)$, ce qui entraîne f constante dans $D(a, R)$ ($f\bar{f} = c \Rightarrow \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ dans $D(a, R)$). En particulière $f(z) = \alpha$ pour $|z-a| < R$. Pour conclure, on applique le théorème 3.13 à la fonction $f(z) - \alpha$. \square