Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L2 Mathématiques et Economie
Analyse 2
Année 2019-2020

Feuille 1 - séries numériques

Rappels : • Une suite numérique (a_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.q. } n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < \epsilon\,;$$

on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

• Une suite numérique (a_n) converge vers $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ si

$$\forall R > 0 \ \exists n_0 \text{ t.q. } n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n > R\,;$$

on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

• Toute suite monotone bornée présente une limite finie.

• Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si la suite (S_N) des ses sommes partielles $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ converge.

• Serie de Riemann : la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leqslant 1$.

• Une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge ; convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.

• Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$ avec $0 < c < \infty$ alors les séries sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

• Test d'Alembert : Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et supposons que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \ell$; 1. si $\ell < 1$ la série est convergente ; 2. si $\ell > 1$ la série est divergente ; 3. si $\ell = 1$ on ne sait pas.

• Test de la n-ième racine : Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et supposons que $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \ell$; alors la conclusion du test d'Alembert s'applique.

Exercice I: Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite :

$$\left(\frac{\cos n}{2^n}\right), \quad \left(1 - \frac{n^4}{\exp(n)}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}\right)$$

Exercice II: Etudier dans chacun des cas suivants la convergence de la suite (a_n) ; en cas de convergence calculer la limite :

$$a_n = n^3 + \tfrac{1}{n}, \quad a_n = (-2n+3)\tfrac{n+3}{-n^2+n+6}, \quad a_n = n\sqrt{n} - n, \quad a_n = \tfrac{n}{n+\sqrt{n}}, \quad a_n = \tfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}},$$
$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad a_n = (2n)^{1/2n},$$

Exercice III: Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Exercice IV: Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ la série géométrique et soit

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N$$

ses sommes partielles.
(i) Montrer que pour $r \neq 1$

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}\,.$$

(ii) En appliquant l'exercice III, étudier les limites $\lim_{N\to\infty} S_N$ dans les différents cas : $|r| < 1$, $r > 1$, $r \leqslant 1$, $r = 1$.

Exercice V: Soit

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

la série harmonique et soit

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{N}$$

ses sommes partielles. Montrer que

$$S_2 > \frac{1}{2}, \quad S_4 > \frac{2}{2}, \quad S_8 > \frac{3}{2}, \ldots, S_{2^k} > \frac{k}{2}\,.$$

En déduire que la sous-suite $(S_{2^k})_k$ tend vers l'infini et par suite que $\lim_{N\to\infty} S_N = \infty$.

Exercice VI: En calculant les somme des séries $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ et $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, estimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Quelle est l'erreur dans votre calcul ?

Exercice VII: Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{1/3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n}\,.$$