L2 Intégrale de Riemann et Probabilités - 2016

Feuille 10 : Variables aléatoires absolument continues

Rappel : Une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X est dite absolument continue s'il existe une fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}$ appelée densité de X telle que :

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;
2. f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites à droite et à gauche ;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut 1 ;
4. $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice I : Vérifier que les fonctions f suivantes sont des densités de probabilité :

1. $f(x) = (1 - |1 - x|)\mathbb{I}_{]0,2[}(x)$;
2. $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-|x-\mu|/\sigma}$;
3. $f(x) = \frac{x}{4} e^{-x/2}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$;
4. $f(x) = \dfrac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)}$.

Exercice II : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = cx\mathbb{I}_{[0,3[}(x) + c(6 - x)\mathbb{I}_{3,6[}(x) .$$

1. Montrer que pour une constante c convenable, que l'on déterminera, f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit A l'événement $[X > 3]$ et B l'événement $[1,5 < X < 4,5]$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice III : Soit X une variable aléatoire de densité f. Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbf{R}$ et soit $Y = aX + b$.

1. Exprimer la densité de Y à l'aide de f.
2. Même question avec $Y = |X|$.
3. Même question avec $Y = X^p$; $p \in \mathbf{N}^*$.

Exercice IV : Soient a et λ des réels strictement positifs. On pose :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} a^{a-1} \mathrm{d}x .$$

1. Montrer que $\Gamma(a) < +\infty$.
2. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et en déduire que, pour $n \in \mathbf{N}$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3. On considère f définie par :

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) \,.$$

Vérifier que f est une densité de probabilité. Il s'agit de la loi gamma $\Gamma(a, \lambda)$.

Exercice V : La loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la loi de densité f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \,.$$

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer, en utilisant les exercices III et IV, que la loi de $Z = X^2/2$ est la loi gamma de paramètres $\lambda = 1$ et $a = 1/2$, et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Exercice VI : On suppose que la durée d'une communication téléphonique soit une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(k)$ (il s'agit de la loi de densité f définie par $f(x) = ke^{-kx}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$).

1. Calculer, pour $k = 0,8$, la probabilité pour qu'une communication dure : (a) plus de 4 minutes ; (b) entre 3 et 5 minutes.

2. Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication dure plus de 3 minutes soit égale à 0.1 ?

Exercice VII : Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = (1+x)^{-2}\mathbb{I}_{0,+\infty[}(x) \,.$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. Soit $Y = \arctan X$. Montrer que Y est une variable aléatoire absolument continue et déterminer sa densité.

Exercice VIII : Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit F sa fonction de répartition. Montrer que :

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(-x) = 1 - F(x)$. En particulier $F(0) = 1/2$.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $P[|X| \leq x] = 2F(x) - 1$ et $P[|X| \geq x] = 2(1 - F(x))$.

Exercice IX : Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $n \geq 2$ et $a > 0$.

1. Pour quelle valeur du réel a, la probabilité $P[a < X < na]$ est-elle maximale ? (Etudier le signe de φ' où $\varphi(a) = P[a < X < na]$).

2. Soit $T = |X| + a$. Calculer la fonction de répartition F de T en fonction de la fonction de répartition Φ de X et en déduire la densité f de T.