Feuille 6 - Séries de fonctions

Rappels : On suppose (u_n) une suite de fonctions définie sur $D \subset \mathbf{R}$. Pour chaque $x \in D$ on considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Convergence simple : $\forall x \in D$, la série converge vers une somme $S(x)$.

Convergence absolue : $\forall x \in D$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Convergence uniforme : La suite des sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ converge uniformémement vers $S(x)$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

Convergence normale : La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in D} |u_n(x)|$ converge.

- convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple.
- si chaque $S_n(x)$ convergence uniformément vers $S(x)$ $\Rightarrow$ continuité de $S(x)$.
- Critère d'Abel uniforme : soit $(a_n(x))$ suite de fonctions réelles positives ou nulles décroissantes qui converge uniformément vers 0 ; soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions telle que la suite des sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ soit uniformément bornée ($\exists C > 0$ tel que $|S_N(x)| \leq C$ pour tout N et pour tout $x \in D$). Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ est uniformément convergente sur D.
- Série entière : Une série de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pour une telle série, il existe un nombre R (rayon de convergence) tel que la série converge normalement sur tout compact dans $]R, R[$ et diverge pour tout x avec $|x| > R$.
- Série géométrique : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

Exercice I: Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ sur un compact de $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ (critère d'Abel).

Exercice II: Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ est uniformément convergente pour $x \in \mathbf{R}$.

Exercice III: Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

converge sur $\mathbf{R}$ et que sa somme est continue.

Exercice IV: Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llll} & u_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2} \quad (x \geq 0), & & u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n} \quad (x \in \mathbf{R}) \\ (*) & u_n(x) = \dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (|x| \neq 1), & (*) & u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} \quad (x > 0) \end{array}$$

$(*)$ = plus difficile.

Exercice V: Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

(1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$.

(2) Montrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbf{R}_+$.

(3) Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

(4) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbf{R}_+$?

Exercice VI: (1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$.

(2) Montrer que la somme est une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

(3) Montrer que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Exercice VII: (1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et justifier que sa somme $f(x)$ y est continue.

(2) Montrer que la série ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

(3) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$.

(4) En déduire que la somme f de la série de la partie (1) est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.

(5) En déduire $f(x)$.