Université de Bretagne Occidentale — L2-Maths/PMRC

Faculté des Sciences et Techniques — Intégrale de Riemann et probabilités

Département de Mathématiques — *Année 2016-2017*

Feuille 3 - Fonction de Riemann, intégrale de Riemann – suite

Exercice I : Les fonction f suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?
1) $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = [t]$ où $[t]$ désigne la partie entière de t.
2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{t}\right] & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Exercice II : Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ -2 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout $x \in [0,2]$, l'intégrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. La fonction $F@[0,2] \to \mathbb{R}$ est-ell continue sur $[0,2]$.
3. F est-elle dérivable sur $[0,2]$? Calculer sa dérivée.

Exercice III : Soit a un réel différent de ± 1.
1. Montrer que, pour tout réel x, on a $1 - 2a\cos(x) + a^2 > 0$.
2. Soit n un entier $n \geqslant 2$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + a^2\right) = \prod_{k=1}^{n} (a - e^{2ik\pi/n})(a - e^{-2ik\pi/n})$$

3. En déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + a^2\right) = (a^n - 1)^2 .$$

4. En utilisant les sommes de Riemann, calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\, dx .$$

Exercice IV : Soit x un réel strictement positif.
1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx/n} = \frac{e^x - 1}{x} .$$

2. En déduire, pour tout $x > 0$, la relation

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1 .$$

Exercice V : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en indiquant soigneusement leurs ensembles de définition :

$$\text{(a)} \quad \frac{\ln^\alpha(x)}{x},\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad (\sin x)e^x\,.$$

Exercice VI : Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t^2 \arctan(t)\,dt \qquad J = \int_0^{\pi/4} \cos(t)\,\ln(1+\cos t)\,dt$$
$$K = \int_0^{\pi/4} \tan^3(t)\,dt \qquad L = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\,dt$$

Exercice VII : (plus difficile) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$.
1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
4. Montrer que le produit $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant.
5. Calculer $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$, et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_n$.
6. Calculer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produit et en déduire une suite de rationnels convergeant vers π.

Exercice VIII : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.