Variable complexe – Paul Baird

§1. Notions de base

L'ensemble des nombres complexes est le plan $\mathbf{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ avec les opérations d'addition et de multiplication :

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

Il s'agit d'un corps commutatif engendré par les réels $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ et l'élément $\mathrm{i} := (0, 1)$. Tout élément s'écrit alors comme $x + y\mathrm{i}$ avec la propriété $\mathrm{i}^2 = -1$.

Si on abandonne commutativité de multiplication on peut définir les quaternions $\mathbb{H}$:

$$x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k} \qquad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1,\ \mathrm{ij} = \mathrm{k}$$

Si on abandonne l'associativité de multiplication on est ramené aux octonions de Cayley $\mathbb{O}$. $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ sont tous les algèbres de division (tout élément non-nul est inversible). Parmi ces quatres algèbres ce n'est que $\mathbf{C}$ qui est algébriquement fermé (tout élément algébrique, c'est à dire qui est racine d'un polynome, appartient à $\mathbf{C}$).

Notations : $z = x + y\mathrm{i}$,

- x est la partie réelle de z : $x = \operatorname{Re} z$;
- y est la partie imaginaire de z : $y = \operatorname{Im} z$;
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la module de z ;
- $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ est la conjuguée de z : $|z|^2 = z\overline{z}$;
- l'inverse de z est donnée par $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

On identifie $z \in \mathbf{C}$ avec le point $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ dans la plan $\mathbf{R}^2$.

Forme polaire : On écrit $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, puis $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ où $r = |z|$ est la module de z. On appelle θ l'argument de z. Si $z_1 = r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2e^{\mathrm{i}\theta_1}$ alors

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2}, \quad z^n = r^ne^{\mathrm{i}n\theta} .$$

<u>Racine n–ième de a</u> : Les solutions de l'équation $z^n = a = |a|e^{\mathrm{i}\alpha} \in \mathbf{C}$ sont données par

$$z = |a|^{1/n}e^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n} \qquad 0 \leq k \leq n - 1 .$$

Séries entières : Soit $\{a_n\}$ une suite dans $\mathbf{C}$ telle que $S_n := a_0 + \cdots + a_n \to S$ lorsque $n \to \infty$. Alors on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge avec limite S. On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Si $\sum |a_n|$ converge on dit que $\sum a_n$ est absolument convergente.

Théorème 1 : Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ suites telles que $\sum a_n = A$ et $\sum b_n = B$ avec $\sum |a_n|$ convergente. Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Convergence ponctuelle : Soit $U \subset \mathbf{C}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n : U \to \mathbf{C}$. La suite $\{f_n\}$ converge ponctuellement en $a \in U$ s'il exite un nombre qu'on note $f(a) \in \mathbf{C}$ tel que $f_n(a) \to f(a)$. Si $\{f_n\}$ converge ponctuellement en chaque point de U et chaque f_n est continue, ce n'est pas nécessairement le cas que la fonction limite f est continue. Voir, par exemple, le cas où $U = [-1, 1]$ et $f_n(x) = x^{2n}$.

Convergence uniforme : On dit que f_n converge uniformément vers f sur U si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout $a \in U$.

Théorème 2 : Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues définies sur $U \subset \mathbf{C}$ qui convergent uniformément vers $f : U \to \mathbf{C}$. Alors f est continue.

Convergence uniforme d'une série : On dit que la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément dans $U \subset \mathbf{C}$ si la suite des sommes partielles : $S_n = f_1 + \cdots + f_n$ converge uniformément.

Théorème 3 (critère de convergence de Weierstrass) : Soit $\{M_n\}$ une suite de nombres réels non-négatifs telle que $\sum_n M_n$ converge et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $U \subset \mathbf{C}$ telle que pour chaque n on a $|f_n(z)| \leq M_n$ pour tout $z \in U$. Alors $\sum_n f_n$ converge uniformément dans U.

