Université de Bretagne Occidentale — L2 Mathématiques et Economie
Faculté des Sciences et Techniques — Analyse 2
Département de Mathématiques — *Année 2019-2020*

Feuille 4 - intégrales généralisées

Rappels :

• On suppose $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$ continue par morceau. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente si $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\int_a^z f(x)\mathrm{d}x$ existe et est finie.

• On suppose $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ continue par morceau. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente si $\displaystyle\lim_{z\to b}\int_a^z f(x)\mathrm{d}x$ existe et est finie.

• On dit que deux fonctions positives f et g sont équivalentes au voisinage de b si $\displaystyle\lim_{z\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = c$ pour c une constante $0 < c < \infty$ (à noter la petite modifcation à la définition de la polycopie). Soit $f, g : [a, b[\to [0, \infty[$ deux fonctions continues par morceaux équivalentes au voisinage de b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.

• <u>Intégrales de Riemann</u> 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice I: Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x\,\mathrm{d}x$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ $(x > 0)$

Exercice II: Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

converge et de déterminer sa valeur.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$ converge.

2. En effectuant un changement de variables, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+1} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, \mathrm{d}\theta\,.$$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, \mathrm{d}\theta$ converge.

3. Montrer que $X^4+1 = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$.

4. En déduire que

$$\frac{2X^2}{X^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{X}{X^2+\sqrt{2}X+1} \right)$$

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice III. Justifier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{2} \ln t \, \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh u}\, \mathrm{d}u$