L2 Intégrale de Riemann et Probabilités - 2016

Feuille 9 : Fonctions de répartition, variables aléatoires discrètes

Rappel : Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. La fonction de répartition F_X de X est définie par $F_X(x) = P[X \leq x]$. Elle vérifie :

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$;
2. F_X est croissante ;
3. F_X est continue à droite ;
4. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$;
5. pour tout $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$, alors $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$;
6. $P[X = x] = F_X(x) - F_X(x_-)$ ($= 0$ si F_X est continue en x) .

Les propriétés 1-4 caracterisent une fonction de répartition.

Exercice I : On lance deux dés et on appelle X la somme des points obtenus. Donner la représentation graphique de la fonction de répartition de X. On précisera, en particulier, les points de discontinuité et leur nature.

Exercice II : On considère la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par :

$F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = x/8$ si $0 \leq x < 2$; $F(x) = x/4$ si $2 \leq x < 4$; $F(x) = 1$ si $x \geq 4$.

Tracer la représentation graphique de F et montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

Exercice III : Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$.
Exprimer $P[a < X < b], P[a \leq X \leq b], P[a \leq X < b]$ à l'aide de F_X.

Exercice IV : Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chancune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

Exercice V : Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{e^x}{2}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(x) + \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

est une fonction de répartition. La fonction F' est-elle une densité de probabilité ?

Exercice VI : Déterminer $a, b \in \mathbf{R}$ tels que la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|}\mathbb{I}_{]-4,+\infty[}(x)$$

soit une fonction de répartition.

Exercice VII : Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que:

$$P[X < 5] = 1/3 \ ; \quad P[X > 5] = 1/2 \ ; \quad P[X = 3] = P[X = 4] \,.$$

Exercice VIII : Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chancun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois "pile".

Exercice IX : On tire 9 cartes dans un jeu de 52 cartes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de carrés obtenus. Trouver la loi de X.

Exercice X : Soit X une variable aléatoir à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P[X = k] = \lambda 3^{-k}$.

1. Déterminer λ ;
2. X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

Exercice XI : Une loi géométrique sur $\mathbf{N}^*$ est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbf{N}^* \ ; \quad P[X = k] = p(1-p)^{k-1} \text{ pour } k \in \mathbf{N}^* \text{ et } 0 < p < 1 \,.$$

Soit X la loi géométrique de paramètre p et soit $N \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les lois de $Z = \inf(X, N)$ et de $Y = \sup(X, N)$.

Exercice XII : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que $p[X = k] = e^{-2}(1 + \alpha k)\dfrac{2^k}{4(k!)}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Déterminer α.

Exercice XIII : On lance 5 dés : à chaque lancer, on met de côté ceux qui donnent un as et on relance les autres jusqu'à obtenir 5 as. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers, et Y la variable aléatoire égale au nombre de dés lancés.

1. Calculer $P[X \leq k]$, puis $P[X = k]$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2. Calculer $P[Y = k]$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice XIV: Un point R se déplace dans le plan. A chaque instant, il a une probabilité p d'aller de (x, y) à $(x, y+1)$ et une probabilité q d'aller de (x, y) à $(x+1, y)$ $(x, y, \in \mathbf{N}$ et $p + q = 1)$.

1. Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0, 0)$, le point R atteigne le point $A\ (a, b)$?

2. Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0, 0)$, le point R atteigne le segment MN joignant $M = (n, 0)$ à $N = (n, n)$.