Université de Bretagne Occidentale — L2 Mathématiques et Economie

Faculté des Sciences et Techniques — Analyse 2

Département de Mathématiques — *Année 2019-2020*

Feuille 3 - suites de fonctions

Rappels : • Une suite de fonctions (f_n) ($f_n : I \to \mathbf{R}$, I un intervalle) converge simplement vers la fonction $f : I \to \mathbf{R}$ si $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$, pour chaque $x \in I$.

• Une suite de fonctions (f_n) ($f_n : I \to \mathbf{R}$, I un intervalle) converge uniformément vers la fonction $f : I \to \mathbf{R}$ sur I, si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall x \in I, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

• 1er théorème de Dini : Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions réelles et continues sur $[a, b]$, telles que la suite $(f_n(x))$ soit croissante pour tout $x \in [a, b]$ ($f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\, \forall n \in \mathbf{N}$). Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ alors cette convegence est uniforme.

Exercice I: Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions ci-dessous. Pour chaque suite, tracez l'allure des courbes représentatives d'un terme générique de celle-ci ainsi que de sa limite simple, si elle existe.

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2 + 1}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;
2. $f_n(x) = \dfrac{x^2 + x^2 n}{x^2 + n}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;
3. $f_n(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{n}\right)$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{N}^*$;
4. $f_n(x) = \arctan(nx)$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;
5. $f_n(x) + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) x^2$, $x \in I$, $n \in \mathbf{N}^*$ pour $I = [-1, 1]$ et $I = \mathbf{R}$;
6. $f_n(x) = x^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbf{N}^*$;
7. $f_n(x) = nx^n$, $x \in [-1, 1]$, $n \in \mathbf{N}$.

Exercice II: Pour $n \in \mathbf{N}^*$ soit $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ n^2 x + (2 + e^{-n}) & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ -n^2 x + (2 + e^{-n}) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Tracer f_n pour $n \in \{1,2\}$;

2. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$;

3. Que pensez-vous de la convergence uniforme ?

Exercice III: (Stone-Weierstrass pour la fonction $x \to \sqrt{x}$). Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur $[0,1]$ définie par :

$$\begin{cases} f_0(x) = 0 \\ f_{n+1}(x) = f_n(x)(1 - \frac{1}{2}f_n(x)) + \frac{x}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est une fonction polynomiale.

2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers $x \to \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

4. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant uniformément vers $x \to \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

5. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant uniformément vers $x \to |x|$ sur $[-1,1]$.

Exercice IV: Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes. Qu'en est-il de la convergene de la suite des dérivées ? Dire pour quelles valeurs de x l'équation $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ est valable.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos(nx)$, $x \in \mathbf{R}$;

2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\arctan(nx)$, $x \in \mathbf{R}$;

3. $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$;

4. $f_n(x) = e^{-nx^2}x^6$, $x \in \mathbf{R}$;

5. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Exercice V: Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, soit $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers 0 mais que la convergence n'est pas uniforme.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone.

3. De quelle hypothèse du théorème de Dini cet exemple montre-t-il la nécessité ?