Preuve : Pour chaque $z \in U$, $\sum_n f_n(z)$ converge puisqu'elle converge absolument. Soit $S(z) = \sum_n f_n(z)$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Pour $z \in U$, $m \geq N$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{m} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{m} M_n \leq \varepsilon\,.$$

Lorsque $m \to \infty$, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| = \left| S(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right| \leq \varepsilon\,.$$

$\square$

Une conséquence du théorème précédante est la caractérisation de convergence des séries entières :

Théorème 4 : Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres complexes. Alors

soit (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$;

soit (ii) il existe $R \geq 0$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.

Si $0 \leq r < R$ (ou si $r > 0$ dans le cas (i)) alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément dans le disque $\{z \in \mathbf{C} | |z| \leq r\}$.

Le nombre R s'appelle le <u>rayon de convergence</u> de la série entière.

<u>Corollaire 1</u> : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ convergentes pour $|z| < R$ avec sommes $a(z)$ et $b(z)$ respectivement. Soit $c_n = \sum_{k=0} a_k b_{n-k}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = a(z)b(z)$ pour $|z| < R$.

<u>Corollaire 2</u> : Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge à $S(z)$ pour $|z| < R$, alors S est continue dans le disque $|z| < R$.

<u>Exemples</u> : (i) $\sum z^n$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$. Donc $R = 1$ et la série est divergente poiur tout z tel que $|z| = R$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $z = 1$ donc $R = 1$. La série converge lorsque $z = -1$.

(iii) $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$; de même pour $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

<u>Théorème 5</u> (théorème d'unicité des séries entières) : Soient $\sum_n a_n z^n = a(z)$ et $\sum_n b_n z^n = b(z)$ pour $|z| < R$, $R > 0$. Soit $\{z_k\}$ une suite de nombre complexes non-nuls telle que $z_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$ et $a(z_k) = b(z_k)$ pour chaque k. Alors $a_n = b_n$ pour tout n.

<u>Preuve</u> : Puisque $a(z)$ et $b(z)$ sont continues en $z = 0$, on a

$$\lim_{k \to \infty} a(z_k) = a_0, \quad \lim_{k \to \infty} b(z_k) = b_0$$

donc $a_0 = b_0$. Supposons qu'on a établi que $a_r = b_r,\ r = 0, 1, \ldots m$. Soient

$$a^*(z) = a_{m+1} + a_{m+2} z + \cdots, \quad b^*(z) = b_{m+1} + b_{m+2} z + \cdots$$

alors $a^*(z_k) = b^*(z_k)$ pour chaque k , donc, lorsque $k \to \infty$ on en déduit que $a_{m+1} = b_{m+1}$. Par récurrence, on a $a_n = b_n$ pour tout n $\square$

Plan compactifié : On ajoute un point à l'infini $z = \infty$. On écrit $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{C}_\infty$. On réalise $\mathbf{C}_\infty$ comme la sphère unité dans $\mathbf{R}^3$: $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ (appelé sphère de Riemann). A chaque point $z \in \mathbf{C}$ on associe le point $X = (x_1, x_2, x_3)$ d'intersection de S^2 avec le rayon joignant le pôle nord $N = (0, 0, 1)$ au point z. La correspondance $X \leftrightarrow z$ s'appelle la projection stéreographique. Le point $N \leftrightarrow \infty$.

Soit $z = x + \mathrm{i}y$. Le rayon est paramétré comme $\{t(0, 0, 1) + (1-t)(x, y, 0) | 0 \leq t \leq 1\}$. Le point d'intersection avec la sphère est donnée par $t = (|z|^2 - 1)/|z|^2 + 1)$ d'où

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|z|^2 + 1}(2\mathrm{Re}\, z, 2\mathrm{Im}\, z, |z|^2 - 1)\,.$$

Reciproquement, $z = x + \mathrm{i}y = (x_1 + \mathrm{i}x_2)/(1 - x_3)$.

Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe telle que $|f(z)| \to \infty$ lorsque $z \to a \in \mathbf{C}$. Alors on associe la valeur ∞ à $f(z)$ lorsque $z = a$. Reciproquement, si $f(z) \to b$ lorsque $|z| \to \infty$ on écrit $f(\infty) = b$. Par exemple, soit $f(z) = 1/z$, alors $f(0) = \infty$ et $f(\infty) = 0$